第十九期 No.19
ISSN 1814-2176

Educação Matemática de Macau

澳門数学教育

—— 张奠宙 题

Mathematics Education in Macau

ISSN 1814-2176

9 771814 217007

澳門數學教育研究學會出版

2021年11月

CN31-1071/G4 国内代号：4-312 国外代号：BM593

全国中文核心期刊
首批认定学术期刊

小学数学教师

XIAOXUE SHUXUE JIAOSHI

2020年 | 第12期

汪甄南

为澳门数学教育注入生机活力

上海教育出版社
SHANGHAI EDUCATIONAL PUBLISHING HOUSE

ISSN 1006-1606

专　栏　错着、错着、错着，就对了！
案例与反思　“放开”学生的思维
教学探讨　微课“先导片”，导出自主、理解与创造
精品课堂　融合技术　创新方式　精准教学

InstaMag

2021/6

澳門數學教育研究學會

为人类社会添彩

世界第一尺 中国创造发明竞赛一等奖

第四届分角尺作图国际决赛

（7大千古难题 公开赛）

欢迎專家學者 教师学生参与 开卷比赛 取前十名 答卷发fenjcds@126.com 评委会（2021年7月7日截止）

一、3800年尺规无解 七大死题 每题20分；

1. 用分角尺 分别作出 平角，钝角，锐角三等分；提示 用框架法 十字线（三步完成）；

2. 用分角尺 作出360度圆心角七，九，十一，十三等分中的一个角；提示角N等分定律N=（2/N-1）+1+1；

3. 用分角尺 已知体积为1 正方体，作出体积为2 正方体；提示 用N倍立方定律 三线三点法（七步完成）；

4. 用分角尺作半径 r 的圆将其化为正方形面积不变；

二、世界千古难题上的难题 每题20分；

5. 用无刻度尺作出 任意角三等分，五等分；

6. 用无刻度尺作正七边形 提示崔榮琰“正N边形定律”；

7. 用分角尺 将一正方体三等分为三个正方体；

注：1.以上赛题“尺规”也能完成 详见 崔榮琰著 中英版3800年七大数学死题破解；世界名校 中国国家图书馆有收藏。

http://163.21.236.70 數學教师知识库网 數學内容 栏目有 长方体化为正方体 三线三点法 角N等分 作正N边形等 解题方法 。

分角尺作图竞赛组委会

2021年6月

分角尺几何作图竞赛组织委员会
ANGLE RULER COMPETITION

第四届分角尺作图国际决赛
（获奖名单）

分角尺赛区 教研基地 相关机构：

由中国本土原创的 第四届分角尺作图国际决赛（七大千古难题公开赛），经过一个多月的开卷 线上不分组决赛，于 7 月 17 日 决赛第一赛程结束，七大千古难题答案公示；参赛选手自行按答案订正。

于 7 月 22 日公布第二赛程“加赛题 再赛”！三天后，于 25 日收卷结束。

日前座次排定，获奖名单如下：

第一名	鄧海棠	男	46 岁	澳门
第二名	陳塱鋒	男	19 岁	澳门
第三名	张浪舟	女	51 岁	浙江
第四名	施振雄	男	37 岁	澳门
第五名	鄧穎瑤	女	18 岁	澳门
第六名	张特妞	女	15 岁	上海

祝贺 决赛选手取得优异成绩！

值得一提，本届“七大千古难题公开赛”每道赛题，曾悬赏百万 却无人破解！无奈，近 300 年被数学界判定 “尺规无解的死题”。 而如今，已被本土中国人破解，破局！为人类实现了“189 道千古难题”一尺解！

特别是中国原创，位居世界第一的“分角尺与三大几何定律”亮全球，无疑是中华民族在国际数学界站起来了，体面过人的站起来了！谁不为之高兴自豪 点赞？！

特此通报

分角尺几何作图竞赛办公室

二〇二一年七月三十日

澳門数学教育（第十九期） 2021 年 11 月

目　　錄

澳門教育暨青年局
澳　門　基　金　會　贊助

嘗試教學法是提升澳門數學教育的有效途徑 ………… 汪甄南 1
架橋人——汪甄南 ……………………………………………… 邱學華 3
嘗試教學法的魅力在澳門綻放
——節錄於《汪甄南自傳》 ………………………… 數學會 6
教學教研教案 ………………………………………………… 鄧海棠 14
四校聯考攻略——考綱 1 題析 ………………………… 鄧海棠 20
四校聯考攻略——考綱 2 題析 ………………………… 鄧海棠 31
正餘弦函數連乘問題的探究 …………………………… 鄭傲軒 39
淺談如何培養低年級學生的數學思維能力 …………… 林穎葵 44
向名師“邱學華”老師學習 ……………………………… 胡月媚 47
本澳全民核酸檢測的滿意度分析及建議
…………………………………… 崔天晴　鄭穎樺　金　鑫 51
《數字幾何》破千古難題——N 倍立方有解了！
…………………………………… 澳門數學教育研究學會 59
由一道競賽題引發的構造函數法與拉格朗日插值法的對比
………………………………………………………… 鍾錫豪 62
數學競賽常用不等式解題技巧應用及總結 …………… 李耀輝 70
會務活動紀錄 ……………………………………………………… 76

澳門數學教育研究學會出版
澳門新聞局編號:2877
地址:澳門南灣街 107 號
刊頭題詞:張真宙教授
排版:廣源紙業文具行
印刷:新文寶印務有限公司
刊號:ISSN 1814－2176

嘗試教學法是提升澳門數學教育的有效途徑

澳門數學教育研究學會　汪甄南

1995 年夏,在天津一次小學數學教育研討會上,第一次認識邱學華先生,他所創立的“嘗試教學法”和“嘗試教學理論”,深深地吸引了我,其“先練後講,先學後教”的教學模式,是一種反傳統的、具有獨創意義的嶄新的教學模式。

長期以來,澳門的中、小學生,對學習數學存在著畏難情緒,在課堂教學中,“滿堂灌”和“注入式”的教學方法又是當時澳門數學教師使用的主要教學方法。

“嘗試教學法”強調要讓學生先“嘗試”,在“嘗試”中學習,有指導地“嘗試”,力求取得成功。這就為發揮學生的主體作用和教師的主導作用找到了一種切實可靠的途徑和方法。對克服數學課堂教學中的“滿堂灌”和“注入式”的弊端極為有效。

自 1995 年以來,本人充分運用澳門大學教育學院的工作平臺,積極介紹、宣傳嘗試教學理論,並運用實驗、交流等不同形式,推動廣大澳門中、小學數學教師學習嘗試教學理論,實踐嘗試教學法,並多次邀請邱學華先生來澳門為數學教師親自講授嘗試教學基本理論,並積極鼓勵教師運用嘗試教學的先進理念進行教學改革,提高澳門數學教師的科研意識,轉變教師的教學觀念,從而改進教學方法,提高教學品質。

2000 年 3 月,澳門大學教育學院邀請邱先生到澳門講學。澳門小學教師課務重,一周要上 30 節課左右,下午 5 點放學後才能來聽講座,邱先生講話通俗易懂,幽默有趣,深深吸引了大家,直到晚上 7 點結束,沒有一個人中途離開。隔天《澳門日報》專門作了報導。

2000 年 10 月,澳門特區政府教育暨青年局派中學教育處陳寶雲處長、小學教育處李嘉麗處長參加在山東省濟南市舉行的全國協作區第十屆嘗試教學法研討會(學術年會),她們親身感受到嘗試教學法對培養學生的主體精神和創新精神的巨大作用,又容易學習,便於推廣。爾後,澳門教育暨青年教育局決定在全澳中小學推廣嘗試教學法。

2001 年 3 月以高規格邀請邱學華先生到澳門講學和培訓教師。邱先生在澳期間,向全體中小學校長作學術報告,教青局局長蘇朝暉先生親臨聽講,又向全體中小學數學教師宣教嘗試教學法並親自上示範課,並深入課堂進行具體指導。盛況空前,這是迄今為止,澳門教育界規模最大的一次教研活動。

16 年來,“嘗試教學”在澳門從無到有,從小到大,它正在改變著澳門的數學教育,可以毫不誇張地說,“嘗試教學”已植根於澳門,已被廣大數學教師所接受,不少教師已在用“嘗試教學法”進行課堂教學,無論在觀摩課、示範課或是應聘工作時的試教課,都會運用嘗試

教學法進行教學,也有不少澳門大學教育學院和澳門聖若瑟夜間部師範學校的學生在撰寫學士、碩士論文時會選擇嘗試教學理論作為研究課題。

由於澳門的特殊地位,它是一個多元文化社會,長期以來吸取和包容東方和西方的教育思想和教學方法,可是還沒有哪一種教學法象嘗試教學法那樣深入澳門教師的心中。

邱學華先生所創的"嘗試教學" 理論,為澳門的基礎教育的學科改革做出了重要貢獻。為澳門與內地的教育交流作出了貢獻。

(汪甄南:澳門數學教育學會會長、原澳門大學教育學院講師)

架橋人 —— 汪甄南

常州大學嘗試教育科學研究院　邱學華

架橋,架什麼橋?澳門與大陸數學教育交流之橋。

汪甄南,何許人也?澳門數學教育研究學會會長。

澳門是中國不可分割的一部分,澳門教師也是祖國教育大家庭中的一員。我們同他們要互相瞭解,多交流,這是我寫本文的目的。本文介紹汪甄南先生的故事和他促進澳門與大陸數學教育交流的故事。

從我認識汪先生談起,1993 年在天津一次小學數學教學研討會上認識,那時澳門還沒有回歸,屬於境外人士,大家都很好奇。我們交談後,才知他原是上海人,是1960 年上海師範大學數學系畢業生,恰好我也是1960 年畢業于華東師範大學教育系,大家都來自上海,有了親切感,我們交談甚歡,相見恨晚,從此我們成了好朋友。

汪先生是上海人,怎麼成了澳門人呢?看了他個人的經歷,簡直就是一個帶著傳奇色彩的故事。大學畢業後,他當了中學數學教師,由於工作認真,成績優異,三年後調入川沙縣教師進修學校做教師培訓工作。

改革開放後,1981 年一次偶然的機會,經香港一個親戚介紹,孤身一人到澳門去發展。到了澳門他才知道,港澳不是同一個地方,一個是英國殖民地,一個是葡萄牙殖民地,隔海相望。那位香港親戚鞭長莫及,無法照應他。因此他在澳門舉目無親,第一晚只能睡在馬路邊街心花園的長椅上。第二天才找到一家制衣廠打工。澳門學校都講廣東話(粵語),不會講粵語無法進學校當老師。他一邊打工,一邊學粵語。三年後他壯膽到一所女子中學應聘,他半生不熟的粵語總算過關。到了學校,他如魚得水,使用上海的先進數學教學方法,同學生打成一片,向學生學習粵語。他所教的班級成績突出,受到家長和學生的歡迎。幾年下來已能講一口流利粵語,他已能逐漸融入澳門社會。按常理,年齡大了再學一種語言是很難的,但汪先生做到了。

澳門的最高學府是澳門大學,進澳門大學的門檻很高,至少有兩個條件:一是學歷,不是碩士,就是博士,因此在澳門大學大都是香港來的或是從英國、葡萄牙學成回來的洋博士;二是會用英語教課。1991 年,澳門大學面向全球招聘,汪先生有幸憑藉數學教學法深厚的功?居然應聘成功,成為教育學院數學教學法的講師,這件事當年成為澳門教育界的佳話。汪先生只花 10 年時間,從一個底層打工仔蛻變成為澳門大學教師,實在令人驚歎,簡直是不可想像的事,給人以很大的啟示。從汪先生的成長史,我們深信一個人有了忍辱負重的

精神,不屈不撓的精神,奮發向上的精神,刻苦工作的精神,永不放棄的精神,什麼困難都能克服,什麼事情都能辦成。

到了澳門大學,他有了實現理想和施展才能的舞臺。他在澳門大學教育學院主要是培養中小學教師,所以澳門中小學許多校長和教師都是他的學生,為他今後開展工作創設了條件。依靠他的有利地位,他領頭創建了澳門數學教育研究學會,並被推舉為會長,因而有了推動澳門數學教育改革的平臺。

汪先生最大的貢獻是推動澳門與大陸數學教育的交流,是架設澳門與大陸數學交流橋樑的締造者。1979 年他去的澳門,還在葡萄牙政府的統治下,在珠海市拱北海關有一道關口阻擋,不能隨便往來。可是他身在澳門,心向祖國。開始三年打工是為了生存,到了聖諾撒聖心女子中學當數學教師,把上海先進的數學教學方法帶進去,又按大陸教材為藍本編寫了校本教材《新編立體幾何》。到了澳門大學,又成立了澳門數學教育研究學會,有了開展交流的平臺,施展才能有了機會,他不失時機多層次、多角度開展兩地的交流,搞得風生水起,火火紅紅。

最突出的一個例子,他在澳門不遺餘力,堅持全面推廣嘗試教學法。1993 年他在天津聽了我所做嘗試教學法的報告,他敏銳地感到嘗試教學法既能培養自學能力,又能發展思維能力,而且能有效地提高教學品質,是一種理想的教學方法,適合在澳門大面積推廣,他向我要了嘗試教學法書籍和資料。返回澳門後,就向澳門大學教育學院的師範生做系統介紹,又在中小學教師中宣講,並親自到澳門特區政府教育暨青年局(簡稱教青局)彙報。1998 年經他的策劃,邀請我到澳門講學,在澳門大學報告廳舉行“邱學華嘗試教學法報告會”。參會者除澳門大學教育學院學生外,大部分是來自各中小學的老師。澳門教師課務很重,講座時間只安排在放學後5:30 到7:00,而且都是教師自願參加。結果會場擠得滿滿的,連教青局的幹部也來聽。學生能在嘗試中學習的教育理念,“先練後講,練在當堂”的具體做法,使大家眼前一亮,產生了濃厚的興趣。隔天的《澳門日報》報導了講座盛況。這下在澳門掀起了一股“嘗試”熱。

2000 年在山東濟南舉行全國第 10 屆嘗試教學學術年會,汪先生鼓動教青局分管中教、小教的兩位處長蒞臨參加。這次年會有近1600 人參加,分小學語文、小學數學以及中學三個分會場上示範課,盛況空前,反響強烈,教育局兩位處長親身感受到了嘗試教學法的魅力和生命力。返回澳門後向局長彙報,局長決定正式邀請我去澳門宣講嘗試教學法。

這次是澳門特區政府出面邀請,接待規格高,入住竹園飯店,江澤民主席去澳門視察住的飯店。先在竹園飯店會場,召集全澳所有中小學校長聽我報告。教育局蘇朝暉局長親自聽講,並在報告結束後正式宣佈在全澳中小學數學學科推廣嘗試教學法。第二天在體育館召集全澳中小學數學教師聽我報告,接著分中學和小學兩個分會場由我的兩位徒弟上示範課,再由我分別指導他們如何用嘗試教學法備課和上課,汪先生告訴我這次活動是澳門教育史上規模最大的一次活動。以後,我幾乎每年都去一次,做後續的教師培訓工作。

從上例生動地看到,汪先生通過不懈努力,把大陸的先進教學方法引入澳門,既提高了

澳門教師的教學能力，又使廣大澳門學生受益，顯示了他所起的橋樑作用。

為了促進大陸與澳門的交流，他採用“請進來”、“走出去”的辦法。“請進來”，有頂尖的數學教育家如張奠宙、史甯中、宋乃慶、張美伯、方運加等；更有大批的名師如吳正憲、華應龍、黃愛華、劉莉、林良富、唐彩斌、徐長青、李志軍、潘雪琪等。專家高屋建瓴的學術報告，名師精彩紛呈的高超的課堂教學藝術，無不使澳門教師大開眼界增長見識，有力地促進了教師的專業化成長，推動澳門數學教育改革。

汪甄南主編澳門第一套小學數學課本是他的又一大貢獻。

澳門在葡萄牙統治下長達400多年，統治者只想賺錢，不重視教育。賭場遍地，卻沒有自己編寫的課本，大都採用香港課本，因而汪先生萌發編寫澳門小學數學課本的想法。編寫一套課本是一項系統工程，並非易事，澳門缺乏這方面的人才。經我的建議，汪先生決定採用澳門與大陸合作編寫的模式，他到杭州找到張天孝先生。張天孝是浙江省特級教師、功勳教師，是《現代小學數學》課本的主要編寫者，是專門研究小學數學教材的專家。

張天孝先生為了全力支援澳門教育，同意合作，帶領他的團隊全面配合。經過雙方努力，終於編成了澳門有史以來第一套小學數學課本，改寫了澳門沒有自己編寫課本的歷史。張天孝團隊不但參與編寫課本，還親自到澳門協助培訓教師，作出了巨大的貢獻。

這套《新思維小學數學課本》是澳門和大陸合作的結晶，是澳門教育史上具有里程碑的大事，也是汪甄南一生中所做的最輝煌的傑作，汪甄南先生功不可沒。

澳門是東西方文化交匯處，是一個多元文化的社會。汪先生受的是大陸的教育，熟悉中國數學教育的經驗；他又接觸西方文化的精華，瞭解西方數學教育的理念，這樣形成了他的數學教育思想。新思維數學教育的核心，是既強調學好數學基礎知識，又重視發展學生數學思維能力。關鍵是找到這兩者的平衡點，他把這種教育理念，體現在《新思維小學數學課本》中。

從汪甄南先生的成長史中，我們可以清晰地找到一條主線，這就是汪先生是位愛國者，一生中都在架設一座橋樑，溝通澳門與大陸的交流。現在澳門教師對大陸有親切感、歸屬感、都認為自己是中國人，並為做一個中國人而自豪，這裡不能忘記汪甄南先生的一份功勞。希望汪先生繼續把這座橋樑變成一條康莊大道，把澳門和大陸緊密地連在一起。感謝汪甄南先生！

嘗試教學法的魅力在澳門綻放

—— 節錄於《汪甄南自傳》

數學會

【緣起】

1995 年,我隨原澳門大學教育學院陳院長去天津參加全國小學數學專業委員會會議,活動內容豐富,有講座、觀課、交流、參訪等。當天就結識了邱學華教授,他向我詳細介紹了“嘗試教學法” 的基本理論,具體操作方法以及在實施過程中的一些細節問題,給了我很大的震動。他的理念, 他的設想,他的做法都給了我極大的啟發。對於搞了多年數學教師培訓工作的我來說,一直為如何能有效解決大面積提高小朋友的數學成績而冥思苦想的時候,突然出現了這種“見效果, 易操作” 那麼好的教學方法,眞正是“踏破鐵鞋無覓處,得來全不費功夫” 。特別是在學院的安排下,我將投入小學數學的教學和研究工作,能參加這次活動,眞是機會難得,收穫不小。

【認識】

《中國教育報》記者張玉文發表的【邱學華與嘗試教學法】一文中介紹:“內蒙古阿拉善盟左旗塔爾嶺小學的學生,過去數學成績一直在30分左右徘徊。開展嘗試教學法實驗後,第一年平均成績超過了中心校,第二年由縣裡監考、教研室閱卷,平均成績 95 分,摘取了全縣第一名的桂冠,第三年又名列全盟榜首。盟教育部門領導好生納悶,問明原因後,立即在全盟推廣實驗。重慶的一所郊區小學,已經搞了四年“嘗試教學法” 實驗。放假前,數學老師把下學期新書發給學生時說:願意做題的同學可以試試。結果全班學生都做了,老師為難地說,新學期我還講什麼呀!

其實早在 20 世紀 80 年代,“嘗試教學法” 就已經不脛而走,受到廣大小學教師的歡迎。邱學華向我介紹說:“在他長期的教學實踐和研究中,感到小學數學教學,傳統的先講後練的方法,學生基本處於被動地位,束縛了學生的主動性與創造性,這種忽視能力和創造精神培養的注入式方法必須改變。能不能反其道而行之,來個先練後講,先學後教呢?他說在經過反復思考之後,決定先由教師提出問題,學生在已有舊知識的基礎上,自學教科書,互相討論,通過嘗試練習初步解決問題,然後由老師根據學生嘗試練習中的難點,有針對性進行講解。這些做法,看起來只是一個簡單的教學程式的顛倒,但其實這種改變,恰恰是教學過

程的根本性改變。”

對“嘗試教學法” 有了初步認識之後，最關鍵的問題，是具體操作。當時澳門尚未回歸祖國，學校老師工作繁忙，再加上四百餘年來葡萄牙在澳門的殖民地式教育，老師們都有一套自己的教學模式，要想他們改變“滿堂灌” 的教學習慣，重新起步學習全新的教學方法，眞是談何容易！

【推廣】

要想把“嘗試教學法” 引進澳門並加以推廣，並沒有想像中那麼簡單。在認眞分析與考慮之後。我先後徵求院領導和學員等各方面的意見，覺得這一創新專案，是可以把它做好。特別是，廣大學員對學習“嘗試教學法” 的熱情高漲，給了我極大的信心。信心從哪裡來？不只是學員的熱情，更主要的是“嘗試教學法操作簡單、易行，效果立竿見影。” 這正符合澳門的教學環境，便於澳門老師和學員們學習掌握。

所以，我引進和推廣的主要做法，先介紹“嘗試教學法” 的基本操作方法，然後再介紹“嘗試教學法” 的基本理論，從理論層面認識並掌握好“嘗試教學法” 的眞正精髓。

邱學華教授在澳門向老師們講解嘗試教學法

一　“嘗試教學法” 的具體做法：

第一步，準備練習。主要是使學生做好知識準備。因為新知識都是在舊知識基礎上面發展起來的，所以要做到以舊引新，教師備課時特別要注意新舊知識的連接點，為做好嘗試題打好基礎。

第二步，出示嘗試題。這一步是提出問題。問題是教學的基礎。所以設計嘗試題是應用嘗試教學法關鍵的一步。嘗試題的作用主要有三個方面：

（1）讓學生明確本堂課學習的內容和要求；

（2）激發學生自學教科書的興趣；

（3）通過嘗試題的練習，獲取學生自學教科書所回饋的資訊。

第三步，自學教科書。出示嘗試題並不是課堂的教學目的，而是引導學生自學課本的手段。在自學的基礎上，自己探索解決問題的方法。這是培養學生獨立獲取知識能力的重要一步。用嘗試題引導自學課本，這是嘗試教學法的一大特點。在這一步中，學生的主體作用得到充分發揮。它聯同教師的指導作用，教科書的示範作用有機結合。所以這一步不是簡單地讓學生自己看書，而是一個重要而複雜的教學過程。

第四步，嘗試練習。出示嘗試題是學生自學教科書的手段。嘗試練習，就是檢驗自學教科書的結果。這一步在嘗試教學法六步程式中起著承上啟下的作用。教師要根據學生所回饋的資訊，組織學生討論，然而進行重點講解。

第五步，學生討論。這能培養學生的語言表達能力，發展學生思維，加深對課本內容的

理解，同時也會暴露學習新知識過程中所存在的缺陷，為教師有針對性的講解提供重要資訊回饋。另外，**學生討論，同學之間容易溝通**，也更容易實施傳、幫、帶，使嘗試教學可以取得更完美的教學效果。

第六步，教師講解。教師進行有針對性的講解，是保證學生系統掌握知識中的重要一步，也可以說是嘗試教學法中，對學生在學習新知識過程中的一次有針對性的講評。

嘗試教學法以“先練後講”的教學模式，可以說顛覆了幾個世紀以來的澳門傳統的“先講後練”的教學模式。各校老師紛紛以新的教學方法去備課和設計教案，以小組形式安排學生的課堂坐位，目前已經普及全澳門的小學。**“小組討論”**已成為澳門小學數學課堂教學的一大亮點。這是“嘗試教學法”在澳門普及最具特色的標誌。

根據嘗試教學法的實質和先試後導、先練後講的基本特徵，在教學實踐中，可以形成以下程式。這一程式的操作模式，一般運用效果都比較理想。它的教學程式可分以下幾步進行：

準備練習 → 出示嘗試題 → 自學教材 → 嘗試練習

學生討論 → 教師講解 → 第二次嘗試 →

嘗試教學的魅力正在澳門綻放！聖保祿學校、嶺南中學、海星小學、慈幼學校、聖羅撒中學（中文部）、培正小學等等，從小學到中學，全面開始把“嘗試教學法”引入課堂，並廣泛地進行實驗和研究。老師們的感受是：這種新的教學方法，使人耳目一新，“嘗試教學法”也能適合澳門小朋友學習數學。

共同進行實驗試用的老師們的感受，可以歸納為以下幾個方面：

1. 運用“嘗試教學法”教數學，能極大的調動學生的學習積極性。一些“驚數（害怕數學）”的學生，在嘗試活動過程中，經過自己的努力和老師的指導，慢慢克服了“驚數”的心態，使學習趨於正常。這種幾個世紀都無法改變小朋友學習數學的現象，通過嘗試教學法的實施，取得了意想不到的突變。

2. 在嘗試教學法的應用過程中，老師們深感自己責任重大。因而也更好地發揮他們的指導作用，而不是放任學生盲目練習，從而加強老師的備課意識。

3. 充分發揮教科書的作用，使學生對教科書的使用，從作為只是在做功課時用來抄寫題目的來源，而主動轉化為對教科書進行自學。在小朋友熱衷於玩手機的年代，而能夠預習教科書，這種轉變實在難能可貴。澳門的小朋友有福了！澳門的老師有福了！

4. 在嘗試教學過程中，增強了師生之間的感情。學生敢於向老師發問，老師也能對不同程度的學生積極進行有針對性的指導。在這種情感互動的情況下，課堂氣氛活躍，師生溝通真誠。不知不覺之中，師生共同創設了一個數學學習的良好環境。嘗試教學功不可沒！

二　對“嘗試教學”基本理論的認知

嘗試教學法理論萌芽於嘗試教學法。嘗試教學法經過數十年的實踐、探索、研究、再實踐……廣大教師接受了這樣一個事實：“學生不僅能在嘗試中學習，而且能在嘗試中成

功。” 所以嘗試教學理論根植于豐富的教學實踐之中。它的理論精髓是 —— **學生能嘗試,嘗試能成功**。這是一種從具體的教學方法,經過無數次的實踐研究,走出了一條從萌芽到深化的合乎邏輯的發展軌跡,是一種理論聯繫實際的科學研究的成果。

嘗試教學理論有其鮮明的特徵,歸納成兩句話就是“先試後導”,“先練後講”。數百年來,澳門的傳統教學特徵是“先教後學”,“先講後練”。這是“滿堂灌” 的上課模式。先由老師滴水不漏地把什麼都講清楚了,然後多次詢問全班同學:“明白了嗎?” 之後部分學生回答:“明白了”(一般都由成績較好的同學響應),接著學生再做練習。在整堂課堂教學中,學生的一切活動都是跟著老師的指揮棒轉!所以嘗試教學理論與傳統教學完全不同。

先教後學 → 先試後導

先講後練 → 先練後講

兩種教學模式,表面看來只是前後順序不同,但這是教育思想的巨大變化,是傳統教學向現代教學的轉變。在課堂教學中,前者強調教師為主角,後者強調學生為主體。“先讓學生試一試” 是嘗試教學理論的基本精神。掌握了這種基本精神,就能靈活運用嘗試教學理論,等於掌握了課堂教學的“靈魂”!

如果我們再從“元認知” 理論來分析“嘗試教學理論”,就能夠更清楚“嘗試教學理論” 在課堂教學作用、知識傳遞過程以及學生學習能力形成所發揮的重大意義。

張梅玲教授在“嘗試教學理論中的元認知因素” 一文中說:元認知是一種對個人認知活動的認知。例如,‘學習如何學習’ 就是這種元認知。認知和元認知的區別,即如‘學習’ 同‘學習如何學習’ 一樣, …… 將元認知歸納為三個緯度的變數:個人變數、任務變數、策略變數,它適用於所有數學問題的解決。

邱學華創立的嘗試教學法,不是盲目的嘗試,而是有指導的嘗試。教師的主導作用在於創造以下三方面條件:

1. 利用舊知識去嘗試探索新知識;

2. 設計好嘗試題目, 充分發揮引導作用;

3. 教科書相關知識的示範和配合學生自學作用.

教師能夠成功創設這三個條件,就意味著對元認知因素中的三個變數都作了一定程度的重新組合,促使學習的主體一開始就置於積極的、活躍的探索狀態之中。這樣就使問題的解決成為學生自身的內在需要。這也就意味著教師的主導作用促使學生產生良好的接受新知識的心理環境(也可稱之為學習的內在環境)。

根據嘗試教學理論,在課堂教學中要體現以學生為主、以自學為主、以練習為主的原則。這三個為主的和諧結合就有利於創設“教” 與“學” 的完美結合。這不僅有助於更好地發揮課堂教學中教師、學生、教科書三者之間的整體性結構功能,而且也有利於學生自我意識的發展(張梅玲)。

在推廣“嘗試教學法” 過程中,我除了把“嘗試教學法” 納入大學課程之內,進行講授和研究之外,還把“嘗試教學法” 放入聖若瑟夜師範學校的小學數學教學法課程之內。由於當

時有資格獲政府認可的教師培訓機構只有澳門大學教育學院、華中師範大學和聖若瑟夜間部師範學校,而華中師範大學較多培訓的是文科教師,所以“嘗試教學法”課程的培訓從回歸之前開始,就已經涵蓋全澳門了。

隨著敎改的逐步深入,我還運用講座形式,在基層學校的校本培訓活動,進行推廣。一種是我擔任數學科顧問的學校,利用定期講座的形式,講解基本理論和實際操作方法。這種面對面的互動和介紹,老師們興趣更大。教師可以就在實施過程中遇到的問題隨時交流,及時改進。另一種是在組織全澳門教師活動中積極加以推廣。因為這是面對全澳門的在職老師, 所以效果更好。

不少老師事後紛紛對我說:“給學生用‘試’的方法,效果不錯,最起碼學生敢於去‘試’了,‘驚數’現象已經有很大改變”。還有的老師說:“小組討論的形式太好了,同學之間還可以互相幫助,成績已經有明顯進步,就是備課太花時間,工作太忙。”

澳門的敎改,要有澳門自己的敎改特色。我們在學習和應用“嘗試教學法”的過程中,也必須牢記:任何一種優秀的教學方法,都必須與我們澳門的教育實際相結合,把優秀教學法的優點發揮得最好,使我們的小朋友學得最好,為建設澳門,培養出更多、更好的優秀人才!

三　嘗試教學論文簡介:

除了在課堂教學和基層學校中推廣和實踐應用嘗試教學法上課之外,有的大學學員在做學士學位論文時, 都會選擇用嘗試教學課題, 來作為研究項目,下面是聖羅撒女子中學中文部胡月媚老師在澳門大學教育學院學士學位論文的摘要簡介。

研究課題

【嘗試教學法對小五學生在數學學習態度、探索能力、解決問題能力等方面的影響】

第一章 緒論

一個嶄新的 21 世紀時代已經來臨,人類的文明也開始向一個新的里程邁進。現今的社會是一個瞬息萬變的資訊社會,資訊發展勢必廣泛影響和支配人們的日常生活和工作。在數學教育層面上來說,隨著時代改變,也必將改變我們今後的學習模式,特別是在教學方法、教育技術、課程發展、教育效能等各個領域均將會發生巨大的變化(汪甄南,2003)。

第一節 研究背景及動機

本澳的教育由於長期受澳葡政府的教育政策影響,故教育發展出以私校為主的多元辦學特色。在不同的教學語言(中文、英文、葡文)環境下,雖然有以杜威的兒童為中心的教育思想,布魯納的認知教育理論以及皮亞傑的教育心理學等教育理論指引著澳門的教育發展(汪甄南,2003)。但是,在教學方法上,傳統形式的單向知識灌輸教學方法仍是澳門小學數學課堂教學的主流。研究者有感學生的學習負擔過重,對學習失去興趣和動機,大部分學生對上數學課都感到焦慮。

在 2006 年 4 月,研究者有幸為領隊帶領任教學校的幾位學生到香港參加「第二屆香港

小學創意解難比賽暨粵港澳交流邀請賽」。透過這次經驗使研究者對數學教學產生了很多新的體會,如教學方法、課堂教學表達方式、評量學生能力等。這與以往在教授學生數學時,不論是在黑板上做的計算演練,或是給予學生的課後家庭作業,均以完成運算問題為主,當學生的計算結果與標準答案相符時,便認為是教師的教學成效及學生學習成功的觀念大不相同。學生往往在做機械式的數學知識演練,根本未有領略學習數學的意義、目的,更不明白數學與日常生活中的關係。久而久之,學生把數學看成是學校內的一門學科,只要熟記方法及要點,就可以獲得高分,也代表學好了數學。他們這種對數學的學習看成盲目的知識記憶和工具意識,更是出現對數學學習失去興趣及動機的主因。

在是次香港數學比賽中,研究者發現學生因解決一些特定的數學問題而經歷的探究學習過程,會有新奇感及表現有興趣,而他們所表現出來的積極態度和熱誠,更使研究者深深感受到利用探究方式教學方法的好處。到底怎樣才能使學生學好數學、提高學生的學習興趣?相信這是所有數學教師所關注及期待獲得答案的問題。

研究者曾與同儕商討上述問題,我們一致認為以傳統形式的單向知識灌輸教學方法,學生只能被動的接受知識,缺乏對學習內容的思考及體驗,這樣又怎能提高學生對學習數學的興趣及能學好數學呢?故此為學生對學習數學的興趣及動機,雖然研究者所任教的學校內設有數學問題展板及成績展覽等,但得到的結果並不理想,一些數學成績較差的同學並沒有因此而有所改進。這說明額外的刺激對學生的學習影響力有限。歸根究底,學生學習數學主要來自於課堂,數學課堂是影響學生學習成效的重要因素。因此,研究者希望透過以探究形式的嘗試教學法對學生進行課堂教學,希望能提高學生對學習數學的態度及能力,從而使學生在學習得到成功感。

……

作者胡月媚老師，通過對文獻探討並用五章二十五節內容，對本課題作了詳細研究，論文詳述運用嘗試教學法對小五學生學習數學的影響，並運用文卷調查、考題測試、課後訪談等形式，對受試學生進行追綜研究。

在論文結語中說：本研究透過數學態度問卷，測試試題成績，以“量”的方式呈現受試者在數學學習態度、數學問題解決能力的變化，並以課堂錄影及課後訪談等相關檔，以“質”的方式，呈現數學探索能力的改變。

四　積極鼓勵老師在課堂教學比賽中運用“嘗試教學法”

澳門數學教育研究學會每年都會組織一次全澳門小學數學教師均可報名參加的新思維小學數學課堂教學比賽，並鼓勵老師們運用嘗試教學法上課。所以,無用置疑,每堂課的學生座位安排都選用小組形成，便於在上課過程中組織小朋友討論，而且學生們早已習慣于老師這種課堂模式。

下面展示澳門部分中小學課堂教學組織模式,基本上都按嘗試教學要求中的“小組討論”來安排，使課堂教學更能體現以學生為主體、生動活潑的上課氛圍。

澳門學校在使用嘗試教學法上課花絮如下

浸信中學李焕棉老師展示課

明愛學校林麗燕老師展示課

新華學校梁雪婷老師展示課

濠江中學附屬小學譚慧欣老師展示課

化地瑪圣母女子學校吳毅清老師展示課

氹仔坊眾學校呂杏妍老師展示課

濠江中學劉明藝老師的
展示課題“小數的性質”

慈幼小學梁艷華老師的
展示課題“小數的性質”

福建學校蕭鳳堯老師的展示課題“分數再認識”

培道中學劉勁峰老師主講
“三角形全等條件的進一步探究”

勞工子弟學校文智和老師主講
“勾股定理”

澳門學藝學院音樂學校蔡轉佳老師主講
“隨機事件和概率”

聖羅撒女子中學林佩霞老師主講
“弧長和扇形面積”

上述展示的圖片,我們可以清楚地看到,在澳門數學課堂教學中,老師們在組織教學環節中,都主動讓小朋友的座位排成小組形式。它改變了數百年來,只是單一的面對老師。這是嘗試教學法的要求,同學們還可以根據上課需要,隨時展開討論,讓這種“互教、互學、互助、互補”的學習氛圍充滿整個課堂。

除了上課形式改變之外,其實在推廣嘗試教學法過程中,眞正開始改變的是老師們的教學理念 —— 不僅僅把學生看成上課對象,還把學生視為教學主體。同時也改變了學生多年來形成的學習習慣 —— 上課不僅僅只聽老師講,還可以提問和討論。

澳門的學生,無論在數學校際比賽、各種國際數學比賽、*ARML*(全美高中數學國際邀請賽)以及國際 *PISA* 數學測試,都取得了可喜的成績。嘗試教學法的推廣發揮了巨大作用。這是多麼巨大的轉變!澳門回歸祖國,僅僅二十年,祖國的優秀數學教學法 —— 嘗試教學法的魅力,已經開始在澳門的數學教育領越中,綻放出越來越璀璨奪目的美麗之花。

教學教研教案

聖若瑟教區中學第六校　鄧海棠

無論是教研,抑或是教案,都是緊緊圍繞著教學來進行的。教案是教學的載體,教學是教案的實踐,兩者相輔相成,相互促進。

作為最主要的基礎學科之一,數學來源於生活,提煉於生活,完善於生活,必然會高於生活,而且最終也回歸於生活。

所以,在教學過程中,作為教師,也應該將教學內容傾向於生活,貼近於生活,讓學生感覺到數學在生活中有用,數學一直在身邊。

同時,數學不是脫離於其他自然科學和基礎學科而孤立發展,相反,數學的發展完善有賴於其他學科的發展而得到更進一步的完善。因而,跨學科性將會是今後數學的一個發展方向。有些學校已經嘗試把數學、電腦、物理、化學、生物打造成一個大型的 *STEM* 科目進行課程設置了。

教案仍然是教學授課過程中重要的一個環節,對上課的主題、中心、效能等待事項起到規劃和檢測的功能。下面就"隨機事件的概率" 構設撰寫的教案如下,以求拋磚引玉、得到專家學者的指點,進而得到完善、提升。

授課課題	3. 1 隨機事件的概率
授課課題	3. 1 隨機事件的概率
授課日期	2021. 3. 15
授課班級	高二文乙
授課教師	鄧海棠
授課時間	第 6 節,14:20 ~ 15:00
教學目標	1、體會確定性現象與隨機現象的含義,瞭解必然事件、不可能事件及隨機事件的意義。 2、瞭解隨機事件發生的不確定性及頻率的穩定性,進一步瞭解概率的意義以及概率與頻率的區別。 3、理解概率的統計定義,知道根據概率的統計定義計算概率的方法。 4、通過對概率的學習,結合隨機試驗的隨機性和規律性,使學生對對立統一的辨證關係有進一步的認識,讓學生瞭解偶然性寓於必然性之中的辯證思想。

教學重點	1、正確區分確定事件和隨機事件。 2、計算簡單事件概率的方法,主要是列舉法(包括列表法和畫樹狀圖法)。 3、利用頻率估計概率(試驗概率)。 4、對概率意義的正確理解和它在實際生活中的應用。
教學難點	1、正確區分確定事件和隨機事件。 2、會根據概率與事件發生的關係解決實際問題。 3、辯證理解頻率和概率的關係。 4、用概率知識理解現實生活中的具體問題。
教學關鍵	理解隨機事件的定義,概率的定義,體會隨機觀念和概率思想,理解概率的含義。
設計思想	通過設置問題情景、探究以及知識的遷移,側重於學生的“思”、“探”、“究” 的自主學習,促使學生動腦,激發學生興趣,爭取使學生有更多自主支配的時間。
學情分析	剛剛任教二文乙,就明顯感覺到這個班的學習風氣、主動性和數學基礎等各方面都比二文甲差了一個臺階,就連二文乙班內最有能力的麥同學等人都有明顯的頹廢思想。在數學學習中改變心態、構建自信、提高興趣、成了亟待解決的當務之急。
教學方法	用簡單的生活實例融入課節內容,結合實驗試驗,深入淺出、循序漸進的研習知識。

教 學 過 程

教學步驟	教學設計	設計意圖
1. 事件史話	“以銅為鑒,可以正衣冠,以人為鑒,可以知得失,以史為鑒,可以知興替。” 這段話出自唐太宗李世民對魏征病死事件的感言。 明君名臣,流芳百世。從中,你有什麼收穫?	文班的同學或多或少對歷史會有一些親近感,以“事件史話” 引入,可降低文班同學對數學缺乏自信的情結,調動學習情緒和積極性。 薰陶正面教育,珍愛生命,樹立理想、自強不息,實事求是,達致己立立人。
2. 關係類比	請舉例講出一個事件,一個事變。 請指出事件與事變的關繫。 事變:「泛指因人為外力(非天變地異之自然界變動) 造成社會或經濟運作動盪之一切重大事件,如戰爭、內亂、暴亂、金融風暴及重大傳染病」。	把事件與事變清楚區分,培養學生分類思想。 事變是人為外力的重大事件。 事變必然是事件,事件未必是事變,就如“等邊三角形必然是等腰三角形,而等腰三角形未必是等邊三角形。”
3. 事件類型	指出下列事件哪些是必然要發生的事件,哪些是隨機事件,哪些是不可能發生的事件? 1. 導體通電時,發熱;	通過各項常識作具體事例,讓學生體驗事件類型的同時,受到科學、數學學科以及本校的通識教育。 1. 科學常識;

	2. 拋一石塊，下落； 3. 開放日在數學科遊戲攤位（C409室）射擊一次，中靶； 4. 校長喬博士為20－21學年10月的“上好每一節課”優秀班級評比獲得者頒獎並合影； 5＊. 2000年是閏年； 2020年是閏年； 2100年是閏年； 6. 今年（2021年）是聖中90週年。	2. 科學常識； 3. 宣揚開放日學科活動； 4. 促進優秀班級評比活動； 5. 數學通識教育； 閏年分為普通閏年和世紀閏年。 普通閏年：能被4整除但不能被100整除的年份為普通閏年。 世紀閏年：能被400整除的為世紀閏年，如2000年是閏年，1900年不是閏年。 6. 校本通識教育。
4. 引出定義	基本概念： 1. 必然事件：在一定的條件下必然要發生的事件； 2. 不可能事件：在一定的條件下不可能發生的事件； 3. 隨機事件：在一定條件下，可能發生也可能不發生的事件； 其中，必然事件和不可能事件統稱為確定事件。 確定事件和隨機事件統稱為事件，一般用大寫字母A、B、C…… 表示。	1. 發生的可能性是100%； 2. 發生的可能性是0%； 3. 存在不確定性； 也可以把隨機事件劃稱為不確定事件。
5. 新知應用	請舉例說出必然事件，隨機事件，不可能事件。	學以致用，用以促學。練習應用，鞏固新知。
6. 創設情境	問題提出： 足球等等比賽活動中，往往採用拋硬幣的方法來決定誰先開球，這樣的方法對兩支球隊公平嗎？ 為什麼呢？ 能否用試驗的方法來驗證？	要探究隨機事件的概率，教科書中拋擲硬幣的試驗是一種最簡單的隨機試驗，投幣的結果只有兩個，投幣試驗是最常用的一個說明隨機現象的例子，既典型又方便，如果老師簡單直敘說要做拋擲硬幣試驗，提不起學生多大興趣，讓學生覺得被老師牽著走，而日常生活中運用投硬幣方式來解決實際問題的例子很多，所以可以從學生已有的生活經驗出發，引入自然，激發學生的興趣，引導學生用數學知識解決實際問題，讓學生大膽猜想結論，順勢引導學生來共同完成拋擲硬幣的試驗。

7. 動手試驗	第一步:分組試驗 將全班分10組,要求每組擲一枚硬幣20次,並記錄試驗數據。 分析試驗結果: 提問①:各小組正面朝上的頻率一樣嗎?是否為0.5? 提問②:如果把全班10組結果進行累計,正面朝上的頻率會有什麼規律? 第二步:模擬實驗(投幣) 利用擲硬幣模擬程式來進行模擬實驗,輸入次數,計算機很快地拋擲硬幣,得到「正面向上」的頻數和頻率。 提問:隨著試驗次數的增長,「正面向上」的頻率的變化趨勢有什麼規律?	通過提問①:引導學生認識到隨機事件的發生具有偶然性。 通過提問②:引導學生髮現在次數逐漸增大的情況下,頻率數值漸趨穩定。 擲硬幣模擬實驗可以增加試驗次數,方便操作,省時省力,直觀形象,問題的設置在於使學生通過多次模擬試驗發現規律或驗證規律,使學生認識到:儘管是隨機試驗,儘管每一件事件的發生具有偶然性,但隨著試驗次數的增加,「正面向上」的頻率曲線越來越平穩,即穩定於0.5。
8. 形成概念	一般地,在大量重複試驗中,如果事件A發生的頻率$\frac{m}{n}$會穩定在某個常數p附近,那麼這個常數p叫做事件A的<u>概率</u>,記作$P(A)=p$。其中m是事件A發生的頻數,n是試驗次數。	加強理解頻率和概率的區別。 頻率是概率的近似值,隨著試驗次數的增加,頻率會越來越接近概率。頻率本身是隨機的,在試驗前不能確定。 概率是一個確定的數,是客觀存在的,與每次試驗無關。
9. 深化認識	問題1:事件A發生的概率$P(A)$有取值範圍嗎?$0 \le P(A) \le 1$ 問題2:當A是必然事件時,$P(A)$是多少?$P(A)=1$ 當A是不可能事件時,$P(A)$是多少?$P(A)=0$ 問題3:頻率和概率有區別嗎?	通過上面三步實驗,學生已經看到,在大量重複試驗下,任意拋擲硬幣「正面向上」這個隨機事件發生的頻率逐漸穩定到的常數刻畫了隨機事件發生的可能性的大小,所以可以順理成章的形成概念;問題1和問題2的設置目的在於幫助學生認識,理解概率的概念;問題3的設置讓學生很好的區分開頻率與概率,幫助學生正確的理解概念,突破難點。
10. 變式訓練	(情境1): 甲:我知道擲硬幣時,「正面向上」的概率是0.5。 乙:噢,那我連擲硬幣10次,一定會有5次正面向上。	情境1強調概率是針對大量試驗而言的,大量試驗反映的規律並非在每次試驗中一定存在。

	(情境2): 甲:天氣預報說明天降水概率為 90%。 乙:我知道了,明天肯定會下雨,要不然就是天氣預報不準。	情境2突出概率從數量上刻畫了一個隨機事件發生的可能性大小。 這兩個情境使學生正確理解大量隨機試驗結果的規律性和每次試驗結果的隨機性。
11. 拓展提高	(情境3): 連擲硬幣2次, 1)恰有一次是正面向上的概率是? 2)至少有一次正面向上的概率是?	要注意清晰理解"恰有一次","至少一次",至多、不超過等等字眼包含的意義。介紹列舉法(包括列表法和畫樹狀圖法)解決基本概率問題。
12. 學能評估(即堂小測)	1.(每個小題15分)指出下列事件哪些是必然事件,哪些是隨機事件,哪些是不可能事件? 1)2021.3.15,第6節,黃副校蒞臨高二文乙班觀課; 2)當 x 是實數時,$x^2 \geq 0$; 3)拋擲一枚澳門元5圓硬幣,正面向上; 4)澳門大會堂2021年2月21日下午每場影片的觀看上座率都超過800%; 2.(每個小題20分)連擲硬幣2次, 1)恰有2次是正面向上的概率是? 2)至多有一次正面向上的概率是?	評估是提升學習效能的最有力的教育工具之一。由紐菲爾德基金(*The Nuffield Foundation*)資助進行研究的《暗箱內探——透過課堂評估提高學習水準》的研究結論是:有強而有力的證據顯示進展性評估工作能提升學習水準,卻沒有證據顯示增加測驗的數量就會增進學習效能;把評估看作為教學與學習的一部分,卻能提升學生學習表現。
13. 小結歸納	談談本節課收穫的學習心得。 結合具體實例,請您說說什麼是: 必然事件? 隨機事件? 不可能事件? 概率?	帶引學生從實際例子出發來深刻認識事件類別和概率的意義。學生先談,教師進行歸納總結。目的在於回顧概率的定義,在具體情境中瞭解概率的意義是本節內容的核心目標,通過本堂課的學習要讓學生逐步理解概率的內涵。
14. 課業鞏固	1. 拋擲一枚硬幣出現正面的概率為0.5,那麼連續兩次拋擲一枚質地均勻的硬幣,一定會一次正面向上,一次反面向上?這個觀點正確嗎?為什麼?	檢驗學生對本節課內容的理解和運用程度,並促使學生進一步鞏固和掌握所學內容,同時為下一節課的內容起到承上啟下的橋樑作用。佈置的課業內容,既有對基礎內容的內涵鞏固,也有對深化知識的外延提升。

	2. 如果某一彩票中獎的概率爲1/1000,那么買1000張彩票一定能中獎嗎?為什麼? 3. 某地貨品的標價精確到0.1元,而結算時則採用四捨五入的方法精確到元,你認為這樣做合理嗎?為什麼? 4. 連擲一枚硬幣3次, 1)恰有2次是正面向上的概率是? 2)至多有一次正面向上的概率是?	
15. 教後反思		反思環節,類似“二次備課”,構建思維模式,不斷完善設計,提升教學效能。

四校聯考攻略 —— 考綱 1 題析

聖若瑟教區中學第六校　鄧海棠

澳門"四校聯考"制度實行至今已經數年了,運作總算暢順。"四校聯考"並不是全民統考。統考是對基礎教育的全面評估,是完成高中畢業的標準;而"四校聯考"則為檢視學生是否有能力入讀本澳四所高等院校(澳門大學、澳門理工學院、旅遊學院、澳門科技大學)的評估;"四校聯考"聯合了四所高等院校入學考試其中四科(中文、葡文、英文及數學)的考試科目及考核內容,考生毋須報考全部四科。所須參加的聯考考試科目按報考高校的課程要求而定;而四科以外的考試科目,則由高校各自安排。"四校聯考"並不存在合格或不合格成績的標準。考生的考試成績只供高校進行甄選和錄取之用,考生的個人成績只會供其本人查閱,錄取的方式及標準仍依照現時的做法,由四所高校根據各自訂立的收生標準進行錄取。

2020 年澳門四高校聯合入學考試(數學科)考試大綱 1 考查的內容要求是"基本概念:實數系統;集合和子集的概念;集合的運算:并集、交集和補集。偉恩(*Venn*)圖。數學歸納法。"基於此,下面作出相應的考綱和考題的內容剖析。

(2017 年)數學正卷的選擇題 1. 設 $P = \{-2, -a, 3\}$,$Q = \{1, a^2 - a - 3, -5\}$。若 $P \cap Q = \{3\}$,則

A. $a = 2$　　*B.* $a = -2$　　*C.* $a = 3$　　*D.* $a = -2$ 或 $a = 3$　　*E.* 以上皆非

剖析:數學集合在數學上是一個基礎概念,在數學領域具有無可比擬的特殊重要性。本題考查的是集合的三個特性:確定性,互異性,無序性。把這三個特性學明白、加以靈活運用,是一個基本要求。2018 年的第 1 道選擇題就考查了集合間運算的交集內容,2019 年的第 1 道題考查了求集合的描述法表示解集。

解法 1:$\because P \cap Q = \{3\}$,由集合的確定性,得 $3 \in Q$,

$\because Q = \{1, a^2 - a - 3, -5\}$,由集合的互異性,得 $a^2 - a - 3 = 3$,

解得 $a = 2$,或 $a = 3$,

當 $a = 3$ 時,$P = \{-2, 1, 3\}$,$Q = \{1, 3, -5\}$,與 $P \cap Q = \{3\}$ 矛盾!

當 $a = -2$ 時,$P = \{-2, -4, 3\}$,$Q = \{1, 3, -5\}$,與 $P \cap Q = \{3\}$ 相符!

$\therefore a = -2$,選 *B*。

解法 2:賦值法

當 $a=2$ 時,$P\{-2,0,3\}$,$Q=\{1,-1,-5\}$,與 $P\cap Q=\{3\}$ 矛盾,A 不對!

當 $a=-2$ 時,$P\{-2,-4,3\}$ $Q=\{1,3,-5\}$,與 $P\cap Q=\{3\}$ 相符,B 對!

當 $a=3$ 時,$P=\{-2,1,3\}$,$Q=\{1,3,-5\}$,與 $P\cap Q=\{3\}$ 矛盾,C、D 不對!

$\therefore a=-2$,排除 E,選 B。

解法 3:排除法

$\because P\cap Q=\{3\}$,由集合的互異性,

得 $P=\{-2,a-2,3\}$ 中的 $a-2$ 不能等於 -2 和 3 以及 1 和 -5,

$\therefore a$ 不能等於 0 和 5 以及 3 和 -3,從中可以排除 C、D、E 選項,

又當 $a=2$ 時,$Q=\{1,-1,-5\}$,與 $P\cap Q=\{3\}$ 矛盾,A 不對!

$\therefore a=-2$,選 B。

(2017 年)數學正卷的解答題5. 用數學歸納法證明對於任一正整數 n,$3^{3n+1}-5^{n+2}$ 可被 22 整除。(8 分)

剖析:數學歸納法的考查,主要集中在等式(求和)的命題、不等式(求和)的命題以及多項式整除的命題。這裡考查了多項式整除的命題,只要嚴格按照數學歸納法證明的步驟,相信問題不大。2018 年則是考查了等式(求和)的命題,只要先通過對正整數 n 賦值兩次,得到方程,聯立求解方程組確定參數 a、b 的值之後,再嚴格按照數學歸納法證明的步驟進行驗證。2019 年則首次在選擇題之中出現,估計是出卷者一時的心血來潮。

證明:(1)當 $n=1$ 時,$3^{3+1}-5^{1+2}=-44$,可被 22 整除,命題成立。

(2)假設當 $n=k$(k 為任一正整數)時,命題成立,即 $3^{3k+1}-5^{k+2}$ 可被 22 整除,

則當 $n=k+1$ 時,

有 $3^{3(k+1)+1}-5^{(k+1)+2}=27\cdot 3^{3k+1}-5\cdot 5^{k+2}=27(3^{3k+1}-5^{k+2})+22\cdot 5^{k+2}$,

由於 $3^{3k+1}-5^{k+2}$ 和 22 都能被 22 整除,

所以 $27(3^{3k+1}-5^{k+2})$ 和 $22\cdot 5^{k+2}$ 也能被 22 整除,

故 $27(3^{3k+1}-5^{k+2})+22\cdot 5^{k+2}$ 即 $3^{3(k+1)+1}-5^{(k+1)+2}$ 能被 22 整除,

這說明當 $n=k+1$ 時,命題也成立。

根據(1)、(2)和數學歸納法原理,可知命題對所有正整數 n 都成立。

(2018 年)數學正卷的選擇題1. 設 $X=\{6^n-5n-1 \mid n\in\mathbb{Z}^+\}$ 和 $Y=\{25n-25 \mid n\in\mathbb{Z}^+\}$,則

A. $X\subset Y$ *B*. $Y\subset X$ *C*. $X=Y$ *D*. $X\cap Y=\emptyset$ *E*. 以上皆非

剖析:數學集合在數學上是一個基礎概念,在數學領域具有無可比擬的特殊重要性。本題考查的是集合之間的關係:(眞)包含(於),相等,交集。集合之間的關係是掌握集合內容的一個基本要求。2017 年的第 1 道選擇題就考查了集合的交集求參數的內容,2019 年的第 1 道題考查了求集合的描述法表示解集。子集的概念,並集、交集和補集,集合

的運算都是在“澳門四高校聯合入學考試(2017)數學科考試大綱”第 1 點“基本概念”所作的要求。

解法 1:賦值列表法

n	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$n=8$	$n=9$	…
6^n-5n-1	0	25	200	1275	7750					…
$25n-25$	0	25	50	75	100	125	150	175	200	…

從上表中可以看到集合 X 中有的元素,在集合 Y 中都會有;但是在 Y 中有的部分元素,如 50,75,等等,都不會出現在 X 中,故而 X 是 Y 的眞子集,$X\subset Y$,選 A。

解法 2:排除選擇法

$\because 0\in(X\cap Y)$,可以排除 D 選項;

$\because 50\notin X$ 且 $50\in Y$,可以排除 B、C、E 選項;選 A。

(2018 年)數學正卷的解答題5.(a)若等式 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k^2-1}=\frac{an}{bn+1}$ 對所有正整數 n 皆成立,其中 a 和 b 為常數,求 a 和 b 的值。(4 分)(b)用數學歸納法證明等式 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k^2-1}=\frac{an}{bn+1}$ 對所有正整數 n 皆成立,其中 a 和 b 為(a)部分確定的常數。(4 分)

剖析:數學歸納法的考查,主要集中在等式(求和)的命題、不等式(求和)的命題以及多項式整除的命題。這裡考查了等式(求和)的命題,只要先通過對正整數 n 賦值兩次,得到方程,聯立求解方程組確定參數 a、b 的值之後,再嚴格按照數學歸納法證明的步驟進行驗證,相信問題不大。2017 年則是考查了多項式整除的命題,必須嚴格按照數學歸納法證明的步驟進行驗證。2019 年則首次在選擇題之中出現,估計是出卷者一時的心血來潮。

解:(a)當 $n=1$ 時,有 $\frac{1}{4-1}=\frac{a}{b+1}$,得 $b+1=3a$, ①

當 $n=2$ 時,有 $\frac{1}{3}+\frac{1}{16-1}=\frac{2a}{2b+1}$,得 $2b+1=5a$, ②

聯立 ①② 解得 $a=1$ 及 $b=2$; 故 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k^2-1}=\frac{n}{2n+1}$;

證明:(b)(I)當 $n=1$ 時,左邊 $=\frac{1}{4-1}=\frac{1}{3}$,右邊 $=\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}$,左邊 = 右邊,命題成立。

(II)假設當 $n=h$ 時(h 為任意正整數)命題成立,即 $\sum_{k=1}^{h}\frac{1}{4k^2-1}=\frac{h}{2h+1}$,

則當 $n=h+1$ 時,

有 $\sum_{k=1}^{h+1}\frac{1}{4k^2-1}=\sum_{k=1}^{h}\frac{1}{4k^2-1}+\frac{1}{4(h+1)^2-1}=\frac{h}{2h+1}+\frac{1}{4(h+1)^2-1}$

$$= \frac{h}{2h+1} + \frac{1}{4h^2+8h+3} = \frac{h}{2h+1} + \frac{1}{(2h+1)(2h+3)}$$

$$= \frac{(2h+3)h+1}{(2h+1)(2h+3)} = \frac{(h+1)(2h+1)}{(2h+1)(2h+3)} = \frac{h+1}{2h+3}$$

$$= \frac{h+1}{2(h+1)+1},$$

這說明,則當 $n = h+1$ 時,命題也成立。

綜上,由(I)、(II)和數學歸納法原理,可知 $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{n}{2n+1}$ 對所有正整數 n 皆成立。

(2019 年)數學正卷的選擇題 1. 設集合 $A = \{x : x^2 - x - 6 < 0\}$,則 $A =$

A. $\{x : -2 < x < 3\}$　　*B.* $\{x : x > 3$ 或 $x < -2\}$

C. $\{x : -3 < x < 2\}$　　*D.* $\{x : x > 2$ 或 $x < -3\}$　　*E.* $\varnothing$

剖析: 數學集合在數學上是一個基礎概念,在數學領域具有無可比擬的特殊重要性。2017 年的第 1 道選擇題就考查了集合的交集求參數的內容,2018 年的第 1 道選擇題就考查了集合間運算的交集內容。這是在“澳門四高校聯合入學考試(2017)數學科考試大綱”第 1 點“基本概念”所作的要求。可見,集合部分是四校聯考的考查熱點和焦點所在。

解法 1: 解不等式法

根據 $x^2 - x - 6 < 0$,得 $(x-3)(x+2) < 0$,由標根序軸法得 $-2 < x < 3$,選 A。

解法 2: 排除選擇法

當 $x = 0$ 時,滿足不等式 $x^2 - x - 6 < 0$,可以排除 B, D, E;

當 $x = -2$ 時,不滿足不等式 $x^2 - x - 6 < 0$,可以排除 C;選 A。

(2019 年)數學正卷的選擇題 15. 設 $P(n)$ 為一道命題, 並對所有正整數 n, 有 $P(n) \Rightarrow P(n+1)$。若對正整數 m, $P(m)$ 成立,那麼 $P(n)$

A. 對所有正整數 n 成立　　*B.* 對所有 $n \geq m$ 都成立　　*C.* 對所有 $n < m$ 都成立

D. 對所有 $n \leq m$ 都成立　　*E.* 以上皆非

剖析: 數學歸納法在選擇題之中出現尚屬首次,想來是出卷者一時的心血來潮,因為這部分的知識考查基本上都是在大題出現,以解答或者證明的形式體現其思維過程。2017 年則是考查了多項式整除的命題,必須嚴格按照數學歸納法證明的步驟進行驗證。2018 年則是考查了等式(求和)的命題,只要先通過對正整數 n 賦值兩次,得到方程,聯立求解方程組確定參數 a、b 的值之後,再嚴格按照數學歸納法證明的步驟進行驗證。

解: 結合數學歸納法的定義和證明步驟可得答案:B。

對應上述內容,和考綱 1 的考查要求,提供下面的知識點歸納和題目(含題解)給各位

同行、教師參考,以供商榷和探討。

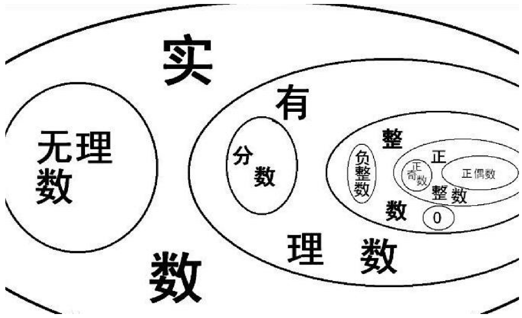
知・識・點

一. 實數系統:實數系統有兩種分類方法

1. 按定義進行分類

$$\text{實數}\begin{cases}\text{有理數}\begin{cases}\text{整數}\begin{cases}\text{正整數}\\ 0\\ \text{負整數}\end{cases}\\ \text{分數(有限小數或循環小數)}\begin{cases}\text{正分數}\\ \text{負分數}\end{cases}\end{cases}\\ \text{無理數(無限不循環小數)}\begin{cases}\text{正無理數}\\ \text{負無理數}\end{cases}\end{cases}$$

即



2. 按大小分類

$$\text{實數}\begin{cases}\text{正實數}\begin{cases}\text{正有理數}\\ \text{正無理數}\end{cases}\\ 0\\ \text{負實數}\begin{cases}\text{負有理數}\\ \text{負無理數}\end{cases}\end{cases}$$

二. 集合和子集的概念

1. 集合的概念:

(1) 集合:某些指定的對象集在一起就可以形成一個集合。

(2) 元素:集合中每個對象叫做這個集合的元素。

注一:數的集合簡稱**數集**。下面是一些常用的數集及其記法:

全體自然數(非負整數) 組成的集合簡稱**自然數集**,記作 N;

全體正整數組成的集合簡稱**正整數集**,記作 N^{+} 或 Z^{+};

全體整數組成的集合簡稱**整數集**,記作 Z;

全體有理數組成的集合簡稱**有理數集**,記作 Q;

全體實數組成的集合簡稱**實數集**,記作 R。

注二:**集合的特性:**

(1) 確定性:集合中的元素是確定的,任何一個對象只能在這集合裡或者不在這集合裡,不能模棱兩可。

(2) 互異性:集合中的元素沒有重複。

(3) 無序性:集合中的元素沒有一定的順序。

注三:集合的表示方法:

1. **列舉法:**把集合中的元素一一列舉出來,寫在大括弧內表示集合。

例如,由方程 $x^2-1=0$ 的所有解組成的集合,可以表示為 $\{-1,1\}$。

要留意:a 與 $\{a\}$ 不同:a 表示一個元素,$\{a\}$ 表示一個集合,該集合只有一個元素。

2. **描述法:**用確定的條件表示某些物件是否屬於這個集合,並把這個條件寫在大括弧內表示集合的方法,即格式:$\{x\in A \mid P(x)\}$,例如 $\{x \mid x-3>2\}$、$\{x \mid x$ 是直角三角形$\}$。

附注:(1) 在不致混淆的情況下,可以省去豎線及左邊部分。

如:{直角三角形};{大於 104 的實數}。

(2) 有些集合的公共屬性不明顯,難以概括,不便用描述法表示,只能用列舉法。

(3) 有些集合的元素不能無遺漏地一一列舉出來,常用描述法。

如:集合 $\{(x,y) \mid y=x^3+2\}$;集合{10000 以內的質數}。

2. 子集的概念:

(1) **子集:**對於兩個集合 A 與 B,如果集合 B 的任何一個元素都是集合 A 的元素,那麼集合 B 叫做集合 A 的子集,記作 $B\subseteq A$(或 $\supseteq B$),對於任一集合 A,規定 $\varnothing\subseteq A$。

(2) **真子集:**如果 B 是 A 的子集,並且 A 中至少有一個元素不屬於 B,那麼集合 B 叫做集合 A 的眞子集,記作 $B\subsetneqq A$。

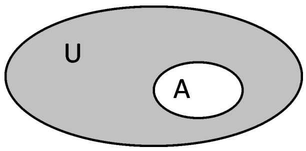
(3) **子集的個數:**含 n 個元素的集合 $\{a_1,a_2\cdots,a_n\}$ 的所有子集的個數是 2^n,所有眞子集的個數是 2^n-1,非空眞子集的個數為 2^n-2。

(4) **空集:** 不含任何元素的集合,叫做空集,用 $\varnothing$ 表示。例如集合 $\{x \mid x^2+2=0\}=\varnothing$。

三. 集合的運算

1. **全集:**如果某一個集合含有我們所要研究的各個集合的全部元素,這個集合就可以看作一個全集,全集通常用 U 表示。

2. **補集:**一般地,設 U 是一個集合,A 是 U 的一個子集(即 $A\subseteq U$),由 U 中所有不屬於 A 的元素組成的集合,叫做 U 中子集 A 的補集(或餘集),記作 C_UA,即 $C_UA=\{x \mid x\in U$,且 $x\notin A\}$。

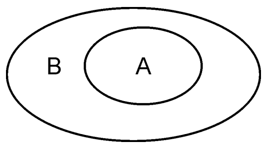


3. **交集:**由所有屬於 A 且屬於 B 的元素所組成的集合,叫做 A 與 B 的交集,記作 $A\cap B$。即 $\{x \mid x\in A$ 且 $x\in B\}$。

4. **並集:**由所有屬於集合 A 或屬於集合 B 的元素所組成的集合,叫做 A 與 B 的並集,記作:$A\cup B$。即 $\{x \mid x\in A$ 或 $x\in B\}$。

四. 偉恩(*Venn*)圖

為了直觀地表示集合間的關係,我們常用封閉曲線的內部表示集合,稱為 *Venn* 圖。右圖直觀地表示了集合 A 是集合 B 的子集。



五. 數學歸納法:是證明某些與自然數有關的數學命題的一種數學推理方法。

1. 原理:在於第一步證明起始值在運算式中是成立的,然後證明一個值到下一個值的證明過程是有效的。如果這兩步都被證明了,那麼任何一個值的證明都可以被包含在重複不斷進行的過程中。

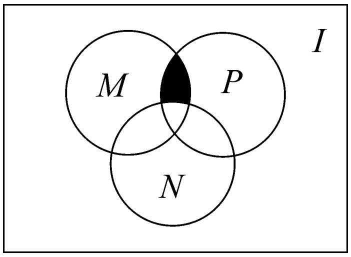
2. 步驟:

(1) 驗證當 $n = 1$ 時,命題成立.

(2) 假設當 $n = k$ 時(把式中 n 換成 k,寫出來) 命題成立,推證當 $n = k + 1$ 時(這步比較困難,化簡步驟往往繁瑣,考試時可以直接寫結果) 命題也成立。由(1)(2) 得,原命題對任意正整數 n 均成立。

習題・鞏固・評估

1. (a) 設集合 $A = \{(x,y) \mid x - 2y = 4\}$,集合 $B = \{(x,y) \mid 2x + y = 3\}$,求 $A \cap B$。
   (b) 設集合 $C = \{-3, x+1, x^2\}$,集合 $D = \{2x-1, x-3, x^2+1\}$,如果 $C \cap D = \{-3\}$,求 x 的數值。
2. (a) 設集合 $A\{x \mid -1 \le x \le 2\}$,集合 $B = \{x \mid x > 0\}$,求(i) 及 $(ii) A \cap B$。
   (b) 設集合 $A = \{(x,y) \mid 3x - 2y = 11\}$,集合 $B = \{(x,y) \mid 2x + 3y = 16\}$,及集合 $C = \{(x,y) \mid 4x + 6y = 5\}$,求 $A \cap B \cap C$。



3. 設 I 為全集,集合 M, N, P 都是其子集,則右圖中的陰影部分表示的集合為什麼?
4. 設 $A = \{x \mid x^2 + x - 6 = 0\}$,$B = \{x \mid mx + 1 = 0\}$,且 $A \cup B = A$,則 m 的取值集合是什麼?
5. 為抗擊疫情,900 人接受三種病毒 X、Y、Z 的抗體測試, 對測試呈陽性反應的人數如下:X:500 ; Y:400 ; Z:450 ; X和Y:189 ; Y和Z:180 ;X和Z:200 ; X和Y和Z:86.
   (1) 只對其中一種病毒呈陽性反應的人數;
   (2) 對三種病毒都呈陰性反應的人數。
   試用 *Venn* 圖分析說明。
6. 已知集合 M 滿足:$M \cap \{2, 6\} = \{2\}$,$M \cap \{8, 4\} = \{4\}$,$M \cap \{10, 12\} = \{10\}$,$M \subseteq \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$。求集合 M。
7. 設集合 $A = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 1, x, y \in Z\}$,則集合 A 的非空眞子集個數是多少?
8. 集合 $A \subseteq B, A \subseteq C$,若 $B = \{0,1,2,3,4\}$,$C = \{0,2,4,8\}$,則滿足條件的集合 A 的子集最多有多少個?
9. 滿足 $\{1,2\} \subsetneqq X \subseteq \{1,2,3,4,5\}$ 的集合 X 有多少個?

10. 用數學歸納法證明:對任意正整數 n,都有 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$。

11. 用數學歸納法證明:對任意正整數 n,都有 $10^n+48\times 4^n+5$ 能被 9 整除。

習題・鞏固・評估・解答

1. (a) $A\cap B=(2,-1)$;

   (b) 顯然 x^2+1 不能為 -3;

   當 $2x-1=-3$ 時,推出 $x=-1$;得 $C=\{-3,0,1\}$,$D=\{-3,-4,2\}$,成立;

   當 $x-3=-3$ 時,推出 $x=0$;$C=\{-3,1,0\}$,$D=\{-1,-3,1\}$,不成立;

   所以 $x=-1$。

2. (a) (i) $A\cup B=\{x\mid\geq -1\}$;

   (ii) ;$A\cap B=\{x\mid 0<x\leq 2\}$;

   (b) 由 $\begin{cases}3x-2y=11\\2x+3y=16\\4x+6y=5\end{cases}$ 無解,得 $A\cap B\cap C=\varnothing$。

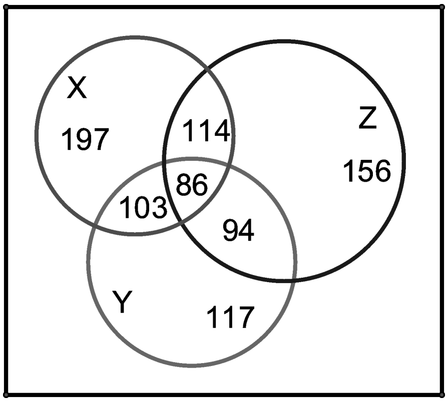
3. $M\cap(P\cap \complement_I N)$。

4. 據條件 $A\cup B=A$,得 $B\subseteq A$,而 $A=\{-3,2\}$,

   所以 B 只可能是集合 $\varnothing$,$\{-3\}$,$\{2\}$,

   所以,m 的取值集合是 $\left\{1,\frac{1}{3},-\frac{1}{2}\right\}$。

5. 由已知得 $X=500$,$Y=400$,$Z=450$,$X\cap Y=189$,$Y\cap Z=180$,$X\cap Z=200$,$X\cap Y\cap Z=86$,如右圖所示。



   (1) 只對其中一種病毒呈陽性反應的人數為 $197+117+156=470$;

   (2) 對三種病毒都呈陰性反應的人數為 $900-197-103-86-114-94-117-156=33$。

6. 顯然,M 中必然不含元素 6,8,12,且 M 中必然包含元素 2,4,10,

   又 $M\subseteq\{2,4,6,8,10,12\}$,故 $M=\{2,4,10\}$。

7. $A=\{(-1,0),(1,0),(0,0),(0,1),(0,-1)\}$,共有 5 個元素,故有 $2^5-2=30$ 個非空眞子集。

8. A 最多只能有 0,2,4,這三個元素,A 的子集最多有 $2^3=8$ 個。

9. 原式等價於 $\varnothing\subsetneqq X\subseteq\{3,4,5\}$,故集合 X 有 $2^3-1=7$ 個。

10. 證明:(1) 當 $n=1$ 時,左邊界 $1^2=1$,右邊 $=\frac{1}{6}\times1\times2\times3=1$,左邊 = 右邊,原式成立。

(2) 假設當 $n=k(k\in N^*$ 且 $k\geq1)$ 時原式成立,即有 $1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$;

則當 $n=k+1$ 時,有 $1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2$

$=(k+1)\left[\frac{1}{6}k(2k+1)+(k+1)\right]=(k+1)\times\frac{k(2k+1)+(6k+6)}{6}$

$=(k+1)\frac{2k^2+7k+6}{6}=(k+1)\times\frac{(2k+3)(k+2)}{6}$

$=\frac{1}{6}(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]$;

即當 $n=k+1$ 時,原式也成立;

綜合(1)、(2),根據數學歸納法原理,命題對所有正整數 n 都成立 。

另證:(1) 當 $n=1$ 時,左邊界 $1^2=1$,右邊 $=\frac{1}{6}\times1\times2\times3=1$,左邊 = 右邊,原式成立。

(2) 假設當 $n=k(k\in N^*$ 且 $k\geq1)$ 時原式成立,即有 $1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$;

則當 $n=k+1$ 時,

左邊 $=1^2+2^2+3^2+\cdots+K^2+(k+1)^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2$

$=(k+1)\left[\frac{1}{6}k(2k+1)+(k+1)\right]=(k+1)\times\frac{k(2k+1)+(6k+6)}{6}$

$=(k+1)\frac{2k^2+7k+6}{6}$,

右邊 $=\frac{1}{6}(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]=(k+1)\times\frac{(2k+3)(k+2)}{6}$

$=(k+1)\frac{2k^2+7k+6}{6}$

左邊 = 右邊,原式成立,即當 $n=k+1$ 時,原式也成立。

綜合(1)、(2),根據數學歸納法原理,命題對所有正整數 n 都成立。

11. 證:設 $f(n)=10^n+48\times4^n+5$,

(1) 當 $n=1$ 時,有 $f(1)=10+48\times4+5=207=9\times23$,能被 9 整除,

$\therefore$ 當 $n=1$ 時,命題成立。

(2) 假設當 $n=k(k\in N^*$ 且 $k\geq1)$ 時命題成立, 則存在整數 t ,

使 $f(k)=10^k+48\times4^k+5=9t$,

則當 $n=k+1$ 時,

$$f(k+1) = 10^{k+1} + 48 \times 4^{k+1} + 5$$
$$= 10 \times 10^{k} + 48 \times 4 \times 4^{k} + 5$$
$$= 10(10^{k} + 48 \times 4^{k} + 5) - 480 \times 4^{k} - 50 + 192 \times 4^{k} + 5$$
$$= 10(9t) - 288 \times 4^{k} - 45$$
$$= 9(10t - 32 \times 4^{k} - 5)$$ 能被 9 整除,

即當 $n = k + 1$ 時,命題也成立;

綜合(1)、(2),根據數學歸納法原理,命題對所有正整數 n 都成立 。

另證:(1) 當 $n = 1$ 時,$10 + 48 \times 4 + 5 = 207 = 23 \times 9$,能被 9 整除,命題成立。

(2) 假設當 $n = k(k \in N^{*}$ 且 $k \geq 1)$ 時命題成立,即 $10^{k} + 48 \times 4^{k} + 5$,能被 9 整除;

則當 $n = k + 1$ 時,有 $10^{K+1} + 48 \times 4^{k+1} + 5 = 10 \times 10^{k} + 48 \times 4 \times 4^{k} + 5$

$= 10 \times (10^{k} + 48 \times 4^{k} + 5) - 480 \times 4^{k} - 50 + 192 \times 4^{k} + 5$

$= 10 \times (10^{k} + 48 \times 4^{k} + 5) - 288 \times 4^{k} - 45$,

$\because 10^{k} + 48 \times 4^{k} + 5$ 和 288 及 45 都能被 9 整除,

$\therefore 10 \times (10^{k} + 48 \times 4^{k} + 5) - 288 \times 4^{k} - 45$ 也能被 9 整除,

即當 $n = k + 1$ 時,命題也成立;

綜合(1)、(2),根據數學歸納法原理,命題對所有正整數 n 都成立 。

再另證:(1) 當 $n = 1$ 時,$10 + 48 \times 4 + 5 = 207 = 23 \times 9$,能被 9 整除,命題成立。

(2) 假設當 $n = k(k \in N^{*}$ 且 $k \geq 1)$ 時命題成立,即 $10^{k} + 48 \times 4^{k} + 5$ 能被 9 整除;

則當 $n = k + 1$ 時,有 $(10^{k+1} + 48 \times 4^{k+1} + 5) - (10^{k} + 48 \times 4^{k} + 5)$

$= (10 \times 10 + 48 \times 4 \times 4^{k} + 5) - (10^{k} + 48 \times 4^{k} + 5)$

$= 9 \times 10^{k} + 144 \times 4^{k}$

$= 9 \times (10^{k} + 16 \times 4^{k})$ 能被 9 整除,

$\because 10^{k} + 48 \times 4^{k} + 5$ 和 $9 \times (10^{k} + 16 \times 4^{k})$ 都能被 9 整除,

$\therefore 10^{k+1} + 48 \times 4^{k+1} + 5$ 也能被 9 整除,

即當 $n = k + 1$ 時,命題也成立;

綜合(1)、(2),根據數學歸納法原理,命題對所有正整數 n 都成立 。

參考資料:

[1] *https://www.gaes.gov.mo/admission/unification* 澳門高等教育輔助辦公室“四校聯考”專頁。

[2]《澳門教育》2019 年第 2 期(總第 260 期),
四校聯考(2017 年) 數學正卷選擇題深度剖析、多元解答(上),鄧海棠。

[3]《澳門教育》2019 年第 3 期(總第 261 期),
四校聯考(2017 年) 數學正卷選擇題深度剖析、多元解答(下),鄧海棠。
[4]《澳門教育》2019 年第 4 期(總第 262 期),
四校聯考(2019 年) 數學正卷選擇題深度剖析、多元解答(上),鄧海棠。
[5]《澳門教育》2020 年第 1 期(總第 263 期),
四校聯考(2019 年) 數學正卷選擇題深度剖析、多元解答(下),鄧海棠。

註:原文已刊載於《澳門教育》2021 年第 2 期(總第 267 期) 的“學術探討” 欄目。

四校聯考攻略 —— 考綱 2 題析

聖若瑟教區中學第六校　鄧海棠

澳門大學、澳門理工學院、澳門旅遊學院及澳門科技大學四所高校（下稱“四校”）聯合推行“澳門四高校聯合入學考試（語言科及數學科）”（下稱“聯考”）。聯考是指四校聯合組織中文、葡文、英文和數學四個科目的入學考試，四科以外其他科目的考試或面試，則由四校自行安排及公佈。四校將根據各自課程之入學標準錄取學生。澳門“四校聯考” 升讀大學制度在 2017 年起正式實施。

澳門高等教育局於2017 年9 月分別與“葡萄牙大學校長委員會”（*CRUP*）和“葡萄牙理工高等院校協調委員會”（*CCISP*）簽署合作協議，根據協議，兩會轄下的葡萄牙公立大學和理工學院自協議簽署日起採用“四校聯考” 成績作為有意報讀兩會轄下成員院校澳門學生的甄選標準。有意持“四校聯考″ 成績報考相關葡萄牙院校的學生，只須按報考院校要求進行報名，並提交“四校聯考″ 科目成績及其他所需文件。

獲中國教育部批準，內地部分高校自 2018 年起以試點方式採用澳門“四校聯考” 成績錄取澳門學生。首批獲準高校共 10 所。各高校會根據“四校聯考” 成績自行訂定最低錄取分數線或面試等要求。

省 / 市	序號	高校	名額
上海	1	復旦大學	5
浙江	2	浙江大學	5
福建	3	廈門大學	10
	4	華僑大學	20
湖北	5	武漢大學	5
	6	華中科技大學	5
	7	華中師範大學	5
廣東	8	中山大學	5
	9	暨南大學	5
	10	華南師範大學	5

註：凡報考藝術類、體育類專業的考生，可能還需參加專業考試，詳情請瀏覽相關高校的招生簡章。

時至2020年，臺灣的高校升大招生入學考試不再另外進行，轉而也採用了"四校聯考"成績自行訂定最低錄取分數線或面試等要求。

2020年澳門四高校聯合入學考試（數學科）考試大綱2考查的內容要求是"百分數：百分數的意義及其在日常生活中的應用；盈利和虧蝕、折扣、單利息和複利息、增長及折舊。"基於上述情況，下面作出相應的考綱和考題的內容剖析。

2016年數學模擬卷的選擇題2.

某手錶的標價比成本高出40%。若該手錶以七折出售，求盈利或虧蝕百分率。

A. 賺28%　　*B*. 賺12%　　*C*. 賺10%　　*D*. 蝕2%　　*E*. 蝕10%

答案：*D*

剖析："百分數的意義及其在日常生活中的應用；盈利和虧損、折扣"是考試大綱中第2點的規定內容。由於與現實生活較為密切，也會作為實際應用來考查。2017年數學正卷的選擇題3就考查了在日常生活中的複利息問題。2019年更是結合了四校聯考數學科考試大綱的第3點"變分：比、比例；正變、反變、聯變及部分變"的要求作了綜合考查。2020年數學正卷的選擇題2則以人口增長率的形式來演繹這個知識點的內容。作為曾經澳大的入學招生必考題型，以後未必會每年都考查。

解法1：把成本看成是1，得所求的值為$(1+40\%)\times 70\%-1=-2\%$，即蝕2%，選*D*。

解法2：可以設成本為a，則有‖$\frac{a(1+40\%)\times 70\%-a}{a}=-0.02$，即蝕2%，選*D*。

解法3：也可以設成本價為a，出售價為b，

則有$a(1+40\%)=\frac{b}{70\%}$，解得$b=0.98a$，即蝕2%，選*D*。

2017年數學正卷的選擇題3.

把5000元存入銀行，每年計息一次，以複利計算，2年後的本利和為5408元，則年利率為

A. 3.4%　　*B*. 4%　　*C*. 4.2%　　*D*. 3.6%　　*E*. 4.5%

答案：*B*

剖析：2016年數學模擬卷的選擇題2通過手錶的標價與成本的關係，求盈利或虧蝕百分率。2019年更是結合了四校聯考數學科考試大綱的第3點"變分：比、比例；正變、反變、聯變及部分變"的要求作了綜合考查。2020年數學正卷的選擇題2則以人口增長率的形式來演繹這個知識點的內容。

利息的計算有三種類型，包括單利，複利和連續複利。多年來的澳門大學入學試基本上都是考查複利的計算為主。可以說，這是必考的知識要點。

(1) 單利息是指每期的利息都以最先存入的款項來計算，即是本金不變。

數量關係有：$A=P+I, I=PRT, A=P(1+RT)$。

其中：P代表本金，I代表利息，A代表本利和，R代表利率，T代表分期數。

(2) 將一筆錢存入銀行,若每次都提取利息,則以單利息計算;若不提取利息,便將本利和作下一期的本金,則以複利息計算。

用複利息計算的公式是:$A = P(1 + R)^n$, $I = A - P$。

其中:P 代表本金,I 代表利息,A 代表本利和, R 代表利率, n 代表時間。

(3) 如果年利率為 r,則 m 年後按連續複利計算本金為 P 元的本利和為 $P \cdot e^{rm}$。

其中 e 為自然對數的底,$e \approx 2.718281828...$

解法 1: 直接用複利計算的公式:$A = P(1 + R)^n$,設年利率為 R,

代入數值得:$5408 = 5000(1 + R)^2$,

$$(1 + R)^2 = \frac{5408}{5000},$$

$$(1 + R)^2 = \frac{676}{625},$$

$$1 + R = \frac{26}{25},$$

$$R = \frac{1}{25},$$

年利率為 4% ,選 B。

解法 2: 直接用選項中的年利率進行計算比對結果就行。

若 $R = 3.4\%$,則 $5000(1 + 3.4\%)^2 = 5345.78 \neq 5408$,$A$ 不對!

若 $R = 4\%$,則 $5000(1 + 4\%)^2 = 5408$,B 正確!

2019 **年數學正卷的選擇題** 2.

若 x 隨 $\sqrt{m}$ 正變且隨 n^2 反變,當 m 增加 44% 和減少 20% ,增加的百分比是多少?

$A.$ 64　　$B.$ 92.5　　$C.$ 84　　$D.$ 68.4　　$E.$ 87.5

答案: E

剖析: 這是結合了四校聯考數學科考試大綱的第 3 點"變分:比、比例;正變、反變、聯變及部分變" 的要求。2016 年的模擬考試題正卷的第 4 道題考查了這個知識點。2017 年數學正卷的選擇題 3 就考查了在日常生活中的複利息問題。2020 年數學正卷的選擇題 2 則以人口增長率的形式來演繹這個知識點的內容。

解: 設 $x = k\frac{\sqrt{m}}{n^2}$,則 $x' = k\frac{\sqrt{(1 + 44\%)m}}{[(1 - 20\%)n]^2} = k\frac{1.2\sqrt{m}}{(0.8n)^2} = k\frac{\frac{6}{5}}{\left(\frac{4}{5}\right)^2 n^2} = \frac{15}{8}k\frac{\sqrt{m}}{n^2} = \frac{15}{8}x$,

所以增加的百分比是 $\frac{\frac{15}{8}x - x}{x} \times 100\% = 87.5\%$。

2020 年數學正卷的選擇題 2.

一個城市於2017 年終的人口為200 萬,若此城市的人口增長率為每年2% ,於2020 年終的人口應約為(選擇最接近的答案):

$A.$ 2,100,000　　$B.$ 2,080,000　　$C.$ 2,140,000　　$D.$ 2,060,000　　$E.$ 2,120,000

答案:E

剖析:2016 年的模擬考試題正卷的第4 道題考查了這個知識點。2017 年數學正卷的選擇題3 就考查了在日常生活中的複利息問題。2019 年更是結合了四校聯考數學科考試大綱的第 3 點"變分:比、比例;正變、反變、聯變及部分變" 的要求作了綜合考查。

解:由於每年的新增長量會成為下一年的基數,這是一個複利問題,根據已知條件得所求為 $200(1+2\%)^3 = 212.2416$ 萬,約為 2,120,000,選 E。

知・識・點

一. 百分数

1. 百分增加:

(a) 增值 = 新值 − 原值;　　(b) 百分增加 $= \dfrac{增值}{原值} \times 100\%$;

(c) 新值 = 原值 × (1 + 百分增加);

設原值為 a_0, 增加後的值為 a, 增加的百分率(增長率) 為 r,

則 $r = \dfrac{a-a_0}{a_0} \times 100\%$ 或 $r = \dfrac{a-a_0}{a_0}$ (r 取小數) $\Rightarrow a = a_0(1+r)$;

2. 百分減少:

(a) 減值 = 原值 − 新值;　　(b) 百分減少 $= \dfrac{減值}{原值} \times 100\%$;

(c) 新值 = 原值 × (1 − 百分減少) ;

設原值為 a_0, 減少後的值為 a, 減少的百分率為,

則 $r = \dfrac{a_0-a}{a_0} \times 100\%$ 或 $r = \dfrac{a_0-a}{a_0}$ (r 取小數) $\Rightarrow a = a_0(1+r)$;

二. 盈利和虧蝕、折扣

1. 盈利:

(a) 盈利 = 售價 − 成本　　(b) 盈利百分率 $= \dfrac{盈利}{成本} \times 100\%$

(c) 盈利 = 成本 × 盈利百分率　　(d) 售價 = 成本 × (1 + 盈利百分率)

2. 虧蝕:

(a) 虧蝕 = 成本 − 售價　　(b) 虧蝕百分率 $= \dfrac{虧蝕}{成本} \times 100\%$

(c) 虧蝕 = 成本 × 虧蝕百分率　　(d) 售價 = 成本 × (1 − 虧蝕百分率)

3. 折扣：

(a) 折扣 = 標價 − 售價　　　　(b) 折扣百分率 = $\dfrac{折扣}{標價}\times 100\%$

(c) 折扣 = 標價 × 折扣百分率　　(d) 售價 = 標價 ×(1 − 折扣百分率)

三. 利息計算

1. 單利息：是指每期的利息都以最先存入的款項來計算,即是本金不變。

那麼,$A = P + I$;　　$I = PRT$;　　$A = P(1 + RT)$;

其中　P 代表本金,I 代表利息,A 代表本利和,R 代表利率,T 代表時間。

2. 複利息：

將一筆錢存入銀行,若每次都提取利息,則以單利息計算;若不提取利息,便將本利和作下一期的本金,則以複利息計算。

用複利息計算,公式如下:$A = P(1 + R)^n$;　$I = A - P$;

其中　A 代表本利和,P 代表本金,R 代表利率,n 代表時間,I 代表利息。

設本金為 P, 年利率為 r,年後的本利和為 a_n,

(1) 若按每年複利一次計算,則 $a_n = P(1 + r)^n$;

(2) 若按每季複利一次計算,則 $a_n = P(1 + \dfrac{r}{4})^{4n}$;

(3) 若按每月複利一次計算,則 $a_n = P(1 + \dfrac{r}{12})^1 2n$。

3. 連續複利息：

如果年利率為 r,則 m 年後按連續複利計算本金為 P 元的本利和為 $P \cdot e^{rm}$,

其中 e 為自然對數的底,$e \approx 2.718281828...$

四. 增長和折舊：

1. 若 P 值每一期以固定的百分數 R 增長,那麼,n 期後,新值 $= P(1 + R)^n$,

其中　$(1 + R)$ 稱為增長因子,　R 稱為增長率。

2. 若 P 值每一期以固定的百分數 R 減少,那麼,n 期後,新值 $= P(1 - R)^n$,

其中　$(1 - R)$ 稱為折舊因子,　R 稱為折舊率。

設原值為 a_0,每期折舊率為 r,n 期後的值為 a_n,

則 $a_1 = a_0(1 - r)$,$a_2 = a_0(1 - r)^2$,$a_n = a_0(1 - r)^n$。

　對應上述內容,和四校聯考考綱 2 的考查要求,提供下面的知識點歸納和題目(含題解)給各位同行、教師參考,以供商榷和探討。

習題・鞏固・評估

1. 兩種糖果 A、B 按重量比例 4：1 混合。A 每公斤成本 \$150,而 B 每公斤成本 \$100。若 A 的成本下降 20 %, 而 B 的成本上漲 10 %,每公斤什錦糖果的成本將會如何變化?

2. 一個三角形三邊長度的比例為 5 : 6 : 7 。若所有邊的長度都加倍,那麼三角形的面積增加的百分率為多少?
3. 若圓柱的底面直徑增加 50 % ,而體積保持不變,求圓柱的高改變的百分率。
4. 某商品的價格被提升 25 % 後,如欲恢復原價, 那麼應降價百分之幾?
5. 一臺冰箱成本為 5000 元,某零售商想以 20 % 的折價出售後仍有 30 % 的利潤。求該冰箱的市場價格。
6. 某商品的標價比成本價高 20 % ,如以現金購買該商品,可獲 5 % 折扣。
   (a) 若以現金交易,求此商品的利潤百分比。
   (b) 若以現金交易,此商品每件折後價為 114 元,求此商品每件的成本價 。
7. 一筆本金存入銀行,定期四年,年利息為 10 % 。設四年後以復利計算的總金額與以單利計算的總金額之差為 641 元,求該本金。
8. 某銀行提供貸款,利率為年息 12 % ,每月利息按複利計算。彼得向該銀行貸款 \$100,000,並同意每個月底還款 \$5,000。求兩期還款後他尚欠銀行的款額。
9. 瑪莉想將一萬元存入銀行 , 她有以下選擇 :
   銀行 A: 年利率 5% ,復合利息按每季計算 。
   銀行 B: 年利率 4.9 % ,復合利息按年連續計算 。
   (a) 若她將該筆款項存入銀行,為期三年,請分別計算存入這兩間銀行各可得多少利息。
   (b) 瑪莉若要得到本利和共二萬元,請分別計算存入這兩間銀行各需存放多久。
10. 某國每年的出口總值從 2015 年的 100 億美元增加到 2 年後 2017 年的 144 億美元。如果在這段期間每年出口總值增長率相同,問每年增長率為百分之幾? 又若果每年增長率維持不變,該國在 2020 年的出口總值是多少?
11. 一輛簇新的汽車價值 25 萬元, 購買後第一年的折舊率為 20 % ,從第二年開始每年的折舊率為 10 % 。問 :
    (a) 購買一年後這輛汽車價值若干?
    (b) 第三年年底該輛汽車價值若干?

習題・鞏固・評估・解答

1. **解:** 原來每公斤什錦糖果的成本 $= \dfrac{4}{5} \cdot 150 + \dfrac{1}{5} \cdot 100 = 140$,

   之後 A 的成本 $= 150 \cdot (1 - 20\%) = 120$,

   B 的成本 $= 100 \cdot (1 + 10\%) = 120$,

   後來每公斤什錦糖果的成本 $= \dfrac{4}{5} \cdot 120 + \dfrac{1}{5} \cdot 110 = 118$,

   由 $\dfrac{118 - 140}{140} \times 100\% = -0.157 \times 100\% = -15.7\%$,

所以成本下降了 15.7% 。

2. **解**:三角形三邊長度同時都加倍,

則得到一個與原三角形相似的新三角形,

面積比等於邊長比的平方,

所以新三角形的面積為原三角形的 4 倍,

即增加了 3 倍,百分率為 300% 。

3. **解**:設圓柱原來的高為 h,後來的高為 h',

得 $\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 h = \pi\left(\frac{1.5d}{2}\right)^2 h'$,得 $h' = \frac{1}{2.25}h \approx 0.44h$,

故圓柱的高改變的百分率為 $(h' - h) \div h = -0.56 = -56\%$,

即圓柱的高下降了 56% 。

4. **解**:原價格為 X,升價後為 $X(1 + 25\%)$,應降價 $Y\%$,

$X = X(1 + 25\%)(1 - Y\%)$,

$1 = 1.25(1 - Y\%)$,

$Y\% = 20\%$;

故應降價 20% 。

5. **解**:設該冰箱的市場價格為 x 元,得

$(1 - 20\%)x = 5000(1 + 30\%)$;

解得 $x = 8125$ 元。

6. **解**:(a) 設成本價為 P 元,則標價為 $P(1 + 20\%)$,現金折扣價為 $P(1 + 20\%)(1 - 5\%)$,

此商品的利潤百分比為$\frac{P(1 + 20\%)(1 - 5\%) - P}{P} \times 100\% = 14\%$ 。

(b) $P(1 + 20\%)(1 - 5\%) = 114$,解得 $P = 100$ 元。

7. **解**:設該本金為 P,

複利計算的總金額為 $P(1 + r)^n$ 元,

單利計算的總金額為 $P(1 + nr)$ 元,

得 $P(1 + 10\%)^4 - P(1 + 4 \times 10\%) = 641$,

解得 $P = 10000$ 元。

8. **解**:利率為年息 12 %,得月息為 1%,

一個月後尚欠 $100000 \times (1 + 1\%) - 5000 = 96000$ 元,

兩個月後尚欠 $96000 \times (1 + 1\%) - 5000 = 91960$ 元。

9. **解**:(a) 銀行 A 可得利息:$\left[1 \times \left(1 + \frac{5\%}{4}\right)^{12} - 1\right] = 1607.55$ 元,

銀行 B 可得利息:$[1 \times e^{3\times4.9\%} - 1] = 1583.54$ 元。

(b) 存入銀行 A 需 x 年,得 $1 \times \left(1 + \frac{5\%}{4}\right)^{4x} = 2$,解得 $x = 14$ 年,

存入銀行 B 需 y 年,得 $1 \times e^{y\times 4.9\%} = 2$,解得 $y = 14.15$ 年。

10. **解**:設每年增長率為 $r\%$,出口總值單位為億美元,

則 $100(1 + r\%)^2 = 144$,解得 $r\% = 20\%$,

從而在 2020 年的出口總值是 $144(1 + 20\%)^3 = 248.832$(億美元)。

11. **解**:(a) $25(1 - 20\%) = 20$ 萬元;

(b) $25(1 - 20\%)(1 - 10\%)^2 = 16.2$ 萬元。

上述習題,給各位與四校聯考相關的專家、學者作參考,供商榷和探討,乞能拋磚引玉,得到指點提升,冀能為澳門中學的升大教學,略盡綿薄之力。

參考資料:

[1] *https://www.gaes.gov.mo/admission/unification* 澳門高等教育輔助辦公室"四校聯考"專頁。

[2]《澳門教育》2019 年第 2 期(總第 260 期),
四校聯考(2017 年)數學正卷選擇題深度剖析、多元解答(上),鄧海棠。

[3]《澳門教育》2019 年第 3 期(總第 261 期),
四校聯考(2017 年)數學正卷選擇題深度剖析、多元解答(下),鄧海棠。

[4]《澳門教育》2019 年第 4 期(總第 262 期),
四校聯考(2019 年)數學正卷選擇題深度剖析、多元解答(上),鄧海棠。

[5]《澳門教育》2020 年第 1 期(總第 263 期),
四校聯考(2019 年)數學正卷選擇題深度剖析、多元解答(下),鄧海棠。

正餘弦函數連乘問題的探究

勞校中學　高一學生 鄭傲軒　　指導老師　魏均僑

正餘弦函數連乘是三角函數中最常見的經典問題，解題方法靈活多樣，部分過程推導更是不容易. 盡管大部分問題在數學課堂中較少出現，但連乘問題的對稱性與優美性很值得獨立成一個專題進行研究. 現在我們來探討這些問題，以下分為四個部分.

一. 倍角類型的連乘.

（1）求 $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}$ 的值.

解： 原式 $= \cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7}$

$$= \frac{2\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7}}{2\sin\frac{2\pi}{7}} = \frac{2\sin\frac{4\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7}}{4\sin\frac{2\pi}{7}}$$

$$= \frac{2\sin\frac{8\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7}}{8\sin\frac{2\pi}{7}} = \frac{\sin\frac{16\pi}{7}}{8\sin\frac{2\pi}{7}} = \frac{1}{8}.$$

對於形如（ * ）的連乘式子，能否用同樣方法進行化簡呢？連乘式子與計算結果間是否存在某種規律？現在考察以下式子：

（2）$\cos\frac{2\pi}{3}\cos\frac{4\pi}{3}$；　（3）$\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}\cos\frac{16\pi}{15}$.

解：（2）原式 $= \left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$

（3）原式 $= \dfrac{2\sin\frac{2\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}\cos\frac{16\pi}{15}}{2\sin\frac{2\pi}{15}} = \cdots = \dfrac{\sin\frac{32\pi}{15}}{16\sin\frac{2\pi}{15}}$

$$= \frac{1}{16}.$$

觀察以上式子，我們猜想：

(4) $\cos\dfrac{2\pi}{2^n-1}\cos\dfrac{2^2\pi}{2^n-1}\cos\dfrac{2^3\pi}{2^n-1}\cdots\cos\dfrac{2^n\pi}{2^n-1}=\dfrac{1}{2^n}.\ (n\geq 2, n\in\mathbb{N}^*)$

證明如下:左式 $=\dfrac{2\sin\dfrac{2\pi}{2n-1}\cos\dfrac{2\pi}{2^n-1}\cos\dfrac{2^2\pi}{2^n-1}\cdots\cos\dfrac{2^n\pi}{2^n-1}}{2\sin\dfrac{2\pi}{2^n-1}}$

$$=\cdots=\frac{\sin\dfrac{2^{n+1}\pi}{2^n-1}}{2^n\sin\dfrac{2\pi}{2^n-1}}=\frac{\sin\left(\dfrac{2\pi}{2^n-1}+2\pi\right)}{2^n\sin\dfrac{2\pi}{2^n-1}}=\frac{1}{2^n}.$$

$\because$ 分母 $\sin\dfrac{2\pi}{2^n-1}\neq 0$ $\quad\therefore$ 等式成立.

二. $\dfrac{k\pi}{2n+1}$ 類型的連乘.

(5) 化簡 $\prod_{k=1}^{n}\sin\dfrac{k\pi}{2n+1}$, $\prod_{k=1}^{n}\cos\dfrac{k\pi}{2n+1}$.

解: 設 $A=\sin\dfrac{\pi}{2n+1}\sin\dfrac{2\pi}{2n+1}\sin\dfrac{3\pi}{2n+1}\cdots\sin\dfrac{n\pi}{2n+1}$,

$B=\cos\dfrac{\pi}{2n+1}\cos\dfrac{2\pi}{2n+1}\cos\dfrac{3\pi}{2n+1}\cdots\cos\dfrac{n\pi}{2n+1}$,

先計算 B,我們利用上一節的技巧進行計算,可得

$$AB=\frac{1}{2^n}\sin\frac{2\pi}{2n+1}\sin\frac{4\pi}{2n+1}\sin\frac{6\pi}{2n+1}\cdots\sin\frac{2n\pi}{2n+1}.$$

注意到 $\sin\dfrac{2(n-k)\pi}{2n+1}=\sin\left(\pi-\dfrac{2(n-k)\pi}{2n+1}\right)$

$$=\sin\frac{(2k+1)\pi}{2n+1}\left(k=0,1,2,\cdots,\left[\frac{n-1}{2}\right]\right),$$

即 $AB=\dfrac{1}{2^n}\sin\dfrac{\pi}{2n+1}\sin\dfrac{2\pi}{2n+1}\sin\dfrac{3\pi}{2n+1}\cdots\sin\dfrac{n\pi}{2n+1}=\dfrac{1}{2^n}A.$

$\therefore B=\dfrac{1}{2^n}$, 即 $\prod_{k=1}^{n}\cos\dfrac{k\pi}{2n+1}=\dfrac{1}{2^n}.$

再計算 A,可用複數方程與三角函數的關係進行求解.

考慮到方程 $z^{2n+1}=1$ 的根分別為 $1,\cos\dfrac{2k\pi}{2n+1}\pm i\sin\dfrac{2k\pi}{2n+1}(k=1,2,\cdots,n)$.

記 $\omega_k=\cos\dfrac{2k\pi}{2n+1}+i\sin\dfrac{2k\pi}{2n+1}$, 則 $\overline{\omega_k}=\cos\dfrac{2k\pi}{2n+1}+i\sin\dfrac{2k\pi}{2n+1}$ 有

$$z^{2n+1}-1=(z-1)\prod_{k=1}^{n}(z-\omega_k)(z-\overline{\omega_k})$$

$$\frac{z^{2n+1}-1}{z-1}=\prod_{k=1}^{n}\left[z^2-(\omega_k+\overline{\omega_k})z+1\right]$$

$$z^{2n}+z^{2n-1}+\cdots+z+1=\prod_{k=1}^{n}\left(z^2-2z\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+1\right).$$

令 $z=1$,得

$$2n+1=2^n\prod_{k=1}^{n}\left(1-\cos\frac{2k\pi}{2n+1}\right)$$

$$2n+1=2^n\prod_{k=1}^{n}\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}.$$

因為 $\sin\frac{k\pi}{2n+1}>0(k=1,2,3,\cdots,n)$,兩邊開方,得

$$\sqrt{2n+1}=2^n\prod_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{2n+1}$$

$$\prod_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{2n+1}=\frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}.$$

$$\therefore \prod_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{2n+1}=\frac{\sqrt{2n+1}}{2^n},\ \prod_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{2n+1}=\frac{1}{2^n}.$$

三. $\frac{k\pi}{2n}$ 類型的連乘.

(6) 化簡 $\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n},\ \prod_{k=1}^{n-1}\cos\frac{k\pi}{2n}$.

解: 參考上一節的解法,方程 $z^{2n}=1$ 的根為 ±1,

$\cos\frac{k\pi}{n}\pm i\sin\frac{k\pi}{n}(k=1,2,3,\cdots,n-1)$. 記 $\omega_k=\cos\frac{k\pi}{n}+i\sin\frac{k\pi}{n}$,

則 $\overline{\omega_k}=\cos\frac{k\pi}{n}-i\sin\frac{k\pi}{n}$,有

$$z^{2n}-1=(z-1)(z+1)\prod_{k=1}^{n-1}(z-\omega_k)(z-\overline{\omega_k})$$

$$\frac{z^{2n}-1}{z^2-1}=\prod_{k=1}^{n-1}\left(z^2-2z\cos\frac{k\pi}{n}+1\right)\qquad (**)$$

$$(z^2)^{n-1}+(z^2)^{n-2}+\cdots+1=\prod_{k=1}^{n-1}\left(z^2-2z\cos\frac{k\pi}{n}+1\right).$$

令 $z=1$,得

$$n=2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\cos\frac{k\pi}{n}\right)$$

$$n=2^{2n-1}\prod_{k=1}^{n-1}2\sin^2\frac{k\pi}{2n}.$$

因為 $\sin\frac{k\pi}{2n}>0(k=1,2,3,\cdots,n)$,兩邊開方,得

$$\sqrt{n}=2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n}$$

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

又因為 $\cos \frac{k\pi}{2n} = \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{k\pi}{2n}) = \sin \frac{(n-k)\pi}{2n}(k = 1,2,\cdots,n-1)$,可得

$$\prod_{k=1}^{n-1} \cos \frac{k\pi}{2n} = \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

四. $\frac{k\pi}{n}$ 類型的連乘.

(7) 化簡$\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n}$, $\prod_{k=1}^{n-1} \cos \frac{k\pi}{n}$.

解: 方程 $z^n = 1$ 的根 $\omega_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}(k = 0,1,2,\cdots,n-1)$.

$$z^n - 1 = \prod_{k=1}^{n-1} (z - \omega_k)$$

$$z^{n-1} + z^{n-2} \cdots + z + 1 = \prod_{k=1}^{n-1} \left[z - \left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \right) \right]$$

令 $z = 1$,並兩邊取模,得

$$|n| = \prod_{k=1}^{n-1} \left| 1 - \left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \right) \right|$$

$$|n| = \prod_{k=1}^{n-1} \left| 1 \sin \frac{k\pi}{n} \left(\sin \frac{k\pi}{n} - i \cos \frac{k\pi}{n} \right) \right|$$

$$n = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} \Rightarrow \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

在上一節(* *) 中,取 $z = i$,得

$$\frac{i^{2n} - 1}{i^2 - 1} = \prod_{k=1}^{n-1} \left(i^2 - 2i \cos \frac{k\pi}{n} + 1 \right).$$

$$\frac{(-1)^n - 1}{-2} = \prod_{k=1}^{n-1} \left(-2i \cos \frac{k\pi}{} \right)$$

$$\frac{(-1)^n - 1}{-2} = (-2i)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \cos \frac{k\pi}{n}$$

$$\prod_{k=1}^{n-1} \cos \frac{k\pi}{n} = \frac{(-1)^n - 1}{i^{n-1}(-2)^n} = \begin{cases} \frac{1}{2^{n-1}}, n = 4k+1 \\ 0, n = 2k \\ \frac{-1}{2^{n-1}}, n = 4k+3 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

綜合得$\prod_{k=1}^{n-1} \cos \frac{k\pi}{n} = \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{2^{n-1}}.$

$$\therefore \prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}},\ \prod_{k=1}^{n-1} \cos\frac{k\pi}{n} = \frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{2^{n-1}}.$$

五. 總結.

對於一般的正餘弦函數連乘問題,常用的方法包括:一,以二倍角公式為基礎,添項進行化簡;二,以正餘弦配對的方法構造式子並相乘,再使用二倍角公式化簡. 而對於複雜的正餘弦函數連乘問題的化簡,第二至四小節通過構造複數方程進行求解,利用方程與複根之間的關係並代入特殊根求得式子的值.

三角函數化簡問題千變萬化,講究技巧性,靈活性和構造性. 除了傳統的化簡方法以外,利用複數方程複根之間的對稱性,不僅讓解法優美,還起到化繁為簡,事半功倍之效. 下面總結前面推導的所有式子:

$$\prod_{k=1}^{n} \cos\frac{2^k\pi}{2^n-1} = \frac{1}{2^n}(n \geq 2), \quad \prod_{k=1}^{n} \sin\frac{k\pi}{2^n+1} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n},$$

$$\prod_{k=1}^{n} \cos\frac{k\pi}{2n+1} = \frac{1}{2^n}, \quad \prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{2n} = \prod_{k=1}^{n-1} \cos\frac{k\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}},$$

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}, \quad \prod_{k=1}^{n-1} \cos\frac{k\pi}{n} = \frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{2^{n-1}}.$$

淺談如何培養低年級學生的數學思維能力

廣東省江門市新會區會城紅衛小學　林穎葵

培養學生的思維能力是小學數學教學實施素質教育的需要,也是小學數學教學的重要任務之一。如何正確引導小學低年級學生逐步從形象思維走向抽象思維,使之在學習中勤於思考、樂於思考、恆於思考,真正成為思考領域裡的小勞動者,在小學低年級數學教學中顯得非常重要。根據本人的教學實踐經驗,就數學教學中如何培養低年級學生的思維能力談談幾點體會:

一、激發學生的學習興趣,啟迪思維能力。

愛因斯坦說過:"興趣是最好的老師"。低年級學生剛入學,對什麼都感到新鮮。教師要抓住這一點,深挖教材,活用教材,積極引導激發學生對學習的興趣,啟迪學生的思維,進而產生創造的欲望,學生的思維活躍了,思維能力也就得到提高。有趣的教學情境具有強烈的吸引力,能創設一種自由思考的課堂教學氛圍,給學生思維提供漫遊的空間。對低年級學生來說,故事、遊戲、現實生活場景都是他們最容易接受的學習方式。通過有趣的喜聞樂見的場景引入課題,可以牢牢地吸引學生的注意力,學生彷彿自己進入了故事情景中,不由自主地產生了強烈的探究欲望。例如,我在教學一年級數學"統計"這一內容時,一上課我就出示學生們喜歡的卡通人物:美羊羊、喜羊羊、懶洋洋、沸羊羊,並播放《喜羊羊》主題歌,讓他們跟著唱,然後讓他們數數全班各有多少人喜歡這些卡通人物,這時學生的興趣很高,爭著說自己的數數結果。這時,我抓住時機又問:"用什麼方法把你數的結果展示給大家看呢?"學生又各抒己見,課堂氣氛非常活躍。又如在教學"認識鐘錶"一課時,一上課,我就問:"小朋友,你們喜歡逛商店嗎?(生:喜歡)那我們就去逛逛。(演示鐘錶店錄影)問:剛才我們去了哪裡?在店裡,你們看到了什麼?看到這麼多漂亮的鐘,你們想知道些什麼呢?"(學生提出各種各樣的問題)師:"看來,在我們的學習生活中,學會認鐘錶是非常重要的,今天,就讓我們一起來認識鐘錶。"很明顯,這樣的導入馬上就把學生的心給"抓住了"。由此證明有趣的的教學情境,妙趣橫生的數學問題不僅能夠吸引學生的注意力,更能夠使學生迸發出思維的火花。

二、培養學生的操作能力，提高思維能力。

動作是思維的基礎，操作是智力的源泉、思維的起點，讓學生在親身經歷中獲得所期望的一切，也從中鍛煉與培養學生的創新觀念與創新精神。《新課程標準》指出“讓學生在做中學”。低年級學生樂於模仿，什麼都喜歡動手試試看，好奇心也特別強。因此，在教學中，教師就要根據兒童的思維特點和教材特點，精心組織課堂上的操作活動。一方面可以培養學生的操作能力，激發學生的學習興趣，調動學生的學習積極性；另一方面也是更重要的就是通過動手操作，把知識的獲得，思維的發展有機結合起來。課堂上讓學生擺一擺、看一看、想一想，通過多種感官去感知事物，去比較、分析、綜合、抽象出事物的本質，得出結論，找出解決問題的方法。例如，教學“角的初步認識”時，角對於低年級學生來說是比較難理解的幾何圖形。因此，角的認識及畫角是教學重點。我首先出示學生熟悉的實物，如：三角板、五角星、書本等，請他們指出上面的角，讓學生初步感知實物角。再讓學生利用兩個硬紙條和一個圖釘做成一個活動角，對不熟練的再讓好學生輔導一下。這樣學生通過動手做角，加深了對角的組成的認識。在教學畫角時，我先不講如何畫角，而是鼓勵學生自己畫。開始，學生畫出了各種各樣的不規則的角，比如有的沒有頂點，有的邊不直，還有的畫了個圖等等。針對畫角出現的問題，我鼓勵學生從課本中找答案，引導學生動腦思考、主動練習，並再次給他們創設條件，讓他們用筆和尺畫角，學生通過自己動手，積極探討摸索，終於畫出了正確的角，並總結出了畫角的正確方法，這樣讓每個學生主動參與知識的形成過程，對開發學生智力、培養學生的動作思維是十分有益的。實踐證明，通過擺一擺，畫一畫的直觀教學，將抽象的數學知識形象的展示出來，使學生形成感性到理性的認識過程，這樣獲得的知識牢固，從而有力地促進了思維的活躍。

三、注重學生的觀察能力，活躍思維能力。

觀察是兒童認識世界、活躍思維能力的最佳條件。低年級學生的生活經驗和已有的文化基礎知識，決定著觀察能力的強弱。因此，教師要積極調動學生的主人意識，努力為其創設觀察的活動情景，並熱情鼓勵低年級學生主動觀察，耐心細緻地教給觀察方法，使之在觀察體驗中增長知識。如：我在教“認識線段”時，就從引導學生觀察線段的特點入手，聯繫學生的生活環境進行教學，我要求學生觀察一枝鉛筆的形狀是不是一條線段？觀察數學書的四邊有幾條線段？這些問題的提出，緊密聯繫實際，既培養了學生的觀察興趣，又使學生理解和掌握了線段的意義，還教給了學生畫線段的方法。

四、重視學生的表達能力，發展思維能力。

低年級學生由於詞彙有限，往往在表述過程中會出現詞不達意的現象，但只要耐心引

導,加強學生數學語言表達能力教學,就會促進他們的數學思維能力的發展。

培養學生數學語言表達要有恆心,要堅持循序漸進。首先用詞要準確,如一“棵”樹,一“朵”花,單位名稱不能亂用。其次,語句要完整,如“誰比誰多”等等。我們要用完整的句式來規範學生的語言,最後表述要連貫、有條理。例如:在第二冊教材其中一個情景圖中,有小朋友們在回收廢品,還有一個統計表。我就讓學生仔細觀擦,小組討論,讓學生充分發表自己的意見,然後再引導學生根據統計表把條件和問題連慣起來說:“三班回收了 30 節電池,一班回收了8 節電池,三班比一班多回收了多少節電池?”又如:教學“加減”含義時,我就以一問一答一擺的形式,有意識地訓練學生說。

教師要鼓勵、指導學生發表見解,並有條理地講述自己的思維過程,讓儘量多的學生能有講的機會,教師不僅要瞭解學生說的結果,也要重視學生說的品質,這樣堅持下去,有利於培養學生的邏輯思維能力。如教“8 加幾”的教學時,我讓學生先邊擺邊說想法。然後,指名說出計算的過程,要求語言清晰,表達清楚。一年級學生畢竟還小,有的不知該怎麼說,我就及時幫助他說完想法,並表揚他。學生嘗到了成功的甜頭,感到無比興奮,有表現的欲望,探究的動力更加強烈,思維也得到了發展。有的學生說出自己與別人不同的想法,我更是大力表揚、鼓勵。使學生在興奮中、表現欲極強的情況下,自主地去追根求源,探究知識。

五、加強學生的多樣化訓練,豐富思維能力。

數學既能培養人的形象思維能力,又能鍛煉人的邏輯思維能力。多樣化訓練使學生對知識有全面的認識,說明學生提高思維的能力,學會觸類旁通,為以後的可持續發展奠定良好的基礎。我從以下兩方面入手進行訓練:

(1) 幫學生構建知識小系統,使學生學會從不同角度、不同方位去思考、挖掘知識的內在聯繫。例如:教完學生認識立體圖形後,要教學生認識平面圖形,就在立體圖形的身上找出平面圖形,讓學生用長方體、正方體、圓柱體、三棱柱等在紙上畫出它們的一個面,使學生明確畫出的面就是平面圖形,使學生深刻地體會到立體圖形與平面圖形之間的聯繫,加深學生對知識的理解。又如:由加算減的計算問題,就是利用加減法之間的聯繫,既解決了減法的計算問題,又有效地培養了學生的類推能力。由加算減的鋪墊,引申出由一幅圖列兩道算式,到一幅圖列四道算式,揭示相應的加減法之間的聯繫,讓學生體會其中的規律,然後再學習由加算減的計算方法就比較容易了,培養學生的思維靈活性和創造性。

(2) 巧用“變式”練習,加強對比,避免思維偏差。在教學比較的應用題時,如:草地上有白兔 15 只,黑兔 7 只,白兔比黑兔多幾隻?反過來可以怎麼問?學生會說:黑兔比白兔少幾隻?問法不同,但學生明白問的都是同一個問題。這就培養了學生正確的思維意向。

總之,在數學教學中對低年級學生進行思維能力的培養,教師要努力創設和諧的、開放的教學情境,激發學生的興趣,給學生創造一個廣闊的思維空間,並加以正確引導訓練,就一定能促進學生創新思維的發展。

向名師“邱學華”老師學習

《嘗試教學法》教學反思

胡月媚

本澳的教育由於長期受澳葡政府的教育政策影響，發展出以私校為主的多元辦學特色。在不同的教學語言（中文、英文、葡文）環境下，有以杜威的以兒童為中心的教育思想，布魯納的認知教育理論以及皮亞傑的教育心理學等教育理論指引著澳門的教育發展（汪甄南，2003），在教學方法上，近幾年加插了一些教學元素；如運用資訊科技、動手操作、*STEAM* 等。傳統形式的單向知識灌輸教學方法仍是澳門小學數學課堂教學的主流。本人有感學生的學習負擔過重，對學習失去興趣和動機，大部分學生對上數學課都感到焦慮。

學生學習數學主要來自於課堂，數學課堂是影響學生學習成效的重要因素。因此，本人希望透過以探究形式的「嘗試教學法」對學生進行課堂教學，希望能提高學生對學習數學的態度及能力，從而使學生在學習得到成功感。

什麼是「嘗試教學法 」？

「嘗試教學法 」的創始人邱學華老師，男，1935 年生，江蘇省常州市人，1960 年華東師範大學教育系本科畢業，當過小學教師、中學教師、大學教師、師範學校教師、教科所教研人員等。中國當代著名的小學數學教學專家。特級教師，曾榮獲教育部頒發的“全國第二屆教育科學優秀成果二等獎”，江蘇省“有突出貢獻中青年專家”等稱號。

「嘗試教學法」是指教學不由教師先講，而是讓學生在舊有的基礎知識上先來嘗試自行學習的一套教學理念。在嘗試的過程中教師指導學生自學課本，引導學生討論，在學生嘗試學習的基礎上教師在進行有針對的講解。它的教學基本程序可分五部進行：（一）出示嘗試法，（二）自學課本，（三）嘗試練習，（四）學生討論，（五）教師講解。

「嘗試教學法」的優勢：

「嘗試教學法」改變了「教師說，學生聽」的注入式教學方法，一改傳統「先講後練」為「先練後講」充分體會了學生在教學過程中的主體作用。這種教學方法有利於培養學生的

自學能力,有利於調動學生積極性,減輕學生課後作業負擔(邱學華,1995)。

「嘗試教學法」是一種特殊的嘗試活動。它既是嘗試活動,又是教學活動。這種嘗試活動具有三個特點(邱學華、蘇春景,2001):

1. 通過學生嘗試活動達到課程標準所定的數學目標,嘗試目標非常明確;
2. 學生嘗試活動過程中有教師的指導,它是一種有指導的嘗試;
3. 嘗試形式主要是解決教師根據教學內容所提出的嘗試問題。

嘗試教學活動有其鮮明的特徵,歸納成一句話:

“先試後導,先練後講”

“先試後導,先練後講”,其實也就是“先學後教”。傳統教學的特徵一般是“先教後學,先講後練”,這是注入式的教學特徵。上課先由教師講解,把什麼都講淸楚了,學生都聽懂了,然後學生再做練習,把教師講解的內容鞏固消化。嘗試教學與傳統教學截然相反:

傳統教學		嘗試教學
先教後學	→	先學後教(先試後導)
先講後練	→	先練後講

雖然只是前後順序調換一下,可這是教育思想的巨大變化,是傳統教育觀向現代教育觀的轉變。前者強調教師是主宰,是接受性教學;後者強調學生是主體,是嘗試性學習,也是自主性學習(邱學華,2005)。

以「嘗試教學法」去實踐:

本人增經以「嘗試教學法」對小五學生進行數學課堂教學研究,研究對象為本人所任教學校的小五學生共42人。透過3次的主題式嘗試教學法在課堂進行教學,並運用錄影、問卷、測試題、訪談等對教學進行跟進、反思、搜集研究資料,最後把所得的資料(以量及質的方式)用文字整理表達出研究結果。

「嘗試教學法」所構建的教學理念和基本模式是:相信「學生能嘗試,嘗試能成功,成功能創新」,根據這一點,本人在整個研究過程中可以看到學生不論在學習數學或其他科目(其他科目老師的反映)時都比以往積極,遇到問題時不選擇逃避,會積極尋求解決問題的方法。由此可見,嘗試教學法不單可提高學生對學習數學的興趣,也正面的影響他們在日常生活中遇到問題時該如何處理。

用「嘗試教學法」後的得著:

本人運用嘗試教學中成功地改變了傳統的教學模式,在該研究中,根據「嘗試教學法」的理論,在課堂上不再把什麼都講淸楚了才讓學生做練習,而是先提出問題再讓學生通過探究、發現問題,相互討論,尋找解決問題的方法,最後本人根據在嘗試練習中學生出現的

疑難,作針對性地提出問題讓學生思考,使學生能逐步解決問題,造就學生的成功感,提高學生的自信,改變了以往由老師依書直說的傳統教學,增加學生學習數學的興趣。

在課堂中進行「嘗試教學法」期間,有一位學生發生了很大的變化,尤其在成績方面,這位女同學在學期初時數學成績非常差,只有二十多分。她的媽媽非常擔心,還請來了不同的數學補習老師協助,祈使其成績有所改進,可惜成績仍未見進步。經本人實施「嘗試教學法」期間,她的數學成績卻使大家有出乎意料的結果,其成績竟突飛猛進,由原來二十多分提高至八十四分,這個大躍進使其母十分欣喜,這實例也說明了「嘗試教學法」有助提升學生解決問題的能力,從而增強學生學習的自信心。這個研究結果使本人覺得在教學中得到很大的滿足感、成功感。

「嘗試教學法」主張讓學生在嘗試中進行學習,從「先講後練」變為「先練後講」,從與研究對象的訪談中得知他們覺得運用嘗試教學法,可以推動他們的積極思考、探索及研究問題,於課堂學習氣氛上較過往輕鬆及愉快,從而提升了他們對學習數學的興趣。

「嘗試」後反思 :

進行了嘗試教學法後,本人認為只有教學前線人員 --- 教師最能清楚瞭解學生學習的需要、困難。若教師們能作針對性地探討學生學習的問題,又能適切地運用教學方法、資源,學生將能學習得更好。經過是次之教學研究,本人有一個很深的體會,要學生做一些他們感到困難的事,首先教師不應避重就輕或以威嚴壓之,而應勇於面對問題,多作自我反思,從而找出問題的出路,如面對一些成績較差的同學,只要選擇一些適合他們的教學方法,加以因材施教,也可使其學得更好。也只有這樣,教師方能不斷自我提昇,學生也會學得更好。也由此可見,若教師們能多體察學生在學習上的難點,能針對性地利用周遭有利的環境條件,發掘有趣的課題、活動使學生學得輕鬆、愉快。盼望作為教育工作者的你我能持續不斷的自我反思從而提昇專業,讓下一代能在愉快的環境中學得更好。

「嘗試」後感想 :

「從嘗試中學習」,這是本人未來在數學科中希望能夠達到的目的。如果能在小學階段的數學教學上培養學生從嘗試中學習,相信不但可以增加他們對數學的探索能力,還可以幫助他們解決其他學習上問題,而且可以提升他們對數學的興趣。因此在教學上本人作出了以下五點之建議:

一. 在教材內容有前後聯系的內容,用嘗試教學法比較適合。

二. 消弭教師的孤軍奮鬥,屏除評課的憂慮,與同事間多作互相觀摩及反思,在不斷地自我反省與改進下,以提昇教學的品質。

三. 在教材方面或教學活動安排上,須與學生生活經驗相結合,使學生更容易投入學習

的情境當中。

四. 教師不必拘泥於單一種教學方式,因為並非所有教材都適用於嘗試教學法教學,也並非所有的學生適合。

五. 以嘗試教學法教學,教師不但需要有專業知識來設計嘗試題,也需要各種教學資源各引導學生學習的技巧,所以教師在教學的過程中不斷進修,提升個人的教學技巧。

以“學生為主體”的教學法：

嘗試教學法對長期以傳統教學法接受數學教學的學生而言,在初期可能會出現不適應及自我懷疑的負面影響,學生在進行嘗試教學法後,因課堂學習所需的能力及投入較以往增加,故學生認為對學習數學的要求也從而提高和變得困難,即以往只是在聽,等待老師的講解,而現在既要討論又要自己從書本中找出答案,因此出現擔心及害怕的情況。因此教師必須多加指導及協助,以漸進的方式一步步在數學教育中滲透嘗試教學活動,讓學生慢慢建立嘗試學習的過程和經驗,以免出現學習不適應等負面情況。

最後,本人透過這次研究給予了自己很多在教學上的啟示和反省,因為學生很多時候在學習上的表現或喜愛都與老師的教學方法都有著相關的關係。本人覺得在現今的教學中,老師再不能一成不變、墨守成規地沿用舊有的教學方法,應該跳出傳統模式的框框,將學生推到為「主導者」,而老師只是「嚮導者」,要跟隨社會的步伐,多接觸新的事物,多花心思去設計教學活動、多吸收和嘗試新的教學方法,要懂得因應學生的特質去創設一套合適學生們的教學方法,激發他們對學習的興趣。在未來的教學上,本人仍會在適用的教材部分利用嘗試教學法教學,務求令學生能在一個以“學生為主體”,愉快的環境中學習,使教學做得更好。

本澳全民核酸檢測的滿意度分析及建議

崔天晴　鄭穎樺　金　鑫

一、前言

首先,這是一份師生共同完成的研究。作為一位數學教師常常被問到的問題就是數學到底有什麼用,我們數學研究的價值是什麼?作為一名教師,我在教育教學上對於基於項目學習(*PBL*,*Project Based Learning*) 的學習方法極為推崇。我認為在一國兩制優越制度下的澳門特別行政區更加有條件、有能力、有機會展開跨學科的基於項目的探究性學習模式。

二、研究動機

由於 2021 年 8 月初,本澳新冠病毒疫情的四宗感染病例令澳門政府做出全民核酸檢測的決定。而在 2021 年的九月底與十月初由相繼爆發隔離酒店保安群組的染疫,並且有社區爆發的風險。澳門政府遂決定接連進行第二次與第三次的核酸檢測。尤其在第一次核酸檢測後,網絡上有很多不滿意的聲音。於是我們師生便萌發了希望進行一次本澳核酸檢測滿意度的調查與分析。在這期間我們由本項目研究目的與背景到問卷的設計以及問卷收集後的數據處理與分析的每一個步驟展開我們的項目研究。這個過程對於從來沒有接觸過類似社會調查與項目相關分析的兩名初三年級的同學來說無可否認是有一定難度的。然而在這項社會調查的研究過程中,我們可以逐步講解每一個研究過程,遇到了什麼數學概念就去學習什麼數學概念。在基於這個社會實踐項目的研究過程當中去學習,學習相關的數學概念,同時也學習相關項目研究的方法與過程。針對新冠疫情的控制,進行全面的核酸檢測無疑是必要的。但是如何減少居民的輪候時間,減少在聚集人群中的暴露時間,如何分佈檢測站的位置以及數量,從而達到全民核酸檢測的“最優解” 就是我們開展“本澳全民核酸檢測的滿意度分析” 項目的初衷與目標。

三、研究方法

本研究採用定量分析的方法,通過訪談與問卷調查,從而將全民核酸檢測的滿意度影響因素編制為定量的指標,並通過 *SPSS* 軟件進行方差分析、t 分佈獨立檢驗分析、皮爾遜積

差相關分析與斯皮爾曼等級非參數相關分析。其中針對第一次與第二次的全民核酸檢測的結果較為具有象徵與借鑑意義,因此我們在下文中會著重做出具體的分析與解釋。

我們在量表的設計中主要分為兩個部分,一是被檢測者的個人相關測量指標;二是針對檢測的滿意度相關指標。

在問卷的設計中包括了被檢測者的年齡、性別、居住地區、所選擇的交通工具、選擇的檢測站點、檢測的日期、由住所至檢測站所需時間以及,輪候時間滿意度等等。基於問卷調查中量表的數據,我們進行了數據量化分析,可以得到以下的結論,以供參考。

四、數據分析

第一次全民核酸檢測滿意度調查表共收到 111 份。此問卷調查發現受訪者居住地所屬地區以花地瑪區為主,其中最大原因花地瑪區的總人口佔全澳門總人口中的 84.9%,而所選擇的核酸檢測地點以鏡湖醫院禮堂為主。出行方式以步行為主,由住所至檢測站的路程花費時間以 0 – 10 分鐘為主。對這次全民才核酸滿意度之平均值爲 3.4865。此外,不同年齡段受訪者的滿意度沒有顯著差異,說明不同年齡段受訪者的滿意度的標準較爲統一。此外,在不同檢測點的受訪者與滿意度方面,並沒有顯著差異。在是否跨區的受訪者與滿意度方面,也沒有顯著差異,說明選擇跨區與否的檢測點並沒有引起滿意度的變化。

描述

滿意度

	個案數	平均值	標準差	標準誤	平均值的 95% 置信區間 下限	平均值的 95% 置信區間 上限	最小值	最大值
8月4日	39	3.0513	1.23435	.19765	2.6512	3.4514	1.00	5.00
8月5日	51	3.5490	1.22170	.17107	3.2054	3.8926	1.00	5.00
8月6日	16	3.9375	1.18145	.29536	3.3079	4.5671	2.00	5.00
8月7日	5	4.8000	.44721	.20000	4.2447	5.3553	4.00	5.00
總計	111	3.4865	1.25673	.11928	3.2501	3.7229	1.00	5.00

ANOVA

滿意度

	平方和	自由度	均方	F	顯著性
組間	19.467	3	6.489	4.501	.005
組內	154.262	107	1.442		
總計	173.730	110			

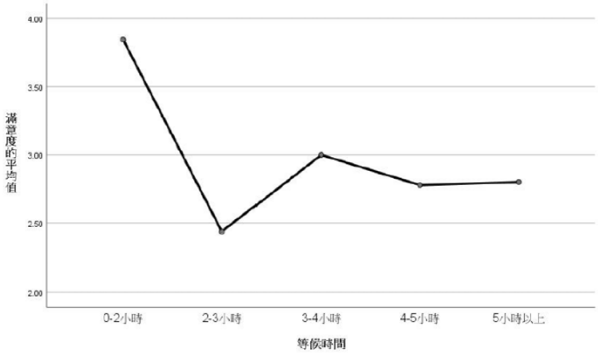
然而,由上表可知,$F = 4.501$,$P = 0.005 < 0.05$,說明不同檢測日期的受訪者在滿意度上具有顯著差異,8 月 4 日進行檢測的受訪者滿意度最低,平均值為 3.05,參考當日本澳天氣報告得知當天的天氣,早上是多雲,晚上有雨,而大部分受訪者都是在晚上進行檢測核酸的,大量市民冒雨輪候,因此引入天氣作為考慮因素,此可能是引起不滿的原因之一。8 月 7 日進行檢測的受訪者滿意度最高,平均值為4.8,主要原因是8 月7 日是全民檢測的最后一天,前去檢測核酸的人並不多,而且當日沒有惡劣天氣。

滿意度

	個案數	平均值	標準差	標準誤	平均值的 95% 置信區間 下限	上限	最小值	最大值
0-2小時	78	3.8462	1.05777	.11977	3.6077	4.0846	1.00	5.00
2-3小時	16	2.4375	1.31498	.32874	1.7368	3.1382	1.00	5.00
3-4小時	3	3.0000	.00000	.00000	3.0000	3.0000	3.00	3.00
4-5小時	9	2.7778	1.39443	.46481	1.7059	3.8496	1.00	5.00
5小時以上	5	2.8000	1.64317	.73485	.7597	4.8403	1.00	5.00
總計	111	3.4865	1.25673	.11928	3.2501	3.7229	1.00	5.00

滿意度

	平方和	自由度	均方	F	顯著性
組間	35.283	4	8.821	6.753	.000
組內	138.447	106	1.306		
總計	173.730	110			



此外,由上表可知,$F = 6.753$,$P < 0.001$,說明從排隊時長不同的來訪者在滿意度上有顯著差異,排隊時長為0 - 2小時的滿意度最高,平均值為3.85。排隊時長為5小時或以上的滿意度最低,平均值為2.8。

相關分析(採用皮爾遜積差相關)

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2}}$$

($r < 0.3$ 弱相關,$r = 0.3 \sim 0.6$ 中等強度相關,$r = 0.6$ 強相關)

相關性

		滿意度	排隊時間	路程耗時	年齡	檢測日期	同伴數
滿意度	皮爾遜相關性	1	-.330**	.070	-.004	.330**	.101
	Sig.(雙尾)		.000	.462	.968	.000	.293
	個案數	111	111	111	111	111	111

**. 在 0.01 級別(雙尾),相關性顯著。

在第一次核酸檢測滿意度相關分析(皮爾遜相關分析)中,我們可由上表可知上表可知,滿意度與排隊時間的相關係數 $r = -0.33$, $sig. < 0.001$,說明引數(等待時間)與因變數呈負相關,相關強度中等;滿意度與路程耗時的相關係數 $r = 0.07$, $sig. > 0.001$,說明兩變量相關性不顯著;滿意度與年齡的相關係數 $r = -0.004$, $sig. > 0.001$,說明兩變量相關性不顯著;滿意度與檢測日期的相關係數 $r = 0.33$, $sig. < 0.001$,說明引數(檢測日期)與因變數呈正相關,相關強度中等;滿意度與同伴數的相關係數 $r = 0.101$, $sig. > 0.001$,說明兩變量相關性不顯著。

在第二次本澳全民核酸檢測的時候,政府針對核酸檢測進行了相關調整,例如增加了自費檢測站與關愛檢測站以及需要網上預約等幫助市民及時了解全民核檢工作的相關內容。因此,對於第二次以及第三次全面核酸檢測的問卷我們也相應的增加了以上欄目。在第二次受訪問卷的回覆中顯示有 97.2% 的居民認為第二次政府對全民核酸檢測工作相較第一次有改善。不但如此,由分析結果得知至受訪者滿意度以 3 星為主,平均滿意度為 4.5,較第一次全民核酸檢測平均滿意度3.4865 有顯著提升。這同時反應了第二次全民核酸檢測工作的改善。

(1)檢驗從居所到檢測站所花費時長的不同的受訪者在滿意度上有否顯著差異

描述

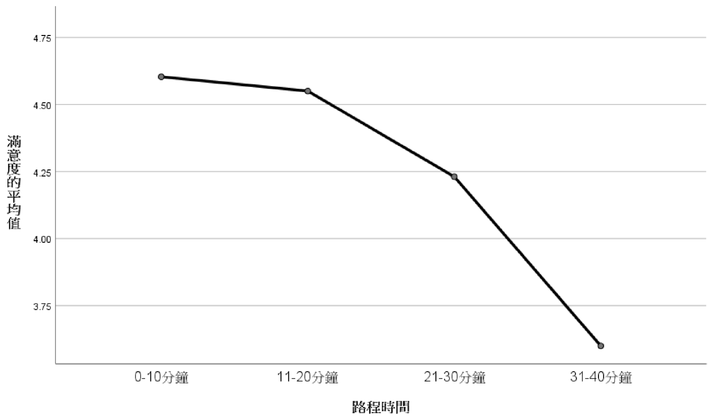
滿意度

	個案數	平均值	標準差	標準誤	平均值的 95% 置信區間 下限	平均值的 95% 置信區間 上限	最小值	最大值
0-10分鐘	68	4.6029	.81295	.09858	4.4062	4.7997	1.00	5.00
11-20分鐘	20	4.5500	.51042	.11413	4.3111	4.7889	4.00	5.00
21-30分鐘	13	4.2308	.83205	.23077	3.7280	4.7336	3.00	5.00
31-40分鐘	5	3.6000	1.14018	.50990	2.1843	5.0157	2.00	5.00
總計	106	4.5000	.80770	.07845	4.3444	4.6556	1.00	5.00

ANOVA

滿意度

	平方和	自由度	均方	F	顯著性
組間	5.763	3	1.921	3.123	.029
組內	62.737	102	.615		
總計	68.500	105			



由上表可知，$F = 3.123$，$P = 0.029 < 0.05$，說明從居所到檢測站所花費時長的不同的受訪者在滿意度上具有顯著差異，耗時0－10分鐘的受訪者平均滿意度比耗時31－40分鐘平均滿意度高1.0029。

（2）檢驗排隊時長不同的來訪者在滿意度上有否顯著差異

描述

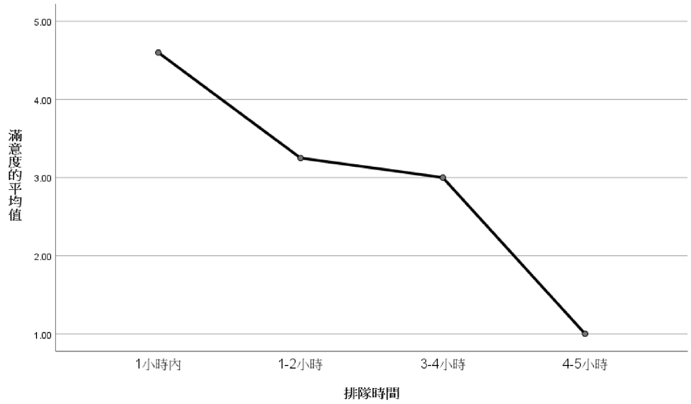
滿意度

	個案數	平均值	標準 偏差	標準 錯誤	平均值的 95% 置信區間 下限	平均值的 95% 置信區間 上限	最小值	最大值
1小時內	100	4.6000	.61955	.06195	4.4771	4.7229	2.00	5.00
1-2小時	4	3.2500	1.70783	.85391	.5325	5.9675	1.00	5.00
3-4小時	1	3.0000	.	.	.	.	3.00	3.00
4-5小時	1	1.0000	.	.	.	.	1.00	1.00
總計	106	4.5000	.80770	.07845	4.3444	4.6556	1.00	5.00

ANOVA

滿意度

	平方和	自由度	均方	F	顯著性
組間	21.750	3	7.250	15.818	.000
組內	46.750	102	.458		
總計	68.500	105			



由上表可知,$F = 15.818$,$P < 0.001$,說明從排隊時長不同的來訪者在滿意度上有顯著差異,排隊時長為1小時內的受訪者平均滿意度比排隊時長為4－5小時的高3.6。

(3) 檢驗選擇檢測站之前有否瀏覽實時網頁的受訪者在滿意度上的差異(獨立樣本 T 檢驗)

組統計

	選擇檢測站之前是否瀏覽實時輪候網頁	個案數	平均值	標準差	標準 誤差平均值
滿意度	是	68	4.4265	.85197	.10332
	否	38	4.6316	.71361	.11576

独立样本检验

		莱文方差等同性检验		平均值等同性 t 检验						
									差值 95% 置信区间	
		F	显著性	t	自由度	Sig.（双尾）	平均值差值	标准误差差值	下限	上限
滿意度	假定等方差	1.248	.267	-1.257	104	.211	-.20511	.16314	-.52862	.11840
	不假定等方差			-1.322	88.433	.190	-.20511	.15516	-.51344	.10322

由上表可知,$F = 1.248$, $P = 0.267 > 0.05$,說明瀏覽實時網頁與否的受訪者在滿意度上的沒有顯著差異。

相關性

		滿意度	年齡	檢測日期	排隊時間	路程耗時
滿意度	皮爾遜相關性	1	.026	.121	-.538**	-.260**
	Sig.（雙尾）		.795	.216	.000	.007
	個案數	106	106	106	106	106

****. 在 0.01 級別（雙尾），相關性顯著。**

上表可知,滿意度與年齡的相關係數 $r = 0.026$, $sig. > 0.001$,說明兩變量相關性不顯著;滿意度與檢測日期的相關係數 $r = 0.121$, $sig. > 0.001$,說明說明兩變量相關性不顯著;

滿意度與排除時間的相關係數 $r = -0.538$, $sig. < 0.001$,說明自變量(排隊時間)與因變數呈負相關,相關強度中等;滿意度與路程耗時的相關係數 $r = -0.26$, $sig. < 0.001$,說明自變量(路程耗時)與因變數呈負相關,相關強度為弱相關;

非參數相關分析(斯皮爾曼等級相關係)

$$r_s = 1 - \frac{6\sum d_i^2}{n(n^2 - 1)}.$$

相關性

			改善	影響選擇
斯皮爾曼 Rho	改善	相關係數	1.000	.224*
		Sig.(雙尾)	.	.021
		N	106	106

*. 在 0.05 級別(雙尾),相關性顯著。

上表可知,有否改善與瀏覽實時網頁是否影響檢測點的選擇的相關係數 $rs = 0.224$, $sig. < 0.001$,說明兩變量為正相關,強度為弱相關,說明有否瀏覽實時網頁對本次核檢有否體驗上改善是具有影響的。

五、結論

在本項目展開研究之初,尤其在第一次全民核酸檢測之後,研究者認為大多數居民的不滿意是與輪候時間直接相關的。我們兩次的問卷的結果都驗證了這一設想。即使在第二次全民核酸檢測之後,絕大多數居民認為非常滿意並且相較第一次全民核酸檢測的工作有改善,但是依然有少數居民由於輪候時間過長而認為不滿意,這也驗證了研究者最初的設想。然而研究者最初猜想居民輪候時間過長與檢測站的分佈有很大關係,認為政府並沒有按照各區居民人數合理分配而導致居民在輪候時間過長。但是經過我們的問卷調查的分析之後證明我們的設想是錯誤的。首先兩次問卷對於檢測站的選擇以及跨區檢測的情況對於滿意度是相關性不顯著的。

此外,針對第二次全民核酸檢測的改善措施是增加了分流措施。例如增加了關愛站點和自費站點,在受訪結果的回收當中我們發現的確有居民選擇關愛站與自費站,但是對於整體滿意度的關聯性並不高。而第二個變化是網上預約以及提供居民隨時瀏覽輪候網頁的選擇。結果顯示超過60% 的居民在進行預約之前有瀏覽相關網頁並且對自己選擇站點產生影響,但認為預約網站的設立時段對人流作分流的安排是相較對上次的檢測有明顯改善。

本研究兩次都選取了超過了百份問卷,針對本澳居民對兩次核酸檢測的滿意度進行定量分析,從而發現了輪候時間對滿意度的顯著影響。在第一次核酸檢測中有超過 20% 的居

民輪候時間超過了4個小時,並且對核酸檢測的安排非常不滿意;即使在第二次全民核酸檢測大為改善的情況下,依然有少量居民由於輪候時間過長而產生不滿意。因此,政府需要盡量減少居民的輪候時間方面做出努力。這說明第二次乃至第三次全民核酸檢測政府有盡力改善與調整相關措施。

六、後記

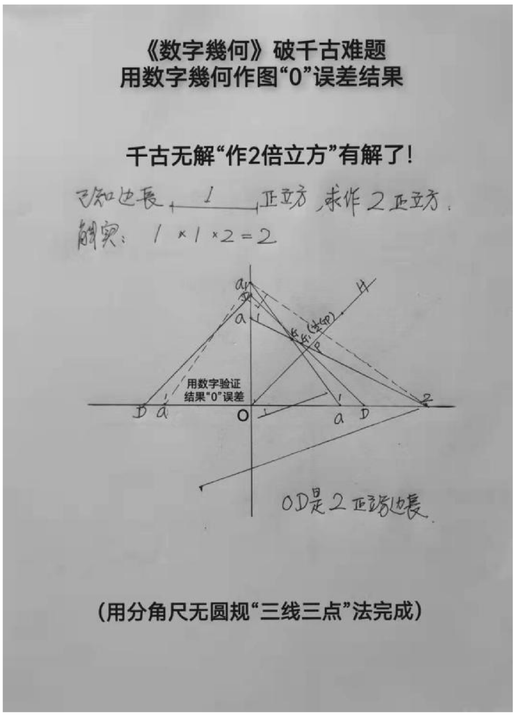
綜上所述,我們通過調查分析得出影響全民核酸檢測滿意度因素的相關結論。然而,有趣的是本項目得出的結論與研究者最初的設計有部分的猜想吻合,也有部分的猜想被證明是錯誤的。這對於學習者來說是難能可貴的經歷,不但學習到了研究的方法和手段,更加學習到了如何科學的去分析和看待一些社會熱點事件,令我們保持冷靜客觀中立的看待我們的周遭。

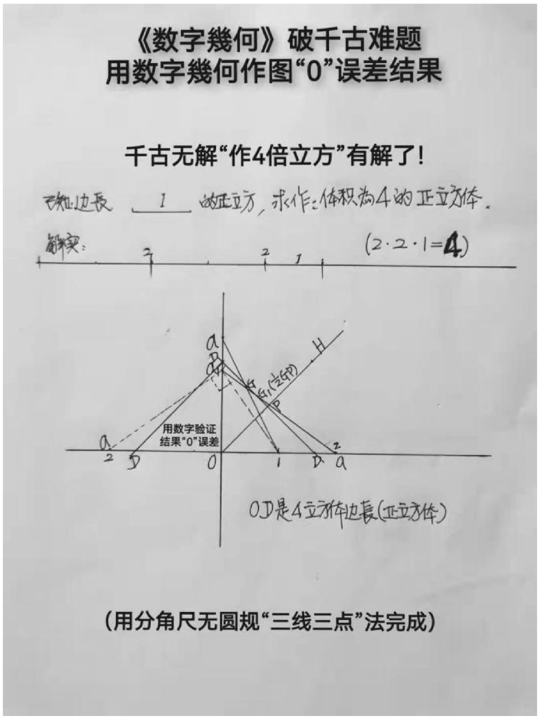
《數字幾何》破千古難題 ——N 倍立方有解了！

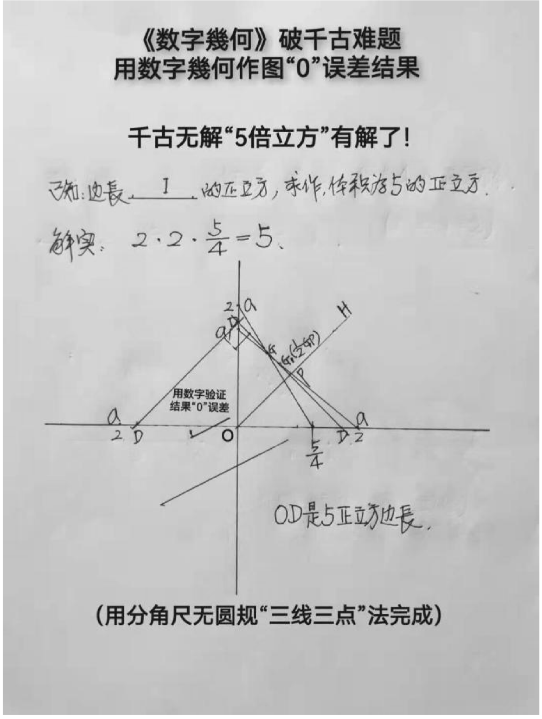
澳門數學教育研究學會

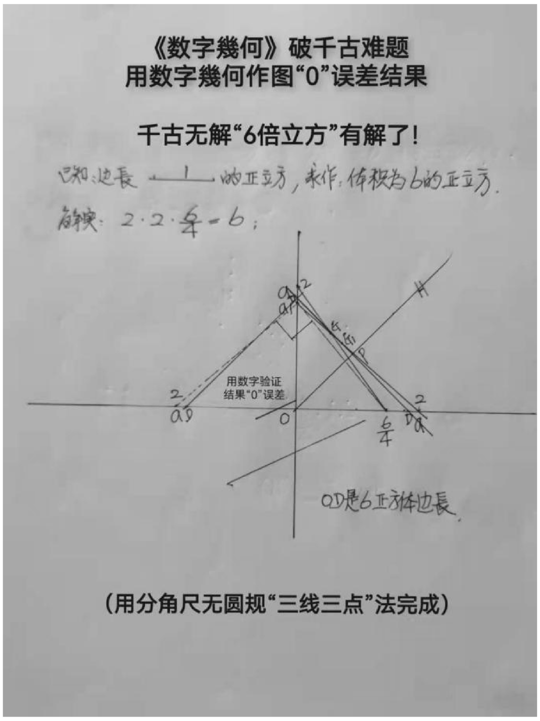
上海科學與藝術網 2017 年 10 月 17 日報道：只用一把分角尺現場演示，就能在 15 分鐘內完成任意角三等分、五等分、七等分；化圓為方；作倍立方體；……。這是日前在數字幾何《分角尺》作圖首發暨第三屆《分角尺》作圖競賽發佈會上，《分角尺》作圖發明人崔榮琰現場作圖演示的一幕。由《分角尺》作圖競賽組委會主辦的數字幾何《分角尺》作圖首發暨第三屆《分角尺》作圖競賽發佈會，日前在上海科學會堂舉行。據悉，數字幾何《分角尺》作圖已列入上海“中學數學補充教材”，進入上海乃至全國的中小學數學課堂。

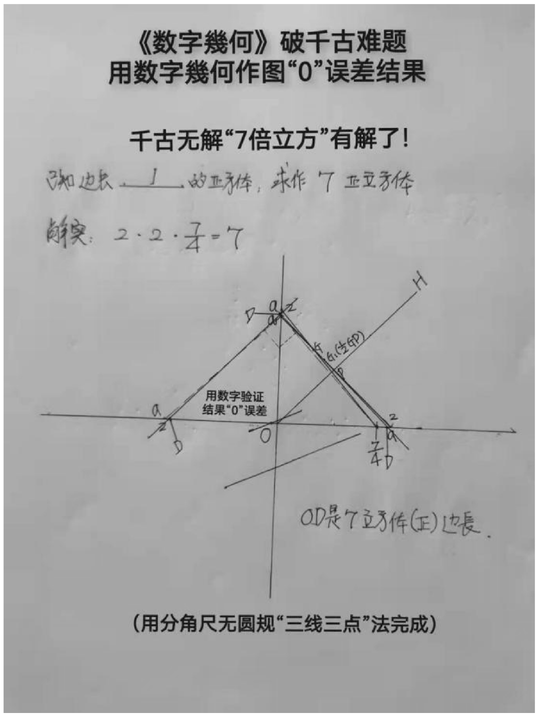
近日，崔榮琰老師用中國本土原創的新工具（分角尺）、新幾何學（數字幾何）、新定律（三大幾何定律）為人類實現 189 道千古無解難題“無需圓規一尺解”！

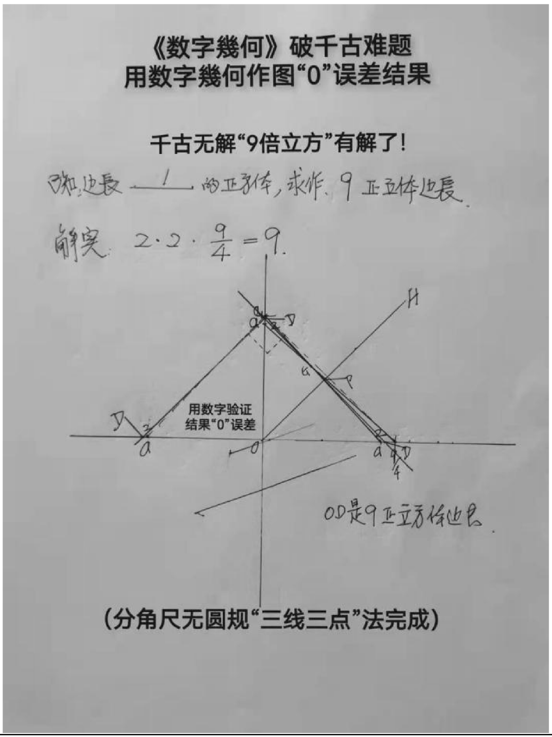


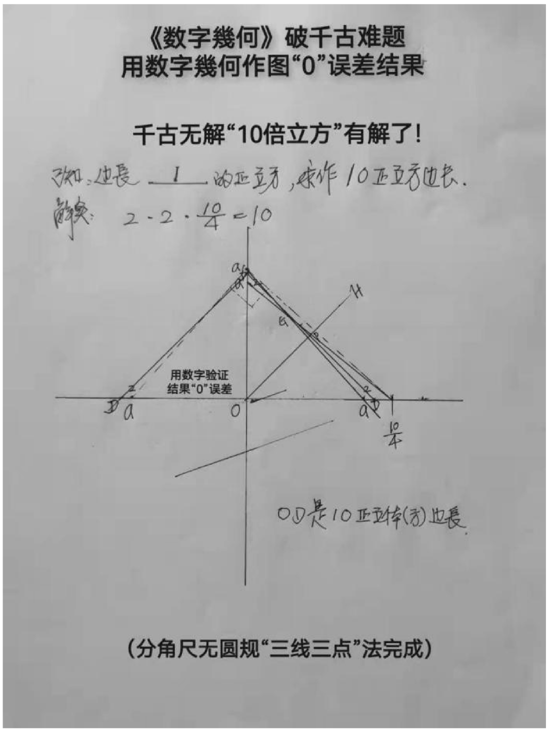

《数字幾何》破千古难题
用数字幾何作图"0"误差结果
千古无解"作4倍立方"有解了!
已知:边長 1 的正立方,求作:体积为4的正立方体.
解实:
(2·2·1=4)
用数字验证
结果"0"误差
OD是4立方体边長(正立方体)
(用分角尺无圆规"三线三点"法完成)

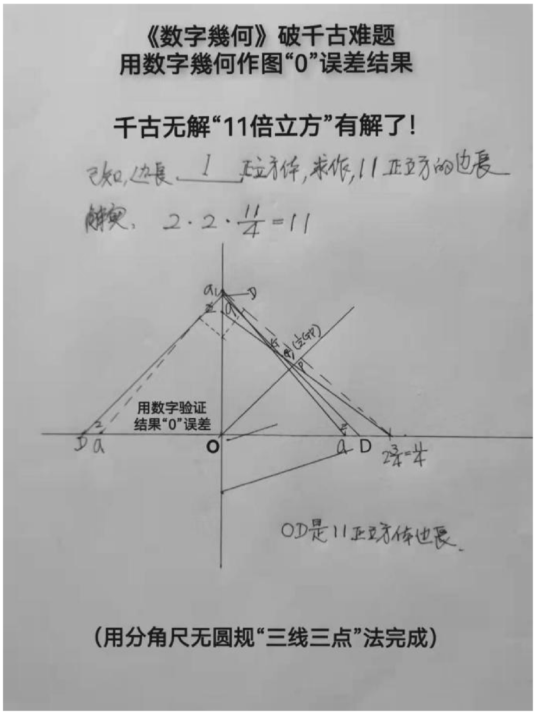

《数字幾何》破千古难题
用数字幾何作图"0"误差结果
千古无解"5倍立方"有解了!
已知:边長 1 的正立方,求作:体积为5的正立方.
解实: 2·2·5/4=5.
用数字验证
结果"0"误差
OD是5正立方边長.
(用分角尺无圆规"三线三点"法完成)


《数字幾何》破千古难题
用数字幾何作图"0"误差结果
千古无解"6倍立方"有解了!
已知:边長 1 的正立方,求作:体积为6的正立方.
解实: 2·2·6/4=6;
用数字验证
结果"0"误差
OD是6正方体边長.
(用分角尺无圆规"三线三点"法完成)


《数字幾何》破千古难题
用数字幾何作图"0"误差结果
千古无解"7倍立方"有解了!
已知边長 1 的正方体,求作 7 正立方体
解实: 2·2·7/4=7
用数字验证
结果"0"误差
OD是7立方体(正)边長.
(用分角尺无圆规"三线三点"法完成)







作為數學基礎難題，很重要的一步，是讓更多的學生、教師、專家學習掌握！這是分角尺競賽組委會的期盼。

由一道競賽題引發的構造函數法與拉格朗日插值法的對比

勞校中學　高一級 鍾錫豪　指導老師 魏均僑

本文深入探討一道與多項式有關的競賽題，分別從兩種不同的思路進行解答，並推廣出若干種變形，以及對比兩種風格迥異的解題策略的利弊.

［**題目**］設 $P(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$，其中 a,b,c,d 為常數. 如果 $P(1)=10$，$P(2)=20$，$P(3)=30$，試求 $P(10)+P(-6)$ 的數值?（第四屆青少年數學國際城市邀請賽個人賽第題）

［**分析**］此題有兩種解法：一是利用其 x 與 $P(x)$ 等比的關係構造函數（以下簡稱為構造法）；二是利用拉格朗日（*Lagrange*）插值法.

［**解法一**］設 $g(x)=P(x)-10x$，則 $P(x)=g(x)+10x$. 由已知可推得 $g(1)=g(2)=g(3)=0$，所以 $x=1,2,3$ 為 $g(x)=0$ 的根. 易知 $g(x)$ 的首項係數為 1，可設 $g(x)=(x-1)(x-2)(x-3)\cdot(x-k)$，其中 k 為常數. 因此，

$$\begin{aligned}P(10)+P(-6)&=(g(10)+100)+(g(-6)-60)\\&=9\cdot 8\cdot 7\cdot(10-k)+(-7)\cdot(-8)\cdot(-9)\cdot(-6-k)+40\\&=504(10-k)+504(6+k)+40=8104.\end{aligned}$$

［**解法二**］設 $P(10)=a$，$P(-6)=b$，我們取五點 $(1,10)$，$(2,20)$，$(3,30)$，$(10,a)$ 和 $(-6,b)$. 由拉格朗日插值定理，構造過這五點的多項式 $P(x)$：

$$\begin{aligned}P(x)&=\frac{(x-2)(x-3)(x-10)(x+6)}{(1-2)(1-3)(1-10)(1+6)}\cdot 10+\frac{(x-1)(x-3)(x-10)(x+6)}{(2-1)(2-3)(2-10)(2+6)}\cdot 20\\&\quad+\frac{(x-1)(x-2)(x-10)(x+6)}{(3-1)(3-2)(3-10)(3-6)}\cdot 30+\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x+6)}{(10-1)(10-2)(10-3)(10+6)}\cdot a\\&\quad+\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-10)}{(-6-1)(-6-2)(-6-3)(-6-10)}\cdot b\\&=-\frac{5}{63}(x-2)(x-3)(x-10)(x+6)+\frac{5}{16}(x-1)(x-3)(x-10)(x+6)\\&\quad-\frac{5}{21}(x-1)(x-2)(x-10)(x+6)+\frac{a}{8064}(x-1)(x-2)(x-3)(x+6)\\&\quad+\frac{b}{8064}(x-1)(x-2)(x-3)(x-10).\end{aligned}$$

因為 $P(x)$ 的首項次數為 1,則

$$-\frac{5}{63}+\frac{5}{16}+\frac{a}{8064}+\frac{b}{8064}=1,$$

$$\frac{a+b}{8064}=1+\frac{5}{1008},$$

$$a+b=8104.$$

$\therefore P(10)+P(-6)=a+b=8104.$

以上是完整的解答. 我們仔細觀察解法一,發現 $-504k$ 與 $504k$ 可抵消掉. 類似地,在解法二中,最後 $\frac{a}{8064}$ 和 $\frac{b}{8064}$ 有相同分母,即 a,b 的係數相等. 解法一與解法二的“巧合性” 似乎是 10 與 -6 所致,而 $10+(-6)=4$,這是否和為 4 的組合都存在這一“巧合性” 呢?

我們來試求的值 $P(5)+p(-1)$ 的值.

$\boxed{\text{變形 1}}$:設 $P(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$,其中 a,b,c,d 為常數. 如果 $P(1)=10,P(2)=20,P(3)=30$,試求 $P(5)+P(-1)$ 的值.

[**解法一**] 與原題解法一樣,過程省略,可得 $P(5)+P(-1)=184$.

[**解法二**] 設 $P(5)=a,P(-1)=b$,我們取五點 $(1,10),(2,20),(3,30),(5,a)$ 和 $(-1,b)$. 由拉格朗日插值定理,構造過這五點的多項式 $P(x)$:

$$P(x)=\frac{(x-2)(x-3)(x-5)(x+1)}{(1-2)(1-3)(1-5)(1+1)}\cdot 10+\frac{(x-1)(x-3)(x-5)(x+1)}{(2-1)(2-3)(2-5)(2+1)}\cdot 20$$
$$+\frac{(x-1)(x-2)(x-5)(x+1)}{(3-1)(3-2)(3-5)(3+1)}\cdot 30+\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x+1)}{(5-1)(5-2)(5-3)(5+1)}\cdot a$$
$$+\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)}{(-1-1)(-1-2)(-1-3)(-6-5)}\cdot b\,.$$

因為 $P(x)$ 的首項次數為 1,則

$$-\frac{5}{8}+\frac{20}{9}-\frac{15}{8}+\frac{a}{144}+\frac{b}{144}=1$$

$$a+b=184.$$

$\therefore P(5)+P(-1)=a+b=184.$

可見,這一“巧合性” 仍然存在. 接下來將對“巧合性” 進行一般性研究. 我們可把 10,5 設為 t, -6, -1 設為 $4-t$..

繼續探究題目條件,發現函數值有以下比例關係:$P(1):P(2):P(3)=10:20:30=1:2:3$. 我們可將此條件變為 $P(1)=r,P(2)=2r,P(3)=3r$,其他條件不變,現在計算 $P(t)+P(4-t)$ 的值(r,t 為常數,$t\notin\{1,2,3\}$).

$\boxed{\text{變形 2}}$:設 $P(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$,其中 a,b,c,d 為常數. 如果 $P(1)=r,P(2)=2r,P(3)=3r$,試求 $P(t)+P(4-t)$ 的值(r,t 為常數,$t\notin\{1,2,3\}$,以 r,t 表示答案).

[**解法一**] 設 $g(x)=P(x)-rx$,則 $P(x)=g(x)+rx$. 因為 $g(1)=g(2)=g(3)=$

0,所以 $x=1,2,3$ 為 $g(x)=0$ 的根. 易知 $g(x)$ 的首項係數為 1,可設 $g(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-k)$,其中 k 為常數. 因此,

$$\begin{aligned}P(t)+P(4-t)&=(g(t)+rt)+(g(4-t)+4-t)r)\\&=(t-1)(t-2)(t-3)(t-K)\\&\quad+(4-t-1)(4-t-2)(4-t-3)(4-t-k)+4r\\&=(t-1)(t-2)(t-3)(2t-4)+4r\\&=2(t-1)(t-2)^2(t-3)+4r.\end{aligned}$$

[**解法二**] 設 $P(t)=a,P(4-t)=b$,我們取五點 $(1,r),(2,2r),(3,3r),(t,a)$ 和 $(4-t,b)$. 由拉格朗日插值定理,構造過這五點的多項式 $P(x)$:

$$\begin{aligned}P(x)&=\frac{(x-2)(x-3)(x-t)(x-4+t)}{(1-2)(1-3)(1-t)(1-4+t)}\cdot r+\frac{(x-1)(x-3)(x-t)(x-4+t)}{(2-1)(2-3)(2-t)(2-4+t)}\cdot 2r\\&\quad+\frac{(x-1)(x-2)(x-t)(x-4+t)}{(3-1)(3-2)(3-t)(3-4+t)}\cdot 3r+\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4+t)}{(t-1)(t-2)(t-3)(t-4+t)}\cdot a\\&\quad+\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-t)}{(4-t-1)(4-t-2)(4-t-3)(4-t-t)}\cdot b\\&=-\frac{(x-2)(x-3)(x-t)(x-4+t)}{2(t-1)(t-3)}\cdot r+\frac{(x-1)(x-3)(x-t)(x-4+t)}{(t-2)^2}\cdot 2r\\&\quad-\frac{(x-1)(x-2)(x-t)(x-4+t)}{2(t-1)(t-3)}\cdot 3r+\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4+t)}{2(t-3)(t-1)(t-2)^2}\cdot a\\&\quad+\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-t)}{2(t-1)(t-3)(t-2)^2}\cdot b.\end{aligned}$$

因為 $P(x)$ 的首項次數為 1,則

$$-\frac{r}{2(t-1)(t-3)}+\frac{2r}{(t-2)^2}-\frac{3r}{2(t-1)(t-3)}$$

$$+\frac{a}{2(t-3)(t-1)(t-2)^2}+\frac{b}{2(t-1)(t-3)(t-2)^2}=1$$

$$a+b=2(t-3)(t-1)(t-2)^2+4r.$$

$$\therefore P(t)+P(4-t)=2(t-1)(t-2)^2(t-3)+4r.$$

至此,關於四次多項式的一般性研究已經有了結論:已知四次多項式 $P(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$,其中 a,b,c,d 為常數,若 $P(1)=r,P(2)=2r,P(3)=3r$ 時,有以下關係

$P(t)+P(4-t)=2(t-1)(t-2)^2(t-3)+4r$ (r,t 為常數,$t\notin\{1,2,3\}$).

在以上結論中,$P(4-t)$ 中的"4" 是否與四次多項式有關呢?如果將其推廣到 n 次多項式,是否也可以求出 $P(t)+P(n-t)$ 的值,並且有類似四次多項式的結論呢?

$\boxed{\text{變形 3}}$:設 $P(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$,其中 $a_1,a_2,\cdots a_n$ 為常數. 若 $P(1)=r,P(2)=2r,\cdots,P(n-1)=(n-1)r$,什麼情況下 $P(t)+P(n-t)$ 的值能唯一確定(r,t 為常數,$t\notin\{1,2,\cdots,n-1\}$)?

[**答案**] 當 n 為偶數時能唯一確定,其值為:$2(t-1)(t-2)\cdots\left(t-\frac{n}{2}\right)^2\cdots(t-n+1)+nr$($r,t$ 為常數,$t\notin\{1,2,\cdots,n-1\}$).

[**解**] 設 $g(x)=P(x)-rx$,$P(x)=g(x)+rx$. 因為 $g(1)=g(2)=\cdots=g(n-1)=0$,所以 $x=1,2,\cdots,n-1$ 為 $g(x)=0$ 的根. 易知 $g(x)$ 的首項係數為1,可設 $g(x)=(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)(x-k)$,其中 k 為常數. 故有

$$\begin{aligned}P(t)+P(n-t)&=(g(t)+rt)+(g)n-t\_+r(n-t))\\&=(t-1)(t-2)\cdots(t-n+1)(t-k)\\&=+(n-t-1)(n-t-2)\cdots(-t+1)(n-t-k)+nr.\cdots\cdots(*)\end{aligned}$$

接下來分情況討論:(a) 若 n 為偶數時,($*$) 可化為

$$(t-1)(t-2)\cdots(t-n+1)(t-k)-(t-n+1)(t-n+2)\cdots(t-1)(n-t-k)+nr$$
$$=(t-1)(t-2)\cdots(t-n+1)(2t-n)+nr.$$
$$\begin{aligned}\therefore P(t)+P(n-t)&=(t-1)(t-2)\cdots(t-n+1)(2t-n)+nr\\&=2(t-1)(t-2)\cdots\left(t-\frac{n}{2}\right)^2\cdots(t-n+1)+nr.\end{aligned}$$

(b) 若 n 為奇數,($*$) 可化為

$(t-1)(t-2)\cdots(t-n+1)(t-k)+(t-n+1)(t-n+2)\cdots(t-1)(n-t-k)+(2r-n)r=(t-1)(t-2)\cdots(t-n+1)(n-2k)+(2t-n)r.$

可見常數 k 無法被消去,此時 n 不可取奇數.

綜合 (a), (b), 當 n 為偶數時,$P(t)+P(n-t)$ 有唯一確定值:$2(t-1)(t-2)\cdots\left(t-\frac{n}{2}\right)^2\cdots(t-n+1)+nr$;當 n 為奇數時,$P(t)+P(n-t)$ 無唯一確定的值.

在變形3中,若使用拉格朗日插值定理解決,將會出現多項式連加問題,沒有辦法通過初等方法輕易化簡,由此可見構造法還是具有其獨特的簡潔之處.

$\boxed{\text{變形4}}$:在以上解答的過程中,若把題目改為求 $P(t)-P(n-t)$ 的值,則答案變為$[(t-1)(t-2)\cdots(t-n+1)+r](2t-n)$(其中 n 為奇數,r,t 為常數,$t\notin\{1,2,\cdots,n-1\}$).

最後,我們得到了對於 n 次多項式的一般性結論:已知 n 次多項式 $P(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$,其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 為常數,若 $P(1)=r,P(2)=2r,\cdots,P(n-1)=(n-1)r$,則有以下關係

當 n 為偶數時,有 $P(t)+P(n-t)=2(t-1)(t-2)\cdots\left(t-\frac{n}{2}\right)^2\cdots(t-n+1)+nr$;

當 n 為奇數時,有 $P(t)-P(n-t)=[(t-1)(t-2)\cdots(t-n+1)+r](21t-n)$ (r,t 為常數,$t\notin\{1,2,\cdots,n-1\}$).

在以上結論中,已知條件中存在著許多的限制,如:$P(1)=r,P(2)=2r,\cdots,P(n-1)=(n-1)r$,我們是否可以減少這些限制呢?對於 n 次多項式,若 $P(1):P(2):\ :P(n-1)\neq 1:2:\cdots:(n-1)$,是否也能得到 $P(t)\pm P(n-t)$ 的值呢?

由構造法的解答過程可知,不易構造多項式進行解答. 但對於拉格朗日插值法,並不會對 a,b 的係數造成影響. 因此,對於函數值不成比例的情況,拉格朗日插值法仍能求出 $P(t) \pm P(n-t)$ 的值. 下面,我們以四次多項式為例子.

$\boxed{\text{變形 5}}$:設 $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$,其中 a,b,c,d 為常數. 若 $P(1) = 2, P(2) = 5, P(3) = 20$,試求 $P(10) + P(-6)$ 的值.

[**答案**]8842.

[**解答**]設 $P(10) = a, P(-6) = b$,我們取五點 $(1,2),(2,5),(3,20),(10,a)$ 和 $(-6,b)$. 由拉格朗日插值定理,構造這五點的多項式 $P(x)$:

$$P(x) = \frac{(x-2)(x-3)(x-10)(x+6)}{(1-2)(1-3)(1-10)(1+6)} \cdot 2 + \frac{(x-1)(x-3)(x-10)(x+6)}{(2-1)(2-3)(2-10)(2+6)} \cdot 5$$

$$+ \frac{(x-1)(x-2)(x-10)(x+6)}{(3-1)(3-2)(3-10)(3+6)} \cdot 20 + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x+6)}{(10-1)(10-2)(10-3)(10+6)} \cdot a$$

$$+ \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-10)}{(-6-1)(-6-2)(-6-3)(-6-10)} \cdot b$$

$$= -\frac{1}{63}(x-2)(x-3)(x-10)(x+6) + \frac{5}{64}(x-1)(x-3)(x-10)(x+6)$$

$$= -\frac{10}{63}(x-1)(x-2)(x-10)(x+6) + \frac{a}{8064}(x-1)(x-2)(x-3)(x+6)$$

$$= +\frac{b}{8064}(x-1)(x-2)(x-3)(x-10).$$

因為 $P(x)$ 的首項次數為 1,則

$$-\frac{1}{63} + \frac{5}{64} - \frac{10}{63} + \frac{a}{8064} + \frac{b}{8064} = 1$$

$$\frac{a+b}{8064} = 1 + \frac{389}{4032}$$

$$a + b = 8842.$$

$\therefore P(10) + P(-6) = a + b = 8842.$

由解答過程可見,條件的更換對拉格朗日插值法並無影響. 由此,我們得到了更一般性的解題策略:已知 n 次多項式 $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$,其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 為常數,若已知 $P(1), P(2), \cdots, P(n-1)$ 的值,我們可利用拉格朗日插值法求出某些 $P(u) \pm P(v)$ 的值($u,v \notin \{1,2,\cdots,n-1\}$).

對比構造法與拉格朗日插值法的利弊,在操作過程中,構造法的過程較為簡短,但是其受限性較大;拉格朗日插值法的過程繁瑣,且運算量大,但是對於一些沒有規律性(函數值不成比例)的題目,也可求值. 在競賽上,對於高次且有規律的題目,可選擇用構造法解題,即變形 4;對於一些低次且無規律的題目,可選擇更具一般性的拉格朗日插值法解題,即變形 5. 當然,兩種方法都可以同時使用.

至此,我們把命題推廣到一般性的情況,同時也完成了對解答過程的剖析. 利用以上結

論以及兩種解法可以解出更多類似的題目. 下面附上相關的練習題及答案,讀者不妨試一試.

［練習題］

1. 設 $P(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$,其中 a,b,c,d 為常數. 若 $P(1)=2000$,$P(2)=4000$,$P(3)=6000$,試求 $P(7)+P(-3)$ 的值.

2. 設 $P(x)=x^6+ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f$,其中 a,b,c,d,e,f 為常數. 若 $P(1)=5$,$P(2)=10$,$P(3)=15$,$P(4)=20$,$P(5)=25$,試求 $P(11)+P(-5)$ 的值.

3. 設 $P(x)=x^5,ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$,其中 a,b,c,d,e 為常數. 若 $P(1)=4$,$P(2)=8$,$P(3)=12$,$P(4)=16$,試求 $P(9)-P(-4)$ 的值.

4. 設 $p(x)=x^7+a_1x^6+a_2x^5+a_3x^4+a_4x^3+a_5x^2+a_6x+a_7$,其中 $a_1,a_2,\cdots,a_7$ 為常數. 若 $P(1)=1$,$P(2)=3$,$P(3)=8$,$P(4)=13$,$P(5)=19$,$P(6)=20$,試求 $P(12)-P(-5)$ 的值.

5. 已知 $P(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$,其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 為常數. 若 $P(w)=r$,$P(2w)=2r$,$\cdots$,$P((n-1)w)=(n-1)r$,求證:當 n 為偶數時,$f(t)+f(nw-t)=2(t-w)(t-2w)\cdots\left(t-\frac{nw}{2}\right)^2\cdots(t-(n-1)w)+\frac{nr}{w}$($r,t,w$ 為常數,$t\notin\{1,2,\cdots,n-1\}$).

6. 已知 $P(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$,其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 為常數. 若 $P(1)=r$,$P(2)=2r$,$\cdots$,$P(n-1)=(n-1)r$,求證:當 n 為偶數且 $t\geq n$ 時,$f(t)+f(n-t)=C_t^n\cdot n\left[2(n-1)!-\frac{n!}{t}+r\right]$($r,t$ 為常數).

［參考答案］

1. ［解］因為 n 為偶數,由變形 4 得: $P(7)+P(-3)=2\cdot(7-1)\cdot(7-2)^2\cdot(7-3)+4\cdot 2000=9200$.

2. ［解］因為 n 為偶數,由變形 4 得: $P(11)+P(-5)=2\cdot(11-1)\cdot(11-2)\cdot(11-3)^2\cdot(11-4)\cdot(11-5)+6\cdot 5=483870$.

3. ［解］因為 n 為奇數,由變形 4 得: $P(9)-P(-4)=[(9-1)\cdot(9-2)\cdot(9-3)\cdot(9-4)+4]\cdot(18-5)=21892$.

4. ［解］因為 $P(1):P(2):\cdots\neq 1:2:\cdots$,所以我們要利用變形 5. 設 $P(12)=a$,$P(-5)=b$,我們取八點 $(1,1)$,$(2,3)$,$(3,8)$,$(4,13)$,$(5,19)$,$(6,20)$,$(12,a)$ 和 $(-5,b)$. 由拉格朗日插值定理,構造過這七點的多項式 $P(x)$:

$$P(x)=\frac{(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-12)(x+5)}{(1-2)(1-3)(1-4)(1-5)(1-6)(1-12)(1+5)}\cdot 1$$

$$+\frac{(x-1)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-12)(x+5)}{(2-1)(2-3)(2-4)(2-5)(2-6)(2-12)(2+5)}\cdot 3$$

$$+\frac{(x-1)(x-2)(x-4)(x-5)(x-6)(x-12)(x+5)}{(3-1)(3-2)(3-4)(3-5)(3-6)(3-12)(3+5)}\cdot 8$$

$$+\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-6)(x-12)(x+5)}{(4-1)(4-2)(4-3)(4-5)(4-6)(4-12)(4+5)}\cdot 13$$

$$+\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-6)(x-12)(x+5)}{(5-1)(5-2)(5-3)(5-4)(5-6)(5-12)(5+5)}\cdot 19$$

$$+\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-12)(x+5)}{(6-1)(6-2)(6-3)(6-4)(6-5)(6-12)(6+5)}\cdot 20$$

$$+\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x+5)}{(12-1)(12-2)(12-3)(12-4)(12-5)(12-6)(6+5)}\cdot a$$

$$+\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-12)}{(-5-1)(-5-2)(-5-3)(-5-4)(-5-5)(-5-6)(-5+12)}\cdot b$$

因為 $P(x)$ 的首項次數為 1,則

$$\frac{1}{(1-2)(1-3)(1-4)(1-5)(1-6)(1-12)(1+5)}$$

$$+\frac{3}{(2-1)(2-3)(2-4)(2-5)(2-6)(2-12)(2+5)}$$

$$+\frac{8}{(3-1)(3-2)(3-4)(3-5)(3-6)(3-12)(3+5)}$$

$$+\frac{13}{(4-1)(4-2)(4-3)(4-5)(4-6)(4-12)(4+5)}$$

$$+\frac{19}{(5-1)(5-2)(5-3)(5-4)(5-6)(5-12)(5+5)}$$

$$+\frac{20}{(6-1)(6-2)(6-3)(6-4)(6-5)(6-12)(6+5)}$$

$$+\frac{a}{(12-1)(12-2)(12-3)(12-4)(12-5)(12-6)(12+5)}$$

$$+\frac{b}{(-5-1)(-5-2)(-5-3)(-5-4)(-5-5)(-5-6)(-5-12)}=1$$

$$\frac{1}{7920}-\frac{1}{560}+\frac{1}{108}-\frac{13}{864}+\frac{19}{1680}-\frac{1}{396}+\frac{a}{5654880}-\frac{b}{5654880}=1$$

$$a-b=5647315.$$

$\therefore P(12)-P(-5)=a-b=5647315.$

5. [**證明**] 設 $g(x)=P(x)-\frac{rx}{w}$,則 $P(x)=g(x)+\frac{rx}{w}$. 因為 $g(w)=g(2w)=\cdots=g((n-1)w)=0$,所以 $x=w,2w,\cdots,(n-1)w$ 為 $g(x)=0$ 的根. 易知 $g(x)$ 的首項係數為 1,可設 $g(x)=(x-w)(x-2w)\cdots(x-(n-1)w)(x-k)$,其中 k 為常數. 所以

$$\text{左邊}=\left(g(t)+\frac{rt}{w}\right)+\left(g(nw-t)+\frac{(n\cdot w-t)r}{w}\right)$$

$$=(t-w)(t-2w)\cdots(t-(n-1)w)(t-k)+(nw-t-w)(nw-t-2w)$$

$\cdots(n\cdot w-t-(n-1)w)(nw-t-k)+\dfrac{nr}{w}$

$=(t-w)(t-2w)\cdots(t-(n-1)w)(t-k)+((n-1)w-t)((n-2)w-t)$

$\cdots(w-t)(nw-t-k)+\dfrac{nr}{w}.\cdots\cdots①$

因為 n 為偶數,所以 ① 可化為

$(t-w)(t-2w)\cdots(t-(n-1)w)(t-k)-(t-(n-1)w)(t-(n-2)w)$

$\cdots(t-w)(nw-t-k)+\dfrac{nr}{w}$

$=(t-w)(t-2w)\cdots(t-(n-1)w)(2t-nw)+\dfrac{nr}{w}$

$=2(t-w)(t-2w)\cdots\left(t-\dfrac{nw}{2}\right)^2\cdots(t-(n-1)w)+\dfrac{nr}{w}=$ 右邊.

$\because$ 左邊 = 右邊　$\therefore$ 命題成立.

6. [**證明**] 因為 n 為偶數,由變形4 可得:左邊 $=2(t-1)(t-2)\cdots\left(t-\dfrac{n}{2}\right)^2\cdots(t-n+1)+nr$. 因為 $t\geq n$,所以

左邊 $=2(t-1)(t-2)\cdots\left(t-\dfrac{n}{2}\right)^2\cdots(t-n+1)+nr$

$=(t-1)(t-2)\cdots(t-n+1)(2t-n)+nr$

$=\dfrac{t(t-1)(t-2)\cdots(t-n+1)(2t-n)}{n!}\cdot\dfrac{n!}{t}+nr$

$=C_1^n\cdot\dfrac{n!}{t}(2t-n)+nr=C_1^n\cdot n\left[\dfrac{(n-1)!(2t-n)}{t}+r\right]$

$=C_1^n\cdot n\left[2(n-1)!-\dfrac{n!}{t}+r\right]=$ 右邊.

$\because$ 左邊 = 右邊　$\therefore$ 命題成立.

數學競賽常用不等式解題技巧應用及總結

勞校中學　　高一 李耀輝　　指導老師 魏均僑

不等式的證明與求最值問題是高中數學競賽中極為重要的內容，其解題技巧靈活多變. 以下介紹五種最常用的解題技巧，分別是齊次法、換元法、反證法、放縮法及數學歸納法.

一. 齊次法

在使用均值不等式、柯西不等式與排序不等式時，如果能使不等號左右兩邊或分子和分母次數相等的話，問題將會更具有對稱性，這有利於等價變換命題.

1.1 簡單齊次法

[**例** 1] 已知 $x+y+z=1$，求 $\frac{1-z}{xy}+\frac{1}{z}$ 的最小值.

[**思路**] 觀察到 $x+y=1-z$，原不等式可化為 $\frac{x+y}{xy}+\frac{1}{z}$. 觀察知，$x+y$ 為 1 次，xy 為 2 次，1 為 0 次，z 為 1 次，分子與分母的次數不相等，可利用 $x+y+z=1$ 來齊次化式子.

[**解**] 據已知條件 $x+y+z=1$，對 $\frac{1-z}{xy}+\frac{1}{z}$ 進行變形，得

$$\frac{(x+y+z)-z}{xy}+\frac{1}{z}=\frac{x(x+y+z)+y(x+y+z)}{xy}+\frac{x+y+z}{z}$$

$$=\frac{x^2+y^2+2xy+xz+yz}{xy}+\frac{x+y}{z}+1$$

$$=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{z}{x}+\frac{x}{z}+\frac{y}{z}+3\geq 6\cdot\sqrt[6]{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}\cdot\frac{z}{y}\cdot\frac{z}{x}\cdot\frac{x}{z}\cdot\frac{y}{z}}+3=6+3=9$$

等號當且僅當 $x=y=z=\frac{1}{3}$ · 時成立，故所求最小值為 9.

[**例** 2] 已知 a,b,c 為正實數，且 $a+b+c=1$，求證：

$$a^2+b^2+c^2+2\sqrt{3abc}\leq 1.$$

[**思路**] 關鍵是利用已知條件齊次化不等式，把不等式轉換為更簡單的形式.

[**解**] 因為 $a+b+c=1$，則不等式可轉換為

$$a^2+b^2+c^2+2\sqrt{3abc(a+b+c)}\leq(a+b+c)^2.$$

$$\sqrt{3abc(a+b+c)} \leq ab+bc+ac.$$

因為$(ab+bc+ac)^2 = a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2+2abc(a+b+c)$,

於是只需證明

$$abc(a+b+c) \leq a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2.$$

$$a^2bc+ab^2c+abc^2 \leq a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2.$$

設$x=ab, y=bc, z=ac$,則只需證明

$$xy+yz+xz \leq x^2+y^2+z^2.$$

根據對稱性,不妨設$x \geq y \geq z$,由排序不等式$x \cdot y+y \cdot z+x \cdot z \leq x \cdot x+y \cdot y+z \cdot z$. 可得上式. 以上過程可逆,原不等式得證. 等號當且僅當$x=y=z$,即$a=b=c$時成立.

二. 換元法

換元法又稱變量替換法,即把不等式中的某些部分看作一個整體,並用其他字母代替. 換元法能使題目變得明朗化及簡單化,令思路變得更為清晰,有助解決問題.

2.1 基本換元法

[**例 3**] 設a,b,c是三角形的三邊長,s是三角形的半周長,求證:

$$abc \geq 8(s-a)(s-b)(s-c).$$

[**思路**] 首先利用換元法把不等式的結構化為常見形式,然後利用基本不等式證明命題.

[**解**] 設$a=x+y, b=y+z, c=x+z$,其中$x,y,z>0$,則

$$s=\frac{1}{2}(a+b+c)=x+y+z.$$

原不等式等價於

$$(x+y)(y+z)(x+z) \geq 8xyz.$$

由均值不等式,可得$x+y \geq 2\sqrt{xy}, y+z \geq 2\sqrt{yz}, x+z \geq 2\sqrt{xz}$. 三式相乘,得

$$(x+y)(y+z)(x+z) \geq 2\sqrt{xy} \cdot 2\sqrt{yz} \cdot 2\sqrt{xz} = 8xyz.$$

等號當且僅當$x=y=z$時成立,故原不等式成立.

2.2 增量換元法

增量換元法是一種常見的進階換元法,我們需要構造等式以聯繫題目中的各個已知量,再代入已知條件進行分析,這種換元法適合用於已知條件含有較多不等號的題型.

[**例 4**] 若$a_1 \geq a_2 > 0, a_1 \geq b_1 \geq b_2, a_1a_2 \geq b_1b_2$,求證:$a_1+a_2 \geq b_1+b_2$.

[**思路**] 我們無法把題目的三個條件和需求證的不等式直接聯繫. 在條件中,a_1是最大的一個量,所以不妨把a_1與a_2, b_1, b_2使用增量聯繫起來,再代入題目的已知條件.

[**解**] 設$a_1=a_2+x_1, a_1=b_1+x_2, a_1=b_2+x_3$,其中$x_1,x_2,x_3 \geq 0$. 因為$a_1a_2 \geq b_1b_2$,則

$$a_1(a_1-x_1)\geq(a_1-x_2)(a_1-x_3),$$

$$a_1^2+a_1x_1\geq a_1^2+x_2x_3-a_1x_2-a_1x_3$$

$$-a_1x_1+a_1x_2+a_1x_3-x_2x_3\geq 0,$$

$$a_1(x_2+x_3-x_1)\geq x_2x_3.$$

而 $x_2x_3\geq 0$ 且 $a_1\geq 0$,則 $x_2+x_3-x_1\geq 0$,也就是 $x_2+x_3\geq x_1$.

現在需證明的不等式為 $a_1+a_2\geq b_1+b_2$,也就是證明

$$2a_1-x_1\geq 2a_1-(x_2+x_3).$$

亦即 $x_1\leq x_2+x_3$. 以上過程可逆,因此不等式得證.

三. 反證法

若題目的結論不容易通過條件直接得出,往往需要使用反證法. 首先假設結論不成立,然後通過題目條件推導矛盾,從而證明結論是成立的.

[**例 5**] 設 $f(x)=x^2+px+q$,求證:$|f(1)|,|f(2)|,|f(3)|$中至少有一個不小於$\frac{1}{2}$.

[**思路**] 求證命題中出現了“至少”二字,適合使用反證法. 另外,問題涉及絕對值的計算,解題時需注意去除絕對值.

[**解**] 假設$|f(1)|,|f(2)|,|f(3)|$皆小於$\frac{1}{2}$,則

$$|1+p+q|<\frac{1}{2}\Rightarrow-\frac{3}{2}<p+q<-\frac{1}{2}. \quad \cdots\cdots①$$

$$|4+2p+q|<\frac{1}{2}\Rightarrow-\frac{9}{2}<2p+q<-\frac{7}{2}. \quad \cdots\cdots②$$

$$|9+3p+q|<\frac{1}{2}\Rightarrow-\frac{19}{2}<3p+q<-\frac{17}{2}. \quad \cdots\cdots③$$

① + ③,可得

$$-11<4p+2q<-9\Rightarrow-\frac{11}{2}<2p+q<-\frac{9}{2}. \cdots\cdots④$$

④ 和 ② 矛盾,假設不成立,所以$|f(1)|,|f(2)|,|f(3)|$中至少有一個不小於$\frac{1}{2}$.

[**例 6**] 設 a,b 是實數,函數$f(x)=ax+b+\frac{9}{x}$,求證:存在 $x_0\in[1,9]$,使得$|f(x)|\geq 2$.

[**思路**] 本題難以直接得出結論,可以使用反證法並進行消元,從而推出矛盾.

[**解**] 假設對任意在 $x_0\in[1,9]$, 均有 $|f(x)|<2$, 則有 $|f(1)|<2$, $|f(3)|<2$, $|f(9)|<2$. 由$f(x)=ax+b+\frac{9}{x}$,可得

$$f(1)=a+b+9. \cdots\cdots ①$$
$$f(3)=3a+b+3. \cdots\cdots ②$$
$$f(9)=9a+b+1. \cdots\cdots ③$$

由①,②可得$f(3)-f(1)=2a-6$,由②,③可得$f(9)-f(3)=6a-2$.

上述兩式消去a,可知$f(9)-f(3)-3\cdot[f(3)-f(1)]=16$. 但由假設,可得

$f(9)-f(3)-3\cdot[f(3)-f(1)]\le|f(9)|+|f(3)|+3|f(3)-f(1)|<2+2+3\cdot|2+2|=16$.

矛盾,假設不成立. 故必然存在$x_0\in[1,9]$,使得$|f(x)|\ge 2$.

四. 放縮法

根據解題需要,可以對不等式的一邊進行放縮,即把其放大或縮小,並利用不等式的傳遞性證明命題.

[**例** 7] 已知n為正整數且$n\ge 2$,求證:

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^2}<2.$$

[**思路**] 通過放縮變換,可對不等式左式進行裂項.

[**解**] 因為$\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n(n-1)}(n\ge 2)$,則

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^2}<\frac{1}{1}+\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n-1)}$$
$$=1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=2-\frac{1}{n}.$$

因為$n\ge 2$,則$2-\frac{1}{n}<2$. 故$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^2}<2$.

[**例** 8] 已知n為正整數,求證:

$$\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}\right)^2<\frac{1}{2n+1}.$$

[**思路**] 當$p>q>0$時,$\frac{q}{p}<\frac{q+1}{p+1}$恆成立,因此可對左式進行放縮處理.

[**解**] 設$A=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}$,$B=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{2n}{2n+1}$.

$\because\ \frac{2k-1}{2k}<\frac{2k}{2k+1}.(k=1,2,3,\cdots,n)$

$\therefore A=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{2n}{2n+1}=B.$

$\therefore A^2=A\cdot A<A\cdot B=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots\cdots(2n-1)(2n)}{(2n)(2n+1)}=\frac{1}{2n+1}$,

$\therefore$ 原不等式成立.

五. 數學歸納法

當要證明的不等式對任意正整數皆成立時,往往可以使用數學歸納法,利用其歸納特性,可以把原不等式轉化,這樣有利於證明不等式.

[**例** 9] 已知 n 為正整數,求證:

$$\sqrt{1\times 2}+\sqrt{2\times 3}+\sqrt{3\times 4}+\cdots\cdots+\sqrt{n(n+1)}<\frac{1}{2}(n+1)^2.$$

[**思路**] 不等式對任意正整數 n 成立,可考慮使用數學歸納法,歸納所證不等式也會變得簡短.

[**解**] 當 $n=1$ 時,有 $\sqrt{1\times 2}<2$,不等式成立.

假設當 $n=k$ 時,有 $\sqrt{1\times 2}+\sqrt{2\times 3}+\sqrt{3\times 4}+\cdots\cdots+\sqrt{k(k+1)}<\frac{1}{2}(k+1)^2$. 當 $n=k+1$ 時,只需證明

$$\sqrt{1\times 2}+\sqrt{2\times 3}+\sqrt{3\times 4}+\cdots\cdots+\sqrt{(k+1)(k+2)}<\frac{1}{2}(k+2)^2\cdots\cdots①$$

由假設可得

$$\sqrt{1\times 2}+\sqrt{2\times 3}+\sqrt{3\times 4}+\cdots\cdots+\sqrt{(k+1)(k+2)}<\frac{1}{2}(k+1)^2+\sqrt{(k+1)(k+2)}$$

根據不等式的傳遞性,只需證明

$$\frac{1}{2}(k+1)^2+\sqrt{(k+1)(k+2)}<\frac{1}{2}(k+2)^2$$

$$\frac{1}{2}(k^2+2k+1)+\sqrt{k^2+3k+2}<\frac{1}{2}(k^2+4k+4)$$

$$\sqrt{k^2+3k+2}<k+\frac{3}{2}$$

$$k^2+3k+2<k^2+3k+\frac{9}{4}.$$

上式明顯成立,因此 ① 成立. 由數學歸納法知,對任意正整數 n 不等式成立.

[**例** 10] 設為個非負實數,求證:

$$\sqrt{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}+\sqrt{a_2+a_3+\cdots+a_n}+\sqrt{a_3+\cdots+a_n}+\cdots+\sqrt{a_n}\geq\sqrt{a_1+4a_2+9a_3+\cdots+n^2a_n}\,.$$

[**思路**] 可利用歸納假設轉換問題,這為使用柯西不等式創造條件.

[**解**] 當 $n=1$ 時, $\sqrt{a_1}\geq\sqrt{a_1}$ 顯然成立.

假設當 $n=k$ 時不等式成立,則當 $n=k+1$ 時,只需證明

$$\sqrt{a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_{k+1}}+\sqrt{a_2+a_3+\cdots\cdots+a_{k+1}}+\sqrt{a_3+\cdots\cdots+a_{k+1}}\cdots\sqrt{a_{k+1}}$$

$$\geq \sqrt{a_1 + 4a_2 + 9a_3 + \cdots\cdots + (k+1)^2 a_{k+1}}. \cdots\cdots ①$$

由假設可得

$$\sqrt{a_2 + a_3 + \cdots + a_{k+1}} + \sqrt{a_3 + \cdots + a_{k+1}} + \cdots + \sqrt{a_{k+1}} \geq \sqrt{a_2 + 4a_3 + \cdots + k^2 a_{k+1}},$$

因此有

$$\sqrt{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_{k+1}} + \sqrt{a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_{k+1}} + \sqrt{a_3 + \cdots\cdots + a_{k+1}} \cdots \sqrt{a_{k+1}}$$

$$\geq \sqrt{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_{k+1}} + \sqrt{a_2 + 4a_3 + \cdots\cdots + k^2 a_{k+1}}.$$

只需證明

$$\sqrt{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_{k+1}} + \sqrt{a_2 + 4a_3 + \cdots\cdots + k^2 a_{k+1}}$$

$$\geq \sqrt{a_1 + 4a_2 + 9a_3 + \cdots + (k+1)^2 a_{k+1}}.$$

平方整理,不等式可轉換為

$$\sqrt{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_{k+1}} + \sqrt{a_2 + 4a_3 + \cdots\cdots + k^2 a_{k+1}} \geq a_2 + 2a_3 + \cdots + k a_{k+1}.$$

$\cdots\cdots ②$

由柯西不等式,可得

$$(a_2 + a_3 + \cdots + a_{k+1}) \cdot (a_2 + 4a_3 + \cdots + k^2 a_{k+1})$$

$$\geq \left(\sqrt{a_2 \cdot a_2} + \sqrt{4 \cdot a_3 \cdot a_3} + \sqrt{9 \cdot a_4 \cdot a_4} + \sqrt{k^2 \cdot a_{k+1} \cdot a_{k+1}}\right)^2 = (a_2 + 4a_3 + \cdots + k^2 a_{k+1})^2.$$

因 $a_1 \geq 0$,則②成立. 因此,當 $n = k + 1$ 時不等式成立. 由數學歸納法知,對任意正整數 n,不等式成立.

六. 總結

不等式證明往往需要多種技巧一同配合使用. 若命題難以通過題目已知條件直接得出,往往需要使用反證法;若需要證明不等式在自然數範圍內皆成立,可使用數學歸納法;若不等式的分子分母的次數不相等,可使用齊次法;若需要解剖不等式的本質時,可使用換元法;若不等式不含有等號時,不妨使用放縮法. 以上五種技巧為數學競賽最常用技巧,反證法和數學歸納法通常可搭配放縮法使用,其他使用技巧有待讀者發掘.

澳門數學教育研究學會

聯絡地址:澳門殷皇子大馬路 11 號群發花園第一座 14 樓 A

電話:853 - 28965253,853 - 66878553 傳眞:853 - 28788259

E - mail: macaumath@ yahoo. com. hk , inwmacau@ yahoo. com. hk

Website:http://www. mathsmo. com/

會務活動紀錄

2002 年

6 月 17 日　在氹仔海島公證署辦理本會註冊手續。

2003 年

6 月 7 日　舉辦"中國數學教學的雙基原理 —2002 年數學教育高級研討班"——會議精神傳達報告會。

12 月 13、14 日　舉行中小學"數學開放題教學" 專題研討會及示範課。

12 月　《澳門數學教育》創刊號出版。

2004 年

4 月 17 日　舉辦"DM_Lab 和動態數學教學" 講座。

9 月 30 日　赴杭州拜訪教育研究中心,訪問海寧市崇文實驗學校及杭州市南宛小學。

10 月 9、10 日　舉行"數學情景與提出問題教學" 專題研討會及示範課。

2005 年

3 月 24 - 28 日　赴貴陽、興義市參觀和交流,訪問興義八中和延安路小學。

4 月 16 日　與教育出版社合辦"突破兒童數學思維空間" 研討會及《新思維數學》教材展覽會。

11 月 26、27 日　舉行"全國小學特級數學男教師教學風采展示" 專題研討會及示範課。

12 月 20 - 28 日　前往武漢訪問華中師範大學第一附屬中學、東方紅小學以及育才第二小學。

2006 年

3 月 4 日　舉辦"因材施教、拔尖保底 —— 如何幫助數學差生學習" 專題研討會。

4 月 14、15 日　赴廣東省河原市第二小學和河源市中學觀課。
6 月 25 – 29 日　前往山東濟南參觀濟南第十二中學和解放路第一小學。
12 月 9 – 10 日　舉行“國家數學教育高級研修班‘數學教師教育’澳門會議”。

2007 年

4 月 28、29 日　與全國嘗試教學理論研究會合辦“兩岸四地小學數學課堂教學觀摩及說課比賽”。
7 月 4、5 日　與澳門大學教育學院合辦“有效的數學教學：一個國際視角”及“有效數學教學實務：美國的經驗”講座。
7 月 30 日至
8 月 3 日　訪問陝西省西安市吉祥路小學、西安市第一中學、西北工業大學附小。
9 月 1 日　舉辦“創造性數學的想法及方法運用”講座。

2008 年

11 月 1 日　舉辦“小學數學專家講座”。
11 月 22 日　舉辦“中學數學教育改革成功經驗介紹暨課堂教學展示”專題會議。

2009 年

5 月 29 日、30 日　前往美國參加第 34 屆美國高中數學競賽（ARML），榮獲國際組第一名。
8 月 15 日 ~ 20 日　訪問內蒙古包頭市鐵路二中。
11 月 14 日　舉辦“數學教學的有效性與開放性”研討大會及示範課。
12 月 5 日、6 日　舉辦“第一屆澳門小學數學優質課堂教學”評比大會。
（慶祝祖國成立 60 週年，澳門回歸 10 週年，本會成立 5 週年活動）

2010 年

6 月　成立“澳門數學奧林匹克學會”，政府憲報刊登該會章程。
11 月 26 日、27 日　組織 18 名數學優秀學生前往北京參加首屆世界數學團體錦標賽。
1 月 18 日　華東師範大學聘請汪會長擔任華東師範大學國際數學奧林匹克研究中心澳門實驗培訓基地主任。

2011 年

1 月 28 日　「美國高中數學競賽」澳門區代表隊榮獲澳門特區政府頒授功績獎狀。
9 月 27 日、28 日　與澳門大學教育學院合辦“國際著名教育家蘇霍姆林斯基教育理念介紹會”。

2012 年

6 月 9 日　　　舉辦“如何激發學生數學創造力講座暨中學數學課堂教學展示”公開課。

8 月 1 – 6 日　　赴吉林、延邊中、小學進行學術交流。

11 月 3 – 4 日　　舉辦“全國小學數學四大教學流派課堂教學展示課”。

11 月 3 日晚上　　舉行慶祝本會成立十週年晚宴,十週年成果展。

2013 年

4 月 6 日　　　舉辦亞太區小學奧數(澳門區)選拔賽。

4 月 14 日　　　進行中學第二十四屆、小學第十一屆“希望杯”澳門地區第二試決賽。

4 月 16 日　　　名譽會長陳明金先生宴請本會,表示對本澳數學教育的支持和鼓勵。

5 月 11 日　　　舉辦“幼兒教育理論講座與幼兒教學實踐示範課”。

6 月 1 日　　　赴新加坡參加 2013 亞太小學數學奧林匹克總決賽。

5 月 31、6 月 1 日 前往美國參加第 38 屆美國高中數學競賽(ARML),澳門隊第二。

6 月 15 – 19 日　舉辦數學實驗 —— 統計與概率工作坊。

7 月 10 日　　　澳門基金會為 ARML 澳門隊凱旋而歸的健兒舉行慶功宴。

7 月 18 日　　　舉行希望杯、亞太區小學奧數(新加坡)、數學大王賽頒獎禮暨(ARML)美國高中數學競賽成果滙報會。

8 月 1 – 7 日　　赴哈爾濱、鷄西中、小學進行學術交流。

11 月 16 – 17 日 與澳門大學教育學院合辦「嘗試教學理論研究華人論壇」和幼兒教育報告會。

12 月 7 – 9 日　　舉辦「中學、小學數學奧林匹克教練員考級証書培訓班」。

12 月　　　　　《澳門數學教育》第十一期出版。

2014 年

1 月 11 日　　　舉行「幾何王」初中平面幾何學習軟件介紹會。

4 月 3 日　　　拜訪澳門基金會。

4 月 13 日　　　進行中學第二十五屆、小學第十二屆“希望杯”澳門地區第二試決賽。

4 月 15 日　　　拜訪澳門教育暨青年局。

4 月 17 日至 21 日赴臺灣澎湖、高雄參訪活動。

4 月 26 日　　　舉辦“史豐收速算法”介紹會。

5 月 30 – 31 日　前往美國參加第 39 屆美國高中數學競賽(ARML),澳門隊第二。

6 月 14 日　　　舉行「領導數學科組工作經驗介紹會暨瀋陽七中教學展示課」活動。

7 月 11 日　　　舉行「幾何王」初中平面幾何學習軟件培訓班。

7 月 12 日　舉行希望杯、亞太區小學奧數(新加坡)、數學大王賽、環亞太杯國際數學賽、中小學數學奧林匹克教練員考級証書頒獎禮暨(ARML) 美國高中數學競賽成果滙報會。

8 月 10 – 16 日　派學生前往四川西昌參加澳門基金會教科文中心航天團。

10 月 18 日　舉辦“熟能生巧數學觀點講座暨高中數學教學展示課”。

11 月 22 – 23、29 – 30 日　舉辦“史豐收速算法” 導師培訓班。

12 月 6 日、7 日　舉辦“第五屆澳門小學數學優質課堂教學” 評比大會暨全國協作區孔子杯小學數學課堂教學大賽(澳門賽區)。

12 月　《澳門數學教育》第十二期出版。

2015 年

1 月 16 日　拜訪澳門基金會。

1 月 31 日　舉行成立 “史豐收速算法” 培訓基地新聞發佈會。

4 月 12 日　進行中學第二十六屆、小學第十三屆“希望杯” 澳門地區第二試決賽。

4 月 19 日　拜訪澳門教育暨青年局。

5 月 10 日　汪會長參加上海“小學數學教師教育高級研修班” 。

5 月 23 日　舉行「任勇的數學教學主張」講座。

5 月 28 – 31 日　前往新加坡參加第 26 屆亞太區小學數學奧林匹克賽決賽。

5 月 29 – 30 日　前往美國參加第 40 屆美國高中數學競賽(ARML),澳門隊重獲冠軍。

6 月 13 日　舉行希望杯、亞太區小學奧數(新加坡)、數學大王賽、環亞太杯國際數學賽暨(ARML) 美國高中數學競賽成果滙報會。

6 月 3 – 7 日　澳門大學教育學院與本會合辦“數學整數教育” 專題研討會。

6 月 6 日　邀請意大利幾何學專家和捷克數學家教育專家舉行講座。

6 月 27 日　往港參加史豐收速算兩岸三地比賽。

7 月 11 日　與澳門大學教育學院、香港資優教育學會合辦「環亞太杯國際數學邀請賽總決賽」。

8 月　《兩岸三地升大數學教程》出版。

8 月 8 – 12 日　澳門隊赴桂林參加 WMI 世界數學邀請賽。

8 月 15 – 20 日　赴陝西省進行學術交流。

10 月 17 日　舉辦“幼兒教育報告會及幼兒史豐收速算法演示課”。

12 月 5 日、6 日　舉辦“第一屆小學新思維數學‘澳門杯’ 課堂教學大賽評比大會”。

12 月 7 日　獲澳門特別行政區授予團隊功績獎狀。

12 月　《澳門數學教育》第十三期出版。

2016 年

1 月 17 日　　　舉辦“兒童資優培育”介紹會。
3 月 5 日　　　舉辦“希望杯數學競賽試題分析”講座。
3 月 19 日　　　合辦“中、小學數學實驗和智力發展”專題講座。
5 月 26 －29 日　前往新加坡參加第 27 屆亞太區小學數學奧林匹克賽決賽。
6 月 3 －4 日　　前往美國參加第 41 屆美國高中數學競賽(ARML),澳門隊獲亞軍。
6 月 18 日　　　舉行希望杯、亞太區小學奧數(新加坡)、數學大王賽、環亞太杯國際數學賽暨(ARML)美國高中數學競賽成果滙報會。
10 月 22 日　　　舉辦“雲南麗江市教育局講座暨中學示範課”。
11 月 19 日　　　舉辦“四川省成都市成華小學示範課”。
11 月 25 －29 日 前往馬來西亞參加 MIMO 馬來西亞國際奧數競賽。
12 月 10 －11 日 舉辦第二屆小學“新思維數學”澳門杯課堂教學比賽。
12 月　　　　　《澳門數學教育》第十四期出版。

2017 年

3 月 11 日　　　慶祝十五周年會慶暨春茗聚餐。
5 月 25 －28 日　前往新加坡參加第 28 屆亞太區小學數學奧林匹克賽決賽。
6 月 2 －3 日　　前往美國參加第 42 屆美國高中數學競賽(ARML)。
6 月 17 日　　　希望杯、亞太區小學奧數(新加坡)、數學大王賽、環亞太杯國際數學賽暨(ARML)美國高中數學競賽成果滙報會。
7 月 8 －9 日　　舉行首辦「首屆奧林匹克數學三維杯環亞太國際邀請賽賽(2017)」。
9 月 12 日　　　拜訪譚俊榮司長。
11 月 4 日　　　舉辦“海峽兩岸小學數學課堂教學交流展示”。
12 月 9 日、10 日 舉辦第三屆小學“新思維數學”澳門杯課堂教學比賽。
12 月　　　　　《澳門數學教育》第十五期出版。

2018 年

1 月 28 日　　　前往中山拜訪華星幼稚園。
4 月 28 日　　　舉辦「世界七大數學死題破解演講會」。
5 月 24 －29 日　前往新加坡參加第 29 屆亞太區小學數學奧林匹克賽決賽。
6 月 1 －2 日　　前往美國參加第 43 屆美國高中數學競賽(ARML)。
6 月 30 日－
7 月 2 日　　　合辦 2018 三維杯環亞太國際數學邀請賽(香港舉行)。
7 月 7 日　　　希望杯、數學大王國際邀請賽、環亞太杯國際數學賽暨(ARML)美國高中數學競賽成果滙報會。

5 月 25 －28 日 前往新加坡參加第 28 屆亞太區小學數學奧林匹克賽決賽。
6 月 為香港名創教育(文達出版社)編輯的澳門基力數學探知 1A 和 1B 出版。
6 月 16 －17 日 前往深圳出席 2018 全國史豐收數學速算法大獎賽。
10 月 13 日 舉辦「使用漫畫進行數學教學 — 來自新加坡的經驗」講座。
11 月 10 日 舉辦「世界數學難題一尺解第二次講座」。
11 月 23 －27 日 前往馬來西亞力行華小學參加第 5 屆 馬來西亞國際數學奧林匹克競賽。
12 月 8 －9 日 第二十八屆「滙業盃中學生常識問答比賽」數學命題,為協辦單位。
12 月 15 日、16 日 舉辦常港澳小學「新思維數學」課堂教學邀請賽。
12 月 《澳門數學教育》第十六期出版。

2019 年

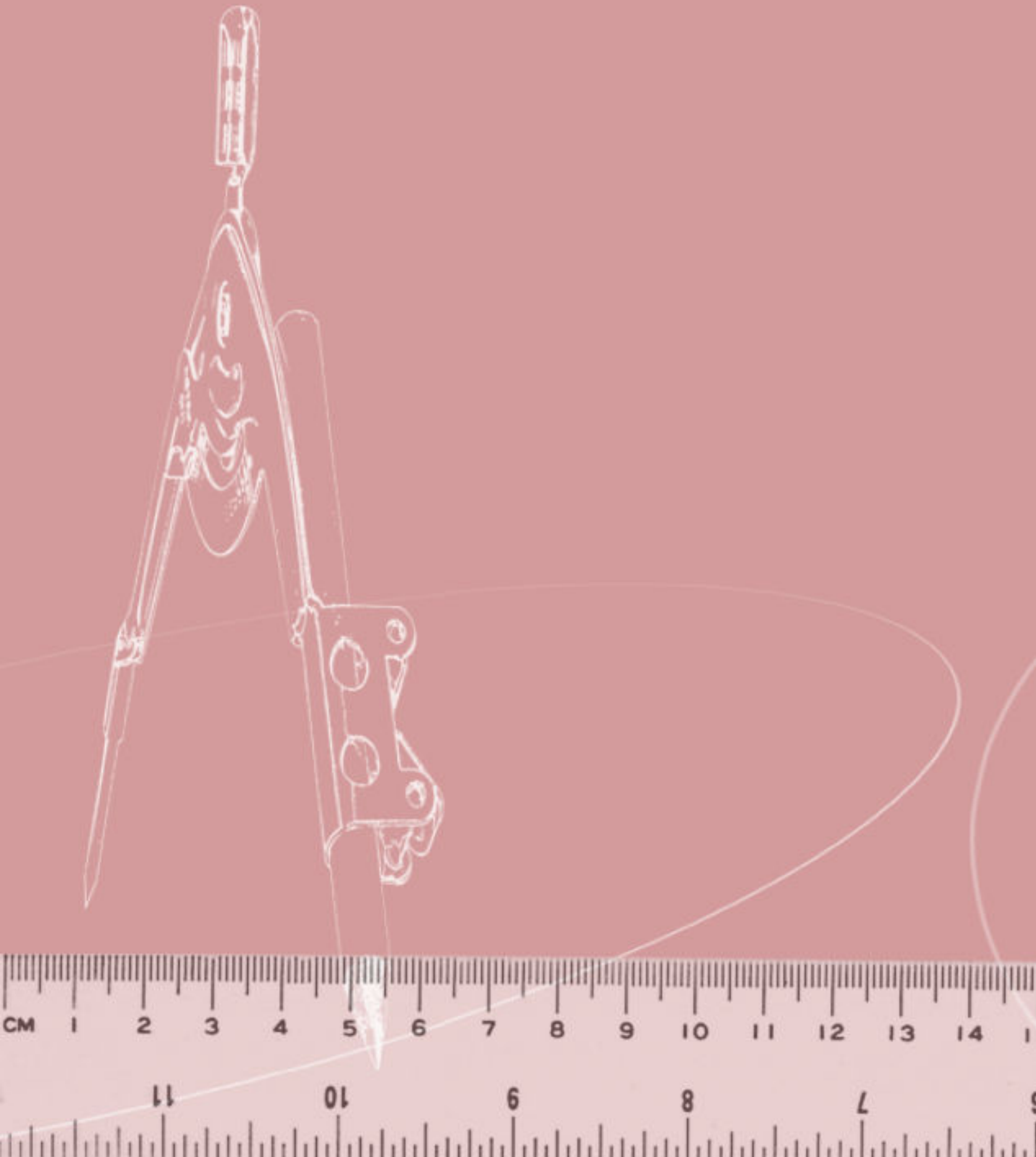
6 月 1 日 前往新加坡參加第 30 屆亞太區小學數學奧林匹克賽決賽。
5 月 30 日 －
6 月 8 日 前往美國參加第 44 屆美國高中數學競賽(ARML)。
7 月 5 －8 日 主辦 2019 金蓮花杯國際數學邀請賽。
7 月 7 日 舉行金蓮花杯國際數學邀請賽、數學大王國際邀請賽、環亞太杯國際數學賽暨(ARML)美國高中數學競賽成果滙報會。
6 月 為香港名創教育(文達出版社)編輯的澳門基力數學探知 2A 和 2B 出版。
11 月 22 －25 日 前往馬來西亞參加第 6 屆 馬來西亞國際數學奧林匹克競賽。
12 月 6 －7 日 為第二十八屆「滙業盃中學生常識問答比賽」數學命題,本會為協辦單位。
11 月 30 日、
12 月 1 日 舉辦「慶回歸 －－ 海峽兩岸小學新思維數學課堂教學大賽」。
12 月 《澳門數學教育》第十七期出版。

2020 年

因疫情關係,使本會上半年活動都未能如期舉行。
10 月 17 日 舉辦「簡約教育的理論與實踐思考」講座。
11 月 28 －29 日 舉辦「海峽兩岸小學新思維數學課堂教學大賽」。
12 月 《澳門數學教育》第十八期出版。

2021 年

	因疫情關係，使本會活動未能如期舉行。
3 月 4 日	於浸信中學舉辦「華數之星」選拔賽。
6 月	參加第四屆分角尺作圖國際決賽。
11 月	《澳門數學教育》第十九期出版。


CM 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14