第十六期 No.16
ISSN 1814-2176

Educação Matemática de Macau

澳門数学教育

—— 张奠宙 题

Mathematics Education in Macau

澳門數學教育研究學會出版
2018年12月

ISSN 1814-2176

澳門隊赴美國參加第 43 屆全美高中數學競賽

（2018 年 6 月 1 日、2 日）

澳門隊獲國際總分亞軍、團體分數與中國隊並列第一

澳門隊攝於內華達大學（UNLV）

遊覽洛杉磯植物園

隊員賽前培訓

B 隊成員與海外隊全力應戰

拜訪中山華星幼稚園

（2018 年 1 月 28 日）

常港澳小學“新思維數學”課堂教學邀請賽
（2018 年 12 月 15 日、16 日）

汪甄南會長致歡迎詞

教青局黃健武廳長致辭

專業評委團

浸信中學李煥棉老師展示課

濠江中學附屬小學庄淑蘭老師展示課

常州市博愛路小學潘雪琪老師展示課

參與展示課的浸信中學小五同學

化地瑪聖母女子學校魏佩珊老師展示課

香港英皇小學賴永康老師展示課

高美士中葡中學禮堂

濠江中學附屬小學小二同學

汪會長向首都師範大學方運加
教授致送紀念品

汪會長向嘗試教育科學研究院
邱學華院長致送紀念品

汪會長向常州市市北實驗初級
中學錢秋芬校長致送紀念品

鄭副會長向香港英皇書院同學會
小學陳淑英校長致送紀念品

鄭副會長向香港英皇書院
賴永康老師致送紀念品

鄭副會長向常州市博愛路小學
潘雪琪老師致送紀念品

伍理事長向課堂教學二等獎老師頒發獎牌

教學一等獎

第 28 屆亞太小學數學奥林匹克賽（新加坡華僑中學）

（2018 年 5 月 26 日）

邵敏理事與參賽隊員在頒獎台上合影

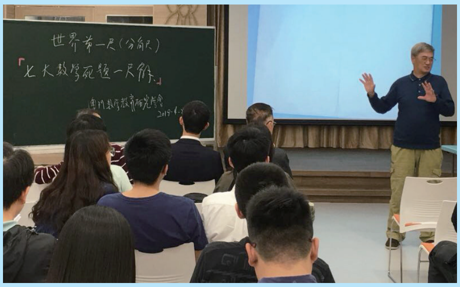
澳門得獎同學合影

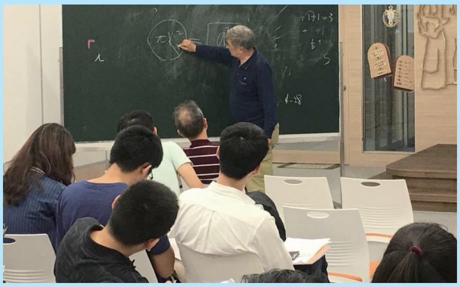
洪崇博同學獲得 2018 新加坡亞太小學數學奥林匹克金獎

黄浩政同學獲得 2018 亞太小學數學奥林匹克初賽白金獎

世界七大數學死題破解演講會

（2018 年 4 月 28 日）





上海崔榮琰先生作難題破解示範

崔先生示範、汪會長協助講解

聖瑪大肋納分校禮堂

希望杯、亞太區小學奧數（新加坡）、數學大王賽、環亞太杯國際數學賽頒獎禮 暨 ARML 成果匯報會

（2018 年 7 月 7 日）

汪甄南會長
致歡迎詞

教青局梁怡安處長向 ARML 澳門隊頒發獎牌

教師施振雄老師匯報
ARML 比賽情況

培道魏麗珊校助頒發希望杯小學二等獎

勞校邵朝霞副校長頒發希望杯中學二等獎

培華張春燕主任頒發希望杯小學一等獎

汪甄南會長頒發希望杯中學一等獎

鄭志民副會長頒發希望杯小學四年級三等獎

鄧海棠秘書長頒發希望杯小學五年級三等獎

伍助志理事長頒發希望杯小學優秀輔導員

蔡兆明副會長頒發希望杯小學三等獎

蔡兆明副會長頒發希望杯中學三等獎

伍助志理事長頒發希望杯中學優秀輔導員

勞校邵朝霞副校長頒發希望杯數學大王
各年級冠軍

培華張春燕主任頒發環亞太杯國際數學賽
各級冠軍

胡漢賢監事頒發環亞太杯國際數學特等獎

教青局梁怡安處長頒發環亞太杯國際數學一等獎

世界數學難題一尺解第二次講座

（2018 年 11 月 10 日）

上海崔榮琰先生實習講解作圖法

參與老師專心練習

參與老師研究分角尺的使用法

使用漫畫進行數學教學——來自新加坡的經驗

（2018 年 10 月 13 日）

汪甄南會長
致歡迎詞

澳門大學江春蓮博士與新加坡南洋理工大學
國立教學院數學與數學教育學系卓鎮南教授

教青局黃逸恒處長
致詞

濠江小學會場

香港資優教育教師協會會員與講者合照

澳門数学教育（第十六期） 2018 年 12 月

目　錄

澳門教育暨青年局
澳　門　基　金　會　贊助

澳門數學教育研究學會出版
澳門新聞局編號:2877
地址:澳門南灣街 107 號
刊頭題詞:張奠宙教授
排版:廣源紙業文具行
印刷:文寶印務有限公司
刊號:ISSN 1814－2176

中國基礎教育的理論缺失與解決對策

邱學華
(常州大學嘗試教育科學研究院 江蘇常州 213000)

【摘要】中國基礎教育改革與發展已取得舉世矚目的成績,尤其是在國際學生評估項目(PISA)測試中取得了兩次世界第一後,已引起國際教育界關注。歐美許多國家紛紛派人到中國考察學習,英國決定全面引進上海小學數學課本及其配套練習冊,大長中國人志氣,提升了中國的國際地位。可是,國內對基礎教育卻是罵聲不斷,甚至有人說中國的教育問題已嚴重如癌症晚期,駭人聽聞,顛倒黑白。許多人對中國教育存在誤解,因此產生了各種埋怨。從理論和實踐上分析唱衰中國教育的各種論調和誤解,有利於正本清源,理性地看待中國基礎教育存在的問題和取得的成績。中國教育理論界必須根除崇洋思想,不能用西方教育理論來否定中華教育的優良傳統。我們應該從盲目自卑中醒來,從崇拜西方教育理論的聲音中突圍出來,引導廣大教師走自己的路,在國際教育界發出中國聲音。

【關鍵字】高考;應試教育;理論缺失;理論自信

一、中國教育怎麼啦?

2013 年在上海市育才中學舉行的第三屆基礎教育課程改革與發展論壇上,我作了題為《國際視野下中國課堂教學的新突破》的發言。我在發言中說:“在中國教育的混沌世界中,在國內外對中國教育的一片叫罵聲中”,我旗幟鮮明地喊出:“中國的基礎教育是世界第一流的,中國中小學的課堂教學也是世界第一流的。”直到現在,還是有許多人叫罵、埋怨中國的基礎教育,而且有些人罵得越來越凶,埋怨也越來越深。網路上不斷有駭人聽聞的消息,顛倒黑白的罵聲以及混淆不清、似是而非的論調出現:中國教育殘害青少年,學生的學習負擔重,學的多是死知識;中國教育沒有出路,趕快把孩子送到國外去;中國的教育問題已嚴重如癌症晚期,救救中國的教育事業,等等。

這種悲觀、消極、抱怨的聲音與我國不斷提高的國際地位和已成為經濟大國、軍事強國的事實是不相符的。黨的十九大精神指出,把人民對美好生活的嚮往作為奮鬥目標,把教育列為民生之首和中華民族偉大復興的基礎工程是新時代中國特色社會主義教育工作的主要方向。這些唱衰中國教育的論調,與十九大精神背道而馳。

同時,這種不負責任的叫罵聲和埋怨論調也是違背邏輯的。教育是上層建築,是為經

濟建設服務的。沒有適合中國國情的良好教育,哪裡來的人才;沒有優秀的人才,中國的經濟怎能騰飛,軍事現代化怎能實現?

中國教育怎麼啦? 舊中國經濟落後,一窮二白,教育凋零,80% 以上的人是文盲。經過 60 多年的努力,我國已普及九年義務教育,實行免費教育,有些地區已普及高中教育,同時也基本解決學生進大學難的問題,中小學教師學歷達成率已超 90% 。在這 13 億多人口的大國,教育經費相對偏少的情況下能辦成這樣的大教育,難能可貴。根據《國家中長期教育改革和發展規劃綱要(2010 – 2020 年)》要求,到 2020 年,我國要基本實現教育現代化,形成學習型社會,進入人力資源強國行列;要實現更高水準的普及教育,基本普及學前教育;鞏固提高九年義務教育水準;普及高中階段教育,毛入學率達到 80% ;高等教育大眾化水準進一步提高,毛入學率達到 40%①。可見中國已從教育大國邁向教育強國,這是值得中國人自豪的。

中國基礎教育的課程、教材、教法,特別是在數學教育方面,已引起國際教育界的關注,許多國家紛紛到中國考察學習,英國已引進全套上海的小學數學教材,包括學生用書、教師用書和配套練習冊,由英國柯林斯學習出版社出版,書名為 Reat Shanhui Mathematics,中文意為《眞正的上海數學》。記得在 20 世紀 70 年代後期,上海教育出版社曾出版了英國的中學數學教科書,稱為 SMP 數學教材,如今英國全面引進上海的小學數學教材,眞是三十年河東,三十年河西。世界在變,我們要有充分的自信,中華民族的復興大業已經開始,必定能為全人類作出更大的貢獻②。

以上事實證明,中國的基礎教育無論是學制、規模、普及率,還是課程、教材、教法都是世界第一流的,而且已經得到國際公認。可是,中國教育從未像現在這樣受到社會各界的關注,也從未像現在這樣承受如此多的叫罵和埋怨。世界第一流,並不是說已經完美無缺,我們同世界上的其他國家一樣,在教育方面都存在問題。教育週期長,複雜多變,人們對數育的需求各不相同,專家和學者的觀點也各不相同,眾口難調,所以有些埋怨和誤解是正常的。但是不能叫罵,不能唱衰中國教育,更不能誤導中國的老百姓。

二、理論缺失的種種表現

為什麼對中國教育罵聲不絕,而且越罵越凶? 因為有些人自以為罵得有“理”,可是這些論調大都是似是而非,模糊不清的,甚至是混淆是非、顚倒黑白的,把錯誤的當成正確的,又把正確的當成錯誤的進行批判,這說明問題的根源還是教育理論的缺失。

中國的教育理論界缺乏自信,崇洋風氣太盛,把外國教育理論奉為聖明,用外國(特別是美國)的教育理論和教育成就批判中國的教育,蒙蔽中國人,給中國人洗腦。筆者現把社會流傳較廣,唱衰中國教育的論調梳理歸納為八個方面,並逐一進行分析。

---

① 《國家中長期教育改革和發展規劃綱要(2010 – 2020 年)》,人民出版社 2010 年版,第 7 頁。

② 邱學華:《有感於英國引進上海小學數學課本》,《小學教學教師)2017 年第 11 期。

(一)高考是指揮棒,中國教育一切問題的根子都在高考

在中國,高考決定著學生的命運,涉及千家萬戶,世界上沒有哪個國家有著這樣一個把國家與個人命運緊緊聯繫在一起的考試制度。“高考”兩字在百度上能搜索出 1 億多條內容,是高頻詞條。高考制度是許多人罵得最凶的,把教育中出現的許多問題都算在了高考的頭上,認為“高考殘害學生”,“高考是教育的萬惡之源”,“高考一日不除,國家一日不得安寧”,等等。一些家長為了不讓孩子參加高考,把孩子早早送到國外讀書,這是導致中國留學生低齡化的一個原因。

首先,我們要討論一下,到底要不要高考? 高考的成效是不可否認的,它為中國經濟騰飛奠定了人才基礎。據統計,恢復高考 40 年(1977 – 2017 年)間,總報考人數達 21699. 5 萬人,總錄取人數達 10855. 6 萬人,也就是說,有 1 億多人通過高考進入大學,成為專門人才。如果沒有高考選出的這 1 億多名人才,我們的改革開放大業是不可能成功的,我們也就不可能進入世界強國行列,這是顯而易見的,如果廢除高考,採用推薦制度選拔人才將會怎樣? 以往的經驗告訴我們,這會導致生源過差,教育不公平,教育品質大幅度下降,大家都有切膚之痛。這條路是行不通的。

世界各國都有高考,連現在已普及高等教育的美國,學生進入大學也要考試,因為學校檔次有高低,常青藤名校都有嚴格的審核與考試。日本、韓國、新加坡等國家也都有全國統一的考試,也都使報考的年輕人擔驚受怕,不堪重負。因為考生不但想通過考試,還想要被好學校錄取。韓國高考更是年輕人的“肉博戰”,他們要在一天時間內考完五門課,從8 :40考到 17 :40。

高考是全世界共同的教育難題,為了解決這個難題,我們已用了幾十年的時間去探索,直到現在還沒有找到比較理想的辦法。制訂高考辦法,必須考慮如下幾個因素。

(1)中國近年來有將近一千萬人參加高考,中國的高考是世界上規模最大的、統一的大學入學考試。由於人數眾多,所以高考不可能採取面試,也不可能採取多維度考核;

(2)考試既要做到公正、公平,又要能選拔出優秀人才;

(3)不能一考定終身,以分錄人,要從多維度出發,全面地選拔人才;

(4)要照顧城鄉差別、地區差別、民族差別等;

(5)由於缺乏誠信監督制度,高校和考生的數量眾多,目前尚不能全面實行高校自主招生制度;

(6)出於對社會安定的考慮,高考改革的步子不能邁得太大,必須逐步推進。

以上因素使高考改革變得異常複雜、艱巨,在改革過程中往往容易顧此失彼,左右為難。例如:既要做到公平、公正,又要做到不能一考定終身,以分錄人,這兩者很難同時實現:既要照學生的個性、特長,又要避免有人利用加分弄虛作假,這兩者也很難兼顧。

幾十年來,我國正在不斷改革、完善高考制度。從目前的情況看,現在的高考制度是適合我國國情,且受到大多數老百姓認可和歡迎的。經過四年的專家研究論證,教育部已出

臺了新的高考制度,相信高考一定會有新的面貌。

總之,中國的高考成績是顯著的,但不是完美的。高考有問題,這是世界性的難題,不能因為有問題就受批判,更不能取消,只能根據中國的國情逐步改革,不斷完善,改革的著眼點,不是為了讓專家滿意,而是要讓絕大多數老百姓滿意。

(二)應試教育氾濫是中國教育的主要問題

現在在抨擊教育問題時,最厲害的武器就是"應試教育"這頂帽子,高考成績好了,學業成績提高了,都被說成是應試教育的結果。一些教改的典型學校,如洋思中學、杜郎口中學、衡水中學、毛坦廠中學等,都被說成是考試工廠,是應試教育的典型。一些專家和教育行政部門到處批評、抨擊,這樣誰還敢去抓教育品質呢?

前幾年,我在《人民教育》發表的文章中指出,我們必須區分"應試"與"應試教育"兩個不同的概念③,應試是指應對考試所採取的策略和手段,只要有考試,就會有應試,這是很簡單的常識,一百年後也不會變。其實人的一生都在應試,求學時代有學業考試,參加工作後有職場考試,中國每年有幾百萬人參加被稱為"國考"的公務員錄用考試,升職升級也都要考試。"應試教育"是指把考試、分數,升學率作為唯一的教育目標,作為教育的指導思想,而不顧學生其他方面發展的教育方式。現在的情況是很多人把兩者混淆了,誰抓"應試",誰就會背上反對素質教育,實行"應試教育"的罵名。

要不要搞應試的決定權主要掌握在各級教育行政部門手裡,他們如果用分數和升學率作為唯一的標準來衡量學校和教師的水準,并依此排名次、升級加薪,作為一種教育目標來管理學校,這就是真正的"應試教育"。學校和教師僅是奉命行事,如果教育行政部門片面追求分數和升學率,學校和教師只能把壓力強加到學生頭上。因此,把壓力都施加到校長和教師身上,這是不公平的,有些人打著"應試教育"的旗號到處叫罵,是沒有根據的。

這裡要特別指出,學生必定是要參加考試的,它是學生學習過程中必不可少的環節,這是一條教育規律,違反這條規律就要受到懲罰。就像工廠一定要有產品品質檢驗,沒有檢驗這一關,產品品質就無法保證。美國的基礎教育品質為什麼低,主要原因是他們忽視考試,這就是違反教育規律所受的懲罰,所以,在《不讓一個孩子落後》的教育法案中,重要的一條就是要重視考試,而且法案還規定,如果一個學校有考試成績三年不達標,校長也要受到處罰④。

考試是一把雙刃劍,一方面可以用來發現診斷學生的缺漏,及時補救,激發學生的學習動力,另一方面會給學生帶來壓力,加重他們的學習負擔,但是,學生學習必定會有一定的負擔和壓力,沒有一點負擔就不是真正的學習。

有考試就必定會有應試,這是很正常的事,為什麼非要用一個混淆不清的"應試教育"的概念來抨擊呢?以前沒有"應試教育"的說法,只有反對"片面追求升學率"的說法。20

---

③ 邱學華:《我所追求的理想學校》,《人民教育》2010 年第 7 期。

④ 李雪峰、何曉東:《"不讓一個孩子落後"法案對中國教育的啟示》,《宜賓學院學報》2011 年第 10 期。

世紀 90 年代出現了"素質教育"的概念,為了樹立對應的概念,才有了"應試教育"的說法。經過近 30 年的教育實踐證明,"應試教育"的提法並沒有對中國教育產生積極作用,還是提反對"片面追求升學率"為好,追求升學率並沒有錯,問題出在"片面"上,這是符合實際情況的,校長和教師聽了也會服氣。所以,筆者贊成北京師範大學王策三教授的看法,不宜提"由應試教育向素質教育轉軌",要恢復"全面發展教育"的權威提法⑤。

(三)高分低能,中國學生只會考試,分數很高,能力很低

在中國教育界流行"高分低能"的論調,這是一些專家從個別高分數、高智商卻生活能力低下的學生個案中得出的結論,這種以偏概全的謬論在教育界流行一時,危害極大。這種論調事實上同前面兩條是有聯繫的,他們反對高考,反對考試,認為考出高分也沒有用,因為這樣的學生都是高分低能的。如果按照他們的論調,考上北大、清華的學子豈不都是低能兒?

考試是教育評價的重要形式,考分基本上能夠反映學生的學習水準。幾十年來,我們不斷研究,改進高考試題,逐步做到既考知識、又考能力。例如,現在的高考已基本沒有命題作文,熟讀死記範文已經沒有用了,大都是先看一幅圖,或根據一段文字,要考生自己命題作文,考生沒有一定的語言文字水準,是寫不出高分作文的。

憑死記硬背考高分的學生也不是一無是處的,這樣的方式也能測試出一個人的學識水準,1926 年清華大學國學研究院招收研究生,考題是默寫四個"一百":(1)一百個人名,寫出每個人所處的朝代和主要著述;(2)一百個古地名,寫出這些地名分別對應的是今天的什麼地方;(3)一百部書名,寫出各部書的作者;(4)一百句詩詞,答出這些詩句分別出自哪首詩或詞。結果只有小學畢業,靠自學讀過兩年大學的王力錄取了,後來他成了著名的語言學家和國學通才。當時的考題默寫四個"一百",看上去好像是在考死記硬背,但是如果不博覽群書,熟讀經典,做到爛熟於心,如果沒有很高的國學修養和驚人的記憶力是無法考好的。

從大資料分析的情況來看,學生通常是高分高能,低分低能,只會出現極個別"高分低能"的情況。當今的知名科學家、企業家、經濟學家。幾乎都是通過考得高分進人重點大學的,幾乎個個是"學霸",如施一公(清華大學)、柳傳志(西安科技大學)、楊元慶(上海交通大學)、李宏彥(北京大學)、雷軍(武漢大學)等。

(四)學生學到多少知識不重要,重要的是培養能力和創造力

這句話流傳得很廣,影響很深,成為許多中小學不重視知識教學的依據,另外還有一句話:"當一個人把在學校裏學到的知識忘掉,剩下的就是教育。"這種論調把知識、能力、智力,創造力割裂開來,它的目的很清楚,用發展能力、智力的重要性證明學習知識並不重要,

⑤ 王策三:《恢復全面發展教育的權威——三評"由應試教育向素質教育轉軌"提法的討論》,《當代教師教育》2017 年第 1 期。

學校不必抓教學品質,不必考試,學生不必取得高分數。總之,學生不必認眞讀書,只要將關注點放在發展能力、智力上就行了。

知識重要還是能力重要的爭論,其實就是教育史上關於實質教育(重知識)與形式教育(重智力)的爭論。這個爭論從古希臘時期就開始了,東西方教育界都在研究和爭論這個問題。根據國際心理學界的研究,一般認為,在知識內化的過程中人的智力會逐步得到發展,人在反復練習和應用知識的過程中會形成能力,因此,知識、能力、智力、創造力是互相聯繫、不可分割的,無所謂哪個重要,哪個不重要;但知識是基礎,這點是肯定的。美國心理學家加涅的累積學習原理也強調知識的學習對能力形成的奠基作用⑥。

楊絳先生的一段話能給我們帶來啟示:“運動員受訓練,練出了壯健的肌肉筋骨,同時也練出了吃苦耐勞、堅持不懈的意志。肌肉、筋骨屬於肉體,吃苦耐勞、堅持不懈的意志屬於精神,肢體能傷殘,意志和生命同存,這是不容置疑的”⑦,這段話說明,運動員只有通過訓練,才能磨煉出吃苦耐勞、堅持不懈的意志,不去訓練,何來意志? 同樣的道理,學生只有在學習知識的過程中,才能形成能力和發展智力。一個人的能力和智力不可能憑空產生,必須有引發的契機,這個契機就是學習知識的過程。

我記得在 20 世記八九十年代有個提法。“在加強‘雙基’的同時,培養能力,發展智力”。這裡的“同時”兩字用得特別好,把知識、能力、智力的關係說得一清二楚,具有中國特色,充分體現了唯物主義辯證法。可是,從 21 世紀開始的新課程改革卻把這句話丟棄了,實在可惜。這句話,體現了中華傳統教育的精華,是中國基礎教育的成功經驗,應該認眞總結研究,將它逐步推向世界,為全人類的教育作出貢獻。

(五)中國教師強調死記硬背,機械訓練,歐美教師強調探索發現,開展研究性學習,所以中國學生的基礎知識很扎實,但缺乏創新能力

這種論調在國內外流傳很廣,使人們對中國教育產生了很深的誤解。在國外流行著一種關於中國教育的悖論:中國教師的教學方法很落後,教學品質卻很高。筆者早就指出,這是個偽命題,使外國人還用 20 世起三四十年代的眼光看中國,再加上現在新聞媒體對中國教育的負面報導多,大家就都信以為眞了。

中華人民共和國成立後,經過 60 多年的不斷發展,不斷改革,教師的學歷水準和教學水準都有了大幅度提高。2009 年湖南省抽樣調查,小學教師中具有大專以上學歷的占總人數的 96.49%,沿海地區小學教師的學歷已基本達標,其中有研究生學歷的教師占總人數的 10%左右。我國中小學教師的學歷水準已經接近歐美發達國家,具有一定的專業素質。

中國中小學的課堂教學經過全國性的八次課改,已大有改觀,“滿堂灌”的情況已基本消失。特別是近幾年來,政府加大了教育投人,不但沿海地區的中小學都用上了電子黑板,就連相對偏遠的內蒙古、黑龍江、新疆、甘肅、廣西等地的學校教室裡也裝上電子黑板,使用

---

⑥ 郭本禹主編:《外國心理學經典人物及其理論》,安徽人民出版社 2005 年版。

⑦ 楊絳著:《走到人生邊上》,商務印書館 2007 年版,第 88 頁。

現代化電子設備的學校比比皆是。從主流情況來看,我國的課堂教學已具有中國特色——既繼承和發展了中華教育的優良傳統,又借鑒了西方教育的長處,主要有以下六種特徵:(1)強調學生自學;(2)重視教科書的作用;(3)發揮教師的主導作用:(4)加強“雙基":(5)重視練習;(6)激發學習興趣,充分發揮非智力因素的作用。

綜上分析,上述教育悖論是不成立的,它的前提錯了,中國教師的教學方法並不落後,我們的課堂教學方法不是“滿堂灌”,也不是西方的探索發現,我們正在探索一條中國式的課堂教學道路。

關於東西方教育的碰撞,最有說服力的案例是英國 BBC 廣播電視公司拍的一部紀錄片《我們的孩子足夠堅強嗎? 中式學校》。這部紀錄片播出後,引起轟動,改變了世界各國對中國教育的成見。以往西方人總認為西方教育比中國教育優秀,這個案例用鐵的事實證明,無論是教學方法還是教育方式,中國的都比英國好。事情的起因是,2015 年英國倫敦大學教育學院有一個比較中西教育的研究項目,研究人員從英國博船特中學抽取了 50 名九年級學生組成中國實驗班,另選一個只有 30 名學生的同年級班級作為對比班。實驗班的各科教師由從中國聘請的5 名教師擔任,對比班則由英國原任教師任教,教學實驗時間為一個月(四周),然後統一測試。BBC 公司全程錄影,等於全程有人監督,容不得半點作假。

在開始的兩周時間裡,中國教師簡直無法上課,英國學生的紀律太差,講話、打鬧、玩手機,甚至把家裡的電茶壺帶來燒茶喝。中國教師面對散漫叛逆的英國學生沒有退讓,堅持嚴格管理,找學生談話,同家長溝通,將實在影響上課的學生請出教室。開始時,中國教師的做法遭到部分學生和家長的反對,有位家長跑到學校同中國教師爭辯,說他的孩子一天不喝茶是不可想像的,不讓帶電茶壺燒茶喝是侵犯人權。中國教師耐心解釋、開導、勸說,情況逐步發生改變。從第三周開始學生慢慢接受中國教師的教育方式和教學方法。中國教師逐步展示中國式的因材施教——為後進生補課,為優秀生開小竈,他們在課外教學生跳扇子舞、扔空心球,做遊戲;每週一舉行升旗儀式,讓學生在國旗下講話;考前鼓勵學生認眞複習,爭取考出好成績,完全把中國學校的教育方法搬到了英國,四周的實驗結束後,實驗班與對比班接受統一測試,結果中國實驗班測試的三門學科成績全勝英國對比班。

班別 / 學科	中國實驗班平均成績	英國對比班平均成績
數學	67.74 分	54.84 分
中文	46.88 分	36.88 分
科學	58.33 分	50 分

在三門學科中,兩班學生的數學成績差距最大。博船特中學的校長和教師心服口服,承認中國的教學方式贏了,因為實驗是在對中國教師不利的情況展開的,中國教師對英國學生不熟悉,授課班級的人數更多,開始時更是受到了學生的抵制和反抗。不僅實驗班學

生的成績全勝，而且中國教師同英國學生之間還建立了深厚的感情，在告別會上師生哭成一團，許多英國學生都不願中國教師離開。

BBC 的這部紀錄片是在學較現場拍攝的，具有較高的可信度，已在許多國家播出，消除了西方人對中國教育的誤解。一些唱衰中國教育的公知們，應該好好看看這部紀錄片，反思一下自己的講話。

（六）中國學生的學習負擔重，苦不堪言，雖有扎實的基礎知識，但缺乏創造性；歐美學生學得輕鬆愉快，沒有負擔，創造性強

這是一種貼標籤、想當然式的調論，已經把中西方教育臉譜化了，總是說中國學生的學習負擔重，缺乏創造力，歐美學生輕鬆偷快，有創造力。其實事實並非如此，許多沒有到過美國，只聽信媒體和專家宣傳的教師和家長受騙了。

美國有各種類型的學校，包括公立學校、私立學校、針對貧困家庭（主要是黑人）的特殊學校等，公立學校面向大眾，管理不嚴，學生輕鬆；私立學校面向富裕階層，開展精英教育，學費昂貴，管理嚴格，學生負擔也不輕；特殊學校的學生則根本沒人管，放任自流，基本沒有負擔。說美國學生學得輕鬆愉快，沒有負擔，是指哪類學校的學生呢？

中國學生也不能一概而論，城市名校的學生負擔重些，而衣村山區學校的學生負擔輕些。總體而言，多年來經過教育行政部門的調控，學生的負擔有所下降。一般要求小學低年級學生沒有家庭作業，小學中、高年級學生的課後作業時間不超過一小時，中學學生不超過兩小時。農村的小學生基本沒有家庭作業，中學生一般都住校，晚上在自修課上完成作業。

在學習成績方面，中國學生有絕對優勢，PISA 測試結果已能證明這一點。有些人說，這是應試教育的結果，中國學生只會死記硬背，沒有能力。有一位英國人麥克雷站出來為中國人說話，他在《獨立報》上發表文章指出，PISA 測試結果顯示，上海學生在閱讀素養、數學素養和科學素養三個評估專案中得分最高，測試的目的是評估學生在實際情境中運用所學知識的能力，因此不能說這是中國學生接受“填鴨式教育”的結果。

關於培養創造力的問題，筆者認為，中小學生的主要任務是繼承和學習前人創造的知識經驗，然後在前人的肩膀上起飛。他們的主要任務是學習和接受。因此中小學主要是要培養學生的創新精神，而不是創新能力。在中小學，教師有責任把清晰完整的科學結論告訴學生，不能讓學生漫無目的地探索、發現，造成概念上的模糊不清，這樣反而會害了學生。美國科學課程標準原來的核心概念是“探索”，現在已改為“實踐”，這樣的改變是值得深思的。

國內外絕大多數人都認為中國學生沒有創造力，我們也沒有確鑿的證據為中國學生辯駁。近來《人民日報》公佈了一份資料，講的是一部丹麥拍攝的紀錄片《丹麥 9 年級 Z 班 VS 中國初三 13 班》，紀錄片跟拍了兩個國家的初中畢業班，節目組聘請權威專家為兩國學生設計了多個領域的測試，希望以此對比研究兩國教育的不同之處。

代表丹麥的是奧爾胡斯地區最好的一所公立學校九年級 Z 班的學生，代表中國的是黑

龍江省哈爾濱市第 67 中學九年級 13 班的學生,兩個班的學生都即將參加本國的中考。測試項目分為閱讀、數學、英語、團隊合作能力和創造力。測試結果顯示:在閱讀能力方面,中國小勝丹表:在數學能力方面,中國大勝丹麥,中國 90 分,丹麥 30 分;在英語能力方面,丹麥大勝中國,丹麥 71 分,中國 29 分,這在意料之中,因為丹麥普遍用英語交流。

在團隊合作能力和創造力方面,中國和丹麥的專家都認為這是丹麥的強項,丹麥大勝中國是肯定的。可是測試結果卻恰恰相反,中國的學生勝了,測試團隊合作能力的考題是請學生以 4 人為一組,每組用 50 張白紙以及 4 個強力透明膠,在 30 分鐘內搭建一個類似房子的獨立支撐體,並能容納小組的 4 名成員。完成搭建後,專家一致認為中國學生的表現更好:中國學生在整個考查過程中一直保持著高度的專注,善於表達自已的想法,聆聽同伴的意見,並且能很快形成共識,立即動手操作;丹麥學生則不太專注,嬉笑打鬧,意見不統一,非常自我,影響了任務的完成。

測試創新能力的任務是給學生一疊相同內容的畫、讓他們自由發揮,添加新的內容,畫出一幅新的畫,並給新的畫想一個標題,限時 15 分鐘。結果也出人意料,中國學生的創新能力比丹麥學生強,專家們認為比較有創新性的畫作幾乎都出自中國學生之手,只有一幅是丹麥學生的。

以上兩項測試結果推翻了國際教育界舊有的偏見一一認為中國學生被管得太嚴,約束太多,因此團隊合作能力和創新能力肯定很差,不如歐美學生。事實證明,中國學生扎實的基礎知識和能力,嚴明的紀律、優秀的執行力,堅持不懈的鬥志,對團隊合作能力和創新能力都產生了一定的積極影響。這說明中國學校嚴格要求、嚴格訓練的管理辦法和教育方式,對增強學生的團隊合作能力和創新力有著重要的作用,這是東西方教育家都忽略的部分。

(七)美國有低水準的基礎教育,卻有高水準的高等教育;中國有高水準的基礎教育,卻有低水準的高等教育

這好像是兩個教育悖論。中國的一些教育專家以此為美國基礎教育水準不高辯護,貶低、質疑中國基礎教育。這兩個悖論對中國基礎教育的傷害很大,仿佛說明中國的中小學生雖然成績好,但到大學就不行了,美國的中小學生雖然成績一般,但到大學都能很快提高。這兩個悖論迷惑了很多專家的眼睛,也誤導了許多家長,使他們把孩子早早地送到國外去讀中小學。

這兩個悖論,其實並非悖論,而是事實,我們必須面對現實,作出科學的分析,筆者將從以下四方面進行論述。

1. 我國和歐美國家的高等教育不在同一條起跑線上,歐美國家的高等教育大都有二三百年的歷史,他們有完整的辦學模式,管理體系和科研傳統等。我國只是在一百多年前,按照西方的辦學模式辦起了大學,也就是說我國高等教育的起步時間比西方晚了一二百年。新中國成立後,我們大力發展高等教育,雖然取得了顯著的成績,但與歐美國家相比仍有差距,這是必須承認的事實。

2. 我國的基礎教育水準比美國高,這也是鐵的事實。前文已分析過,這裡再舉一個 2009 年 PISA 測試結果的例子。[⑧]

國家 素養類型	中國	美國	國際平均
科學素養	575 分(第一名)	502 分(第七名)	524 分
數學素養	600 分(第一名)	487 分(第十名)	496 分
閱讀素養	556 分(第一名)	500 分(第八名)	493 分

當時中國的成績遙遙領先,而美國的成績大都低於國際平均成績。記得 20 世紀八九十年代,許多華人都把子女送回祖國讀中小學,接受嚴格有效的基礎教育,可是後來出現了唱衰中國教育的論調,而且越罵越凶,把他們都嚇跑了,連中國的家長也嚇得把孩子送到國外去讀書了。

3. 美國高等教育的高水準是靠全世界的優秀學生撐起來的。美國自己的基礎教育不夠好沒有關係,世界各國優秀的學生都會到美國讀大學,讀研究生。事實上這是一種教育掠奪,美國既獲得了高的學費收入,又有源源不斷的人才流入,實在是一舉兩得。前幾年,我和華東師範大學的張奠宙教授在上海遇到從美國來華講學的威斯康辛大學教授阿士凱,我們問起,為什麼美國的中小學生數學成績差,而高等教育卻很厲害。他回答說,在美國高校有 80% 的數學教授是華人,他們大都是在中國(包括香港、臺灣)接受的基礎教育。阿士凱教授說出了眞相,[⑨]證明美國高等教育水準高的一個證據就是美國的諾貝爾獎獲得者人數最多,可是其中有很多是猶太人、華人、印度人、日本人,靠的也是"外來軍團"。

4. 中國的高等教育為什麼水準不高? 我們不能把中國基礎教育的高水準同高等教育的低水準聯繫起來,要弄清因果關係,高等教育的低水準不是基礎教育的高水準造成的,因為這不符合事實,也不符合人的發展規律。中國高等教育低水準主要是由於其自身的原因,不能怪基礎教育。除了前面講的歷史原因外,還有三個原因:

(1)擴招帶來的後遺症。以前高校每年招一二百萬人,而現在每年要招近一千萬人,生源不如以前,師資也跟不上。

(2)管理太寬鬆,只要不犯錯誤,絕大多數學生都能升級、畢業。而歐美大學實行的是"寬進嚴出"的制度,一般到大學二年級就有 30% 左右的淘汰率,到三年級還有 20% 左右的淘汰率,大學生都很緊張,如果不認眞學習就不能升級,不能畢業。

(3)教學方法落後,配套設備和技術手段也落後,教師上課大都是滿堂灌;中國很多的小學教室都配有電子黑板,可在大學卻很少見到。

---

⑧ 國際學生評估項目上海項目組著:《品質與公平——上海 2009 年國際學生評估項目(PISA)結果概要》。上海教育出版社 2013 年版。

⑨ 邱學華:《中國數學教育不要向美國學習》,《小學教學(數學版)》2015 年第 11 期。

根據對上面四個問題的分析,我們可以得出結論:中國高等教育的水準低不是由於基礎教育水準高所造成的;美國高等教育水準高的歸因也不是基礎教育水準低,而是主要依靠外來力量的支撐。

(八)奧數的危害遠甚于黃賭毒

剛聽到這個觀點時,我不敢相信這是一位教育專家說的,但這的確是一位有身份,在教育界有影響力和話語權的專家說的,他在一篇名為《打倒萬惡的奧數教育》的博文中說:"奧數的氾濫成災,已經成為一種社會公害,其對少年兒童的摧殘之烈遠甚于黃賭毒,遠甚於網癮,說它禍國殃民毫不過分。"

奧數縱有千錯萬錯,總不至於危害甚于黃賭毒吧。這位專家對奧數如此痛恨,但他可能連什麼是奧數都沒有搞清楚。這也是中國基礎教育理論缺失的原因之一——有些專家連事實都沒有搞清楚就信口開河,胡亂批評。

奧數是"奧林匹克數學"的簡稱,專指國際奧林匹克數學競賽的教學內容,奧林匹克數學競賽是國際上最高級別的中學生數學競賽,能顯示出一個國家青少年的數學水準,就像奧林匹克運動會一樣,世界各國都極為重視。我國經過幾代人的努力,才在奧數競賽中取得了驕人的成績,連年奪冠。為了打好學生的數學基礎,必須從小學、初中抓起,因此,我國自己舉辦了華羅庚金杯賽、初中和小學的奧林匹克數學競賽等,現在所說的奧數範圍擴大了,是指高於教科書難度的數學競賽,說到底就是一些較難的數學題和解題思路。實踐證明,讓學有餘力的學生學習奧數,有利於因材施教,發展學生思維,培養優秀人才,提高教學水準,顯示我國的大國風範,我寫過一篇文章題為《為"奧數"正名》,在其中作了詳細的分析⑩。

這位教育專家的一句"奧數危害遠基於黃賭毒",夠吸引眼球,被很多家媒體熱炒,有些教育專家和名人也不斷跟進,掀起了討伐奧數的浪潮。在這樣的輿論壓力下,國內的奧林匹克數學競賽停辦,奧數培訓班也被禁止,一些教育局下了禁令,不準學生參加奧數競賽和奧數培訓,奧數一時間竟然成了過街老鼠,人人喊打,世界上還沒有哪個國家用教育行政的禁令來扼殺奧數。

這樣做的後果也逐漸顯露出來。我國在國際奧林匹克數學競賽中連連失利,冠軍的位置也丟了。有一年,以前很落後的美國隊竟然得了冠軍,這是因為他們引進了中國內地的奧數教練。以前,每年中國內地都能在美國舉行的國際高中數學競賽中獲得第一,而前年是中國澳門獲得第一,內地第二,澳門數學教育界的朋友都感到奇怪。在 PISA 測試中,數學素養方面,中國內地從第一降到了第六。在 21 世紀初,國際數學教育界曾預言,21 世紀的數學大國是中國,現在沒有人再提這句話了,因為我們已淪為二流水平了。這個責任應該由誰來負?

---

⑩ 邱學華:《為"奧數"正名》,《中小學數學(小學版)》2012 年第 6 期。

有些家長把孩子送到美國讀書,原以為奧數是中國教育的特色,後來才發現,奧數是全世界的,美國許多學校對奧數的重視程度一點也不比中國差。中國不許學生學奧數了,美國乘虛而入,搶了我們的教練,奪了我們的學生,成了奧數冠軍。我們難道一點都不心痛嗎?

在中華人民共和國成立初期,我國的數學教育水準很落後,經過幾代人的努力,才奇跡般地登上國際高峰,成為國際公認的數學大國,可在批評應試教育,批評奧數的浪潮下,我們辛辛苦苦建立起來的數學大廈倒塌了。這種自我否定、自毀長城的做法令人惋借,必須及時醒悟,採取措施糾正錯誤。

2017 年 12 月,由我國培養的兩位青年數學家惲之瑋、張偉在美國獲得美國科學大獎一一數學新視野獎,轟動世界。這兩位數學家都是通過中國的各級數學比賽成長起來的。惲之瑋在讀小學時獲得過華羅庚金杯賽一等獎,讀中學時曾獲國際數學奧林匹克金牌(滿分);張偉上中學時由於在數學競賽中取得了驕人的成績,被保送到北京大學數學系。近來有位教授為了貶低奧數在網上公開說奧數培養不出數學家,而這鐵一般的事實就是對這位教授觀點的有力反駁。

三、理論缺失的主要原因

前面從八個方面分析了理論缺失的表現以及它們帶來的負面影響,下面筆者將進一步分析它們產生的原因,主要有如下五個方面。

(一)中國基礎教育理論缺失的最大原因是照搬照套西方(主要是美國)的教育理論

中國教育理論界歷來崇洋,初學日本,後學美國,1949 年後全面學蘇聯。改革開放後,西方各種教育理論和教學模式不斷湧入,翻開我國的教學論著作,介紹的全是外國的教學理論。20 世紀八九十年代,教育界大力推行美國的發現教學法,探究教學法,近年來美國的翻轉課堂和走班制又流行起來,一些大學和教育研究機構不遺餘力地宣傳、推行,一些教育專家熱衷於翻譯國外的教育理論著作,把外國的教育理論搬進來,由此成名成家,所以有的學者說,在中國是翻譯家當教育家。

介紹和宣傳外國教育理論是有益的,也是需要的,但不能用外國教育理論主宰中國的教育,批判中國的教育,排斥中國傳統教育的精華,也就是不能“喧賓奪主”、“反客為主”,有位美國教育專家到中國來考察,看了中國的教育現狀後感歎地說:“美國的教育確實不如中國,但中國教育越來越像美國的了”,值得大家深思。

(二)違反教育的基本規律,缺乏教育的實證研究

前面列出的種種唱衰中國基礎教育的論調,大都違反了教育的基本規律,缺乏教育的實證研究。反對高考、取消高考、反對應試教育等論調,都違反了“考試是學生學習過程中

的重要環節”這條教育規律。“高分低能論”,“中國學生基礎知識扎實,但缺少想像力和創造力",“中國學生計算能力第一,想像力倒數第一”等論調,都沒有經過實證研究,僅是某些教育專家的信口開河、以訛傳訛。更可悲的是,一些所謂的“教育專家”以此作為權威論據,給中國教育“開藥方”。

中國教育界應該認真學習和應用教育的基本規律,敬畏教育規律。教育專家不能空談各種各樣時髦的教育理念,不能為了語出驚人、追逐潮流而信口開河,必須謹言慎行,想一想自己講的話是否符合教育基本規律,是否對發展中國教育事業有利。

中國教育界要大力提倡教育實證研究,大興調查研究之風,大興教育實驗之風。華東範大學的袁振國教授大力推動教育實證研究的發展,在上海連續舉辦了三屆全國教育實證研究論壇,華東師範大學學報也出版了教育實證研究專刊。人民教育出版社的郭戈先生發表了《沒有科學的教育研究,就沒有教育科學》一文,指出:“在當下,迫切需要教育研究者尤其是教育理論工作者走出書齋,面向實踐,深人學校和教學第一線,深入開展實驗或試驗。堅持定性研究與定量研究相結合,改變以單一方法為主、以思辨方法為主、以描述概括為主的現況。[11]”

(三)教育的許多奇談怪論都源於形而上學的哲學觀點

任何事物都有兩面性,不能只強調一面,而忽視另一面。因此,也不能過分誇大中國教育存在的問題,而對中國教育取得的成績視而不見。

反對高考,反對考試就是誇大考試作用的消極面,掩蓋考試作用的積極面,美國教育和中國教育各有長處和短處,不能用美國教育的長處與中國教育的短處相比較,並以此否定自己。有的人以偏概全,把個別現象當成普遍現象,當成科學結論,“高分低能論”就是一個突出的例子。

中國教育理論界充斥著美國的教育理論,但現在是應該強調辨證唯物主義認識論的時候了。傳統中醫的理論基礎就是辨證論治,治病不能頭痛醫頭,腳痛醫腳,應該把人作為一個整體來診治。古代醫藥學家孫思邈說過,食物用之得當則養生,用之不當則傷人。這句話的意思是要辨證地看待食物,食物可以養生,也可以傷人。同中醫理論一樣,中國傳統教育中也有辨證的思想,“恰到好處”就是中國古代哲學思想的最高境界,中國教育理論界應認真學習研究中國的哲學辯證思想,以此作為觀察和分析教育現象的哲學基礎。

(四)缺乏民主、公正、爭論的學術氣氛

中國教育理論界缺少爭論,大都是隨大流,一邊倒。21 世紀開始新課程改革後,有個別的專家在課改會上氣勢洶洶地說:“特級教師是最大的障礙,教研室是最大的堡壘。”這是因為特級教師和教研室的教研員於對新課改提出不同的意見。我特別佩服北京師範大學王

---

⑪ 郭戈:《沒有科學的教育研究,就沒有教育科學》,《華東師範大學(教育科學版)》2017 年第 3 期。

策三教授的勇氣,他敢於對新課改說“不”,提出自己的看法⑫,四川省社科院的查有梁先生,也大膽地對新課改的功過是非進行了全面科學的分析⑬。

由於種種原因,學術界缺乏爭鳴的氛圍,大都是一片沉默,面對教育理論界的種種唱衰中國教育的奇談怪論,沒有人站出來爭辨,在”圍剿”衡水中學的浪潮中,為了弄清眞相,我兩次去衡水中學考察和學習,親眼看到的與有些媒體所宣傳的衡水中學是高考工廠、靠加班加點、殘害學生的健康獲取高升學率不同,他們的經驗是“加強德育提高升學率,而活動是德育的載體”,衡水中學不但開足全部國家課程,而且每週還比別的高中多一節體育課,保證學生每天 8 小時的睡眠和 1 小時的體育活動時間;在課外開展形式多樣,內容豐富的文體話動和社團活動,加強愛國主義教育,幫助學生樹立遠大理想,提高精氣神。所以,我在這所學校看了使人驚奇的現象,學生排除買飯時都在看書,走路時都是一路小跑,為的就是爭分奪秒地學習。這樣能使 80% 的畢業生考取 211 或 985 重點大學,不正是我們苦苦追求的理想辦學境界嗎？這樣一所好的高中為什麼要受到圍攻,遭受非議呢？我把自己的所見所聞寫成一篇文章《從“衡水中學爭議”說開去》想要發表,幾家雜誌社都婉言拒絕,並好言相勸:你也是一位知名的教育專家了,何必去蹚這個渾水呢？最後,這篇文章在《中小學教材教學》雜誌上發表了⑭。

(五)媒體推波助瀾的作用或袖手旁觀的態度

許多奇談怪論大都是通過各種媒體的宣傳散播開來的,媒體宣傳的威力很大。其中最勵害的管道是微信公眾號和個人博客,它們傳播資訊的速度極快,一時間就能形成鋪天蓋地之勢。有些媒體明知道奇談怪論沒有科學根據,會唱衰中國教育,可是他們擔心蹚渾水沒有什麼好處,而採取袖手旁觀的態度,不敢刊登反駁的文章。在中國一般爭論不起來,誰強勢誰就爭得了先機。由於沒有反駁,沒有爭論,許多奇談怪論越傳越廣,越傳越凶。

四、解決理論缺失的對策

中國基礎教育理論缺失的問題由來已久,散播甚廣,影響很深。糾正這種潮流並非易事,從理論缺失到理論自信,必須花大力氣認眞對待,從以下幾方面採取對策。

(一)掃除“一切向西方看”的崇洋風氣

我們不能把美國的教育理論奉為眞理,照搬照套;不能用西方的教育理論指導中國的教學改革。中國人應該從盲目自卑中醒來,從對西方教育理論的崇拜中突圍出來。人民教育家陶行知早在 20 世紀 30 年代就大聲疾呼,不能照搬西方的教育理論;著名學者錢穆早

---

⑫ 王策三:《應該盡力盡責總結經驗教訓一一評“十年課改超越成敗與否的簡單評價”》,《教育科學研究》2013 年第 6 期。
⑬ 查有梁:《十年課改的統計詮釋》,《教育科學研究)2012 年第 11 期。
⑭ 邱學華:《從“衡水中學爭議”說開去》,《中小學教材教學》2015 年第 10 期。

已說過,中國教育最大的錯誤就是模仿西方;許多有識之士也紛紛指出,模仿西方會給中國教育帶來種種危害。可是,多少年過去了,模仿西方的錯誤依然沒有停止,看來光在口頭上號召或建議收效甚微。中國人的崇洋思想根深蒂固,必須採取具體的措施,特別需要各級教育行政部門和教育科研部門以及高等師範院校加強頂層設計,從源頭抓起,而這個源頭就是培養教育理論人才的系統工程。

各類師範院校的教育理論專業在設置課程時,應該加強學習和研究中國傳統文化和中國傳統教育思想,重視教育實踐,動員和組織從事教育理論研究的專家和導師走出象牙塔,深入教育第一線調查研究和考察學習。20 世紀 60 年代我在華東師範大學教育系工作,當時學校規定教育系的教師要分期分批到華東師範大學的附屬中學和小學掛職學習、鍛煉,我和葉瀾都在附小工作過,國際上有些國家把教育專業作為第二學歷,本科畢業生必須在中小學工作幾年後,才能到教育系深造,成為教育理論的專門人才。

參與各級教育科學規劃課題研究和設計相關出版選題的人員,應該關注中國的教育研究問題。各有關部門應提供資金支援:在選用教育理論方面的人才時,不能只看學歷或海外留學經歷,還應該考慮其是否有在中小學教學的經歷。總之要形成一種風氣,鼓勵大家研究中國的教育問題,深入中小學進行教育實踐。

(二)進一步發掘中華教育的優良傳統,打造具有中國特色的教育理論體系,並使其逐步走向世界

不破不立。掃除"一切向西方看"的崇洋風氣,這是破;但是光破不行,還必須立,中國教育理論必須走中國化的道路。具有中國特色的教育理論體系的源頭在哪裡? 其實最好的東西,並不在西方,而在我們老祖宗留下的遺產裡,就是中華教育的優良傳統。

遠在殷周時代成書的《易經》,總結了從遠古時期到周朝的人類生存智慧,是中國傳統文化的傑出代表,也是中華文明的源頭,博大精深,包羅萬象。其中的蒙卦第四指出:匪我求童蒙,童蒙求我。意為師長不應該強迫孩子接受教育,而應該等待孩子來求教,翻譯成現代的話就是"不是要我學,而是我要學"。我們的祖先在原始的生命直覺指引下,提出"童蒙求我"的觀點,認為數育應當被置於受教育者之前,這在人類教育史上是非常了不起的創造。這種"童蒙求我"的教育思想,被歷代中國教育家所重視,並發揚光大。

孔子是春秋時期偉大的教育家,他的名言"不憤不啟,不悱不發"。意為:不到學生想弄明白,又弄不明白時,先不要告訴他是什麼意思:不到學生想說卻說不出來時,先不要告訴他該如何表達。如今,孔子的教育思想已遠播海外,聞名世界。

我們要重視這樣一句話:"教學,教學,教學生自己學。"這句話說得透徹見底,通俗易懂。《學記》是世界上第一本教學論著作,非常有意思的是,它不叫"教記"而叫"學記",主要論述了學生"學"的規律和方法,這說明重視自學是中國傳統教育的精華所在。

繼承和發揚中華教育的優良傳統,是我們樹立理論自信和教育自信的基石。我們應該有計劃有目標地開展對中華教育傳統的研究,取其精華,去其糟粕,弄清楚中華傳統教育精

華的主要內容是什麼,以及如何將其應用于現代教學中。這方面的研究工作已經有人做了,並有了研究成果,比較突出的有朱永新的《中華教育思想研究》[15]。

在數學教育方面,華東師範大學的張奠宙教授做了大量且極其重要的工作,他組織編寫了《中國數學雙基教學》和《數學教育的"中國道路"》。特別要說明的是,在後一本書裡,他總結歸納出具有中國特色的數學教育的六個特徵:教學導入、嘗試教學、師班互動、變式練習、提煉數學思想方法以及正在發展為"四基"的"雙基"教學[16]。

(三)重視總結和推廣教育改革中的成功經驗

前面談到,從理論缺失到理論自信,關鍵在於構建具有中國特色的教育理論體系。這個體系的源頭有兩個,一個是中華教育優良傳統中的精華,另一個是教學改革中的成功經驗。

實踐是檢驗眞理的唯一標準,教育實踐是教育理論的源泉。教育改革中湧現出許多優秀人物,創造出許多成功的經驗,這是中國教育的寶貴財富,是中國特色教育理論的鮮活材料,我們必須認眞提煉、總結,並及時推廣應用。顧明遠先生指出:"隨著教育改革的不斷深入,我國教壇湧現出一批優秀教師。他們在自己的工作崗位上勇於創新,刻苦鑽研,不斷學習,緊跟時代的步伐,具有先進的教育理念,熟稔的教育技能,創造了具有中國特色的優秀的教育經驗,豐富了教育研究的理論寶庫。[17]"

在這方面,以中國教育報刊社張新洲先生為主導的團隊做了大量有益的工作,他們編輯出版了"中國當代著名教學流派"叢書,先後推出了 17 本,其中有《于漪與語文教育》、《顧冷沅與青浦經驗》、《蔡林森與洋思經驗》等。後來又編輯出版了"教育家成長"叢書,先後推出了 45 本,其中有《李吉林與情境教育》、《邱學華與嘗試教育人生》、《張文茂與責任教育》、《魏書生與民主教育》等。由袁振國教授策劃的"中國當代教育家"叢書,先後推出了 16 本,其中有《劉彭芝:人生為一大事來》、《李鎭西:與青春同行》,《李烈:給生命塗上愛的底色》等。可貴的是,這些書的作者都是戰鬥在教育第一線的基礎教育界的精英,他們有各具特色的教育理論和實踐經驗,為中國基礎教育理論提供來源。

在教育理論界我最敬佩三個人:一個是中國教育學會副會長朱永新先生,20 多年來,他深入中小學教學第一線,推進新教育實驗,現在身居高位,仍不放棄:一位是我的同學華東師範大學的終身教授葉瀾先生,她不但有很高的理論造詣和學術地位,而且義無反顧地走進中小學開展新基礎教育實驗,現在她年事已高,卻仍在堅持;還有一位是中國教育學會副會長,原西南師範大學校長宋乃慶教授,他身居要職卻幾十年如一日,深入小學課堂,熱衷教育研究,還主持編寫了西南師範大學版小學數學教科書。關於他們的事例我還可以舉出很多,我相信具有中國特色的教育理論體系定能構建成功,中國教育人一定會走出自己的道路。

---

⑮ 朱永新著:《中華教育思想研究》,江蘇教育出版社 1993 年版。

⑯ 張奠宙,于波著:《數學教育的"中國道路"》,上海教育出版社 2013 年版。

⑰ 顧明遠:《為中國當代著名教學流派叢書作的序》,《邱學華與嘗試教育》,國際文化出版公司 2003 年版,第 2 頁。

(四)加強同世界各國的教育文化交流,在國際教育界爭取話語權

習近平主席提出的“人類命運共同體”已受到越來越多的國家讚賞和支持,已有幾十個國家認可和回應“一帶一路”倡議。這是來自中國的聲音,是中國國際地位不斷提升的標誌,值得每個中國人自豪。

現在許多國家派人到中國來學習基礎教育的經驗,如果我們告訴人家:中國的教育已到“癌症晚期”、“救救中國教育、奧數危害甚于黄賭毒……”人家肯定會被嚇跑。現在互聯網的資訊傳播速度非常快,一秒鐘就能傳遍全世界。這些唱衰中國教育的奇談怪論,在外國都能看到,一些美國、加拿大的朋友經常問我:中國的高考和應試教育眞有哪麼可怕嗎?

中國的教育並不是完美的,有的問題還比較嚴重. 但不能信口開河,用戰爭式的語言開罵,應該有事說事,實事求是地分析研究。前面的大量事實已說明,中國基礎教育的成績斐然,舉世矚目。每位教育理論工作者都應該用眞誠的眼光和愛護之心來看待中國基礎教育面對的問題,並進一步通過自己的努力去解決問題。

中國的基礎教育想要在國際上受到尊重,就要先尊重自己,把自己的事情做好,總結提煉教改的成功經驗,積極扶持推廣教改經驗,樹立自己本土的教育名家形象和教改成功案例,推出具有中國特色的教育理論。這些就是中國教育的實力,有了實力才能在國際教育界爭得話語權。

除此之外,我們還應建立對外宣傳的專業隊伍。組織翻譯力量把中國的教育著作、教學理論、教改經驗、典型人物事例翻譯成外國的語言文字,並要創造條件在國外出版發行,我們要有自己的外文國際教育期刊,建立國際交流的平臺。以前我們大都是將外國理論“請進來”,把外國的教育理論和經驗翻譯成中文,在中國傳播;現在應該重點抓“走出去”,把中國的教育理論和經驗翻譯成外文,傳播到國外,讓世界知道中國的經驗和中國的聲音。

我認為中國有兩件寶貝應該先走出國門:一件是國學,另一件是數學教育。國學是中國傳統文化的代表,現在世界各地開設的孔子學院就是證明。中國的中小學數學教育是世界領先的,已得到世界的公認,世界各國中小學數學學科的課程體系、教材編排和使用的數學符號大致相同,是可以互通的。目前,英國率先引進了上海的小學數學課本,這只是開始,以後還會有其他國家,特別是第三世界國家會對中國的教材和教育經驗有更多的需求,我們必須早作準備。

中國人民在黨的十九大精神指引下,意氣風發,豪情滿懷。中國教育理論界的同仁要堅定道路自信、理論自信、制度自信、文化自信,更要做到教育自信,努力構建具有中國特色的教育理論體系,為中國和世界的教育事業發展作出貢獻!

(轉載自:《中國教育科學》第一卷第 2 期(2018 年 11 月)P3 – 16)

作者简介:邱學華,常州大學嘗試教科學研究院院長,主要研究小學數學教育理論和嘗試教育理論。

參考資料:

[1]《國家中長期教育改革和發展規劃綱要(2010－2020年)》,人民出版社2010年版,第7頁。

[2]邱學華:《有感於英國引進上海小學數學課本》,《小學教學教師)2017年第11期。

[3]邱學華:《我所追求的理想學校》,《人民教育》2010年第7期。

[4]李雪峰、何曉東:《"不讓一個孩子落後"法案對中國教育的啟示》,《宜賓學院學報》2011年第10期。

[5]王策三:《恢復全面發展教育的權威一一三評"由應試教育向素質教育轉軌"提法的討論》,《當代教師教育》2017年第1期。

[6]郭本禹主編:《外國心理學經典人物及其理論》,安徽人民出版社2005年版。

[7]楊絳著:《走到人生邊上》,商務印書館2007年版,第88頁。

[8]國際學生評估項目上海項目組著:《品質與公平——上海2009年國際學生評估項目(PISA)結果概要》。上海教育出版社2013年版。

[9]邱學華:《中國數學教育不要向美國學習》,《小學教學(數學版)》2015年第11期。

[10]邱學華:《為"奧數"正名》,《中小學數學(小學版)》2012年第6期。

[11]郭戈:《沒有科學的教育研究,就沒有教育科學》,《華東師範大學(教育科學版)》2017年第3期。

[12]王策三:《應該盡力盡責總結經驗教訓一一評"十年課改超越成敗與否的簡單評價"》,《教育科學研究》2013年第6期。

[13]查有梁:《十年課改的統計詮釋》,《教育科學研究)2012年第11期。

[14]邱學華:《從"衡水中學爭議"說開去》,《中小學教材教學》2015年第10期。

[15]朱永新著:《中華教育思想研究》,江蘇教育出版社1993年版。

[16]張奠宙,于波著:《數學教育的"中國道路"》,上海教育出版社2013年版。

[17]顧明遠:《為中國當代著名教學流派叢書作的序》,《邱學華與嘗試教育》,國際文化出版公司2003年版,第2頁。

在數學教學中使用漫畫:來自新加坡的經驗

澳門大學教育學院　江春蓮

2018 年 10 月 13 日,澳門數學教育研究學會和澳門大學教育學院聯合舉辦了“在數學教學中使用漫畫:來自新加坡的經驗”的講座,講者是新加坡南洋理工大學國立教育學院數學與數學教育系卓鎮南副教授。

講座分七個部分:背景介紹、在教育中利用漫畫的力量、新加坡漫畫研究專案及其得到的一些經驗、後續的計畫、對使用漫畫的批評和總結。

1、背景介紹

雖然新加坡學生在國際數學和科學研究的趨勢(Trends in International Mathematics and Science Study,簡寫為 TIMSS)和國際學生能力評量(Programme for International Student Assessment,簡寫為 PISA)等國際比較研究專案中表現優異,但仍然有很多學生學不好數學(和科學)。

這類學生的學習需求引起了各方的廣泛關注,其中包括:新加坡教育部、學校教師和作為新加坡唯一的教師培訓機構新加坡國立教育學院的研究者等。他們使用了如下一些方法幫助這些學生:(1)加強課堂管理:如給學生設定較高的期望,幫助老師處理課堂上的違紀行為,特別是那些頑皮的學生;(2)運用教育心理學的理論,提高學生的學習動機,努力提高學生在學業方面的自我概念等;(3)運用一般教育學理論,強調合作學習、有區別的教學、元認知策略等;(4)運用數學教育的理論,幫助老師如何更好地講授一個概念, 如何有效地讓學生參與有意義的數學學習活動, 在數學教學中使用探究性的學習任務, 佈置高質量的數學作業等。當然這些方法多少有一些作用,但效果不是很明顯。學生仍然不明白為什麼要學校那麼枯燥的數學,也看不到數學在現在和未來生活和工作中的作用,更看不到數學的美麗,更別說喜歡數學了。

鑒於上述原因,卓教授想到了自己喜歡的漫畫!

2、在教育中利用漫畫的力量

漫畫指的是通過視覺圖像或圖像序列來傳達資訊或想法的任何媒介,通常是卡通形象。漫畫對學齡兒童非常有吸引力,因為漫畫給讀者創造了幽默,帶來了笑聲(Toh, Cheng, Jiang & Lim, 2016; Toh, Cheng, Ho,Jiang & Lim, 2017)。但從傳統意義上來說,漫

畫被視為"學校的敵人"。儘管如此,喜歡漫畫的教育者已經開始利用漫畫的力量來促進學生的學習,因為幽默是一種非常"強大"的知識保留工具。不僅如此,漫畫實際上提供了另外一種看待抽象數學概念的方式(Toh, 2009)。

漫畫:成比例長大。

漫畫:拋物線。

3、新加坡的漫畫研究專案:專對數學低表現的學生

新加坡的初中學生是分流的,不同流向的學生學習不同水準的數學。中學學習快捷類課程的學生約占 62 – 65%,普通(學術)類的約占 25%,他們的課程比快捷類稍慢,普通(技能)類約占 12%,他們的數學要求較低。

2013 年,卓教授對教授普通(技能)類數學課程教師的做了一個調查,調查表明這些中學生在數學學習方面既有認知方面的困難,也有情感方面的困難。認知困難有:讀寫能力低下、小學數學基礎較差、太多步驟時易出現混亂、不能理解抽象的數學概念、沒有足夠的

例子來理解概念、錯誤概念常常未得到澄清，以致積累太多無法前行。情感方面的因素有：缺乏自信，沒有成就感，因持久的失敗帶來的挫敗感，面對挫折時，缺乏忍受力等（Toh & Lui，2014）。這些老師試圖運用適當的教學方法以滿足學生的學習需求、使數學與學生的生活相關聯等以提升學生學習動機和自我效能感，可是收效甚微。

提倡角色扮演講故事的教學方式

Lallbeeharry 和 Narod（2014）報告了在化學教學中使用漫畫取得的一些積極成果，如師生之間、學生與學生之間的課堂互動變得更多，學生的學習興趣變得更高，學生在課堂上的參與度得到提升。鑒於此，卓教授採用了一種完全不同的教學方式，讓學生在課堂上扮演漫畫中的角色，用講故事的方式來進行學習，這樣學生可以自始至終深深參與其中，這是對傳統教學的一種極大突破。

為此，卓教授的團隊研發了初中低年級數學課程中 5 個主題（包括百分比、統計學 I、統計學 II、概率和數學應用）的漫畫，這些漫畫內容包括練習題、活動、讓學生發展高階思考能力的任務等，部分內容可以在網站 http://math.nie.edu.sg/magical 上看到。他們也給教師提供完整的課程綱要，說明如何在課程各個不同的部分運用講故事的教學方式。課堂以老師給學生"講"故事開始，課堂要學生的數學概念包含在故事情境之中，通過對情境問題探討學習新內容。練習問題則可以從同樣的情境問題逐步地過渡到不同情境的問題、典型的考試問題和高階思考能力的問題。

研究的第一輪是在 3 所學校的普通（技能）類的初一年級開始實施，一年後，卓教授和他的團隊對漫畫教學材料進行了修訂。根據教師的初步回饋，學生在漫畫課上的參與度更高，通常容易出現的課堂管理問題也減少了；學生能用漫畫情境"討論數學"；與傳統的教學方法相比，學生在使用漫畫教學的主題中的表現更好。

教師在使用漫畫進行教學的過程中，可以依據教學需要對教學綱要進行改編調整，教師使用角色扮演，讓學生通過大聲朗讀、質疑對方等方式參與到數學對話的共同建構之中。有教師甚至採用了英語語言學習的完形填空的方法，讓學生自創數學漫畫，這是很重要的 21 世紀的數學素養（Toh et al. 2017）。

研究過程中，我們碰到一些有閱讀障礙學生，漫畫提供的較多的視覺線索，極大地幫助該學生解讀相關資訊。與典型的數學文字題相比，漫畫中呈現的資訊是整合的、不是那麼冗長，從而使得閱讀更有興趣，並且願意閱讀，甚至反復閱讀多遍，進而逐步地掌握了相關數學主題的技能。

4、後續的計畫

在 2017－18 學年度，我們已將研究的範圍從 3 所擴大到了 11 所學校的普通（技能）類學生，我們正將全部研究拓展到普通（學術）類學生和快捷類的學生，當然，這就需要調整課程內容，以滿足不同學術傾向學生的需求。

5、**批評與回應**

前面我們提到過,漫畫被視為“學校的敵人”,為什麼呢? 因為人們常常認為漫畫閱讀會把學生變成被動的學習者,致使他們的學習偏離了主要的課程內容。但我們的角色扮演的方式讓他們變成積極主動的學習者! 也有人認為漫畫會稀釋一些數學內容,過度依賴漫畫可能會導致學生不願意閱讀“眞實”的文本內容,但我們層層遞進的課程內容設計,卻為學生需要達到的程度提供了保障!

6、**總結**

卓教授的團隊才開始在這方面進行初步實驗,但實驗的效果卻是很鼓舞人心的,所以希望有更多的人可以一起來試用類似的方法幫助那些學數學有困難的學生。

〔**註**〕本文是澳門大學教育學院江春蓮助理教授根據新加坡南洋理工大學國立教育學院數學與數學教育系卓鎮南副教授的專題講座整理而成的推介文章。

數學競賽中的不等式應用

澳門數學教育研究學會常務理事、秘書長
華東師範大學教育科學院博士
澳門鏡平中學教師
鄧海棠

排序不等式$xy+yz+xz\le x^2+y^2+z^2$是高中數學競賽大綱、新課標要求的基本不等式.它的一般形式是：

設有兩組數 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 及 $b_1,b_2,\cdots,b_n$

滿足 $a_1\le a_2\le\cdots\le a_n, b_1\le b_2\le\cdots\le b_n$,

則有 $a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1\le a_1b_{t1}+a_2b_{t2}+\cdots+a_nb_{tn}\le a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$,

式中:$t_1,t_2,\cdots,t_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的任意一個排列,

當且僅當 $a_1=a_2=\cdots=a_n$, $b_1=b_2=\cdots=b_n$ 時等號成立.

排序不等式常用於與順序無關的一組數乘積的關係.

使用時可以先令$a_1\le a_2\le\cdots\le a_n$確定大小關係.通常會構造一組數,使其與原數構成乘積關係,適用於分式、乘積式尤其是輪換不等式的證明.

排序不等式也可簡記為:反序和 ≤ 亂序和 ≤ 同序和.

它可以推導出很多有名的不等式,例如:算術幾何平均不等式(簡稱算幾不等式),切比雪夫總和不等式和柯西不等式等等,如下述所列：

1. **算幾不等式:** 1. $xy\le\dfrac{x^2+y^2}{2}$; $xyz\le\dfrac{x^3+y^3+z^3}{3}$;

$$2.\ \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\le\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}.$$

2. **車比雪夫(*Chebyshev*) 總和不等式:** 若 $a_1\le a_2\le\cdots\le a_n, b_1\le b_2\le\cdots\le b_n$,

   則 $a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1\le\dfrac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)(b_1+b_2+\cdots+b_n)$,

   當且僅當 $a_1=a_2=\cdots=a_n, b_1=b_2=\cdots=b_n$ 時,等式成立.

3. **柯西(*Cauchy*) 不等式:** $\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\le\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2\right)$當且僅當$\dfrac{a_i}{b_i}=\lambda$(常數)時等號成立.

問題引入

問題 1. 設 a、b、c 為任意正數,求 $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$ 的最小值.

問題 2. 設 a、b、c 為任意正數. 證明: $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{a+b+c}{2}$.

問題 3. 設 a、b、c 為正數, 求証: $\frac{a^{2009}}{b+c}+\frac{b^{2009}}{c+a}+\frac{c^{2009}}{a+b}\geq\frac{3}{2}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{2008}$ (2009 年全澳校際高中數學比賽第二試的第 4 題).

問題推廣

先對上述三個題目作一個一般性的命題歸納如下.

命題: 設 a、b、c 為正數,n 為正整數, 則 $\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b}\geq\frac{3}{2}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{n-1}$.

命題推證

對上述歸納的命題,可以用數學歸納法對之證明如下:

(1) 當 $n=1$ 時,要證的不等式關於 a、b、c 對稱,不妨設 $a\geq b\geq c$,

於是 $a+b\geq a+c\geq b+c$,

所以 $\frac{1}{b+c}\geq\frac{1}{c+a}\geq\frac{1}{a+b}$.

由車比雪夫(*Chebyshev*) 不等式:若 $a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_n, b_1\leq b_2\leq\cdots\leq b_n$,

則 $a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1\leq\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)(b_1+b_2+\cdots+b_n)$.

當且僅當 ,或 $a_1=a_2=\cdots=a_n, b_1=b_2=\cdots=b_n$ 時,等式成立. 得

$$\frac{a}{b+c}(b+c)+\frac{b}{c+a}(c+a)+\frac{c}{a+b}(a+b)\leq\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)(b+c+a+c+a+b)$$

即 $a+b+c\leq\frac{1}{3}\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)2(a+b+c)$

所以 $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$.

(2) 假設當 $n=k(k\in N,\ k\geq 1)$ 時命題成立,

即有 $\frac{a^k}{b+c}+\frac{b^k}{c+a}+\frac{c^k}{a+b}\geq\frac{3}{2}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{k-1}$.

那麼當 $n = k + 1$ 時,仍不妨設 $a \geq b \geq c$,則有 $\frac{a^k}{b+c} \geq \frac{b^k}{c+a} \geq \frac{c^k}{a+b}$.

由車比雪夫(*Chebyshev*)不等式以及歸納假設,可得

$$\frac{a^{k+1}}{b+c} + \frac{b^{k+1}}{c+a} + \frac{c^{k+1}}{a+b} = \frac{a^k}{b+c} \cdot a + \frac{b^k}{c+a} \cdot b + \frac{c^k}{a+b} \cdot c$$

$$\geq \left(\frac{a^k}{b+c} + \frac{b^k}{c+a} + \frac{c^k}{a+b}\right)(a+b+c) \geq \frac{1}{3}\left[\frac{3}{2}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{k-1}\right](a+b+c) = \frac{3}{2}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^k.$$

這說明當 $n = k + 1$ 時,命題也成立.

綜上,對正數 a、b、c 及正整數 n, 總有 $\frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{c+a} + \frac{c^n}{a+b} \geq \frac{3}{2}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{n-1}$.

問題解答

由命題知,當 $n = 1$ 時,得 $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^0 = \frac{3}{2}$,即問題 1 所要求的最小值為$\frac{3}{2}$;

當 $n = 2$ 時,得 $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{3}{2}\left(\frac{a+b+c}{3}\right) = \frac{a+b+c}{2}$,問題 2 得證;

當 $n = 2009$ 時,就成為 2009 年全澳校際高中數學比賽第二試的第 4 題的題目,即問題 3 的情況了.

問題延伸

對於問題引入中的

問題 2. 設 a、b、c 為任意正數. 證明: $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}$. ①

也可以另外證明如下:

證明:由對稱性,不妨設 $a \leq b \leq c$,則 $a^2 \leq b^2 \leq c^2$,得 $\frac{1}{b+c} \leq \frac{1}{c+a} \leq \frac{1}{a+b}$,

可知 ① 式左邊為同序和,記為 S,

由排序不等式得 $S \geq \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} + \frac{a^2}{a+b}$, ②

和 $S \geq \frac{c^2}{b+c} + \frac{a^2}{c+a} + \frac{b^2}{a+b}$, ③

兩式相加得 $2S \geq \frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{c^2+a^2}{c+a} + \frac{a^2+b^2}{a+b}$,

為得到 ① 式右邊的結果,注意到 $2(b^2+c^2) \geq (b+c)^2$,

即 $\dfrac{b^2+c^2}{b+c} \geq \dfrac{1}{2}(b+c)$,

同理: $\dfrac{c^2+a^2}{c+a} \geq \dfrac{1}{2}(c+a)$,

$\dfrac{a^2+b^2}{a+b} \geq \dfrac{1}{2}(a+b)$,

於是:$2S \geq \dfrac{1}{2}(b+c) + \dfrac{1}{2}(a+c) + \dfrac{1}{2}(a+b) = a+b+c$,

所以:$S \geq \dfrac{1}{2}(a+b+c)$,

即$\dfrac{a^2}{b+c} + \dfrac{b^2}{c+a} + \dfrac{c^2}{a+b} \geq \dfrac{a+b+c}{2}$, 從而得證.

問題回歸

但是,這個題目運用基本不等式,也可以另外證明如下:

證明:$\because [(b+c)+(c+a)+(a+b)] \cdot \left(\dfrac{1}{b+c} + \dfrac{1}{c+a} + \dfrac{1}{a+b}\right) \geq (1+1+1)^2 = 9.$

$\therefore (a+b+c)\left(\dfrac{1}{b+c} + \dfrac{1}{c+a} + \dfrac{1}{a+b}\right) \geq \dfrac{9}{2}.$

即 $\dfrac{a+b+c}{b+c} + \dfrac{a+b+c}{c+a} + \dfrac{a+b+c}{a+b} \geq \dfrac{9}{2}.$

得 $\left(1+\dfrac{a}{b+c}\right) + \left(1+\dfrac{b}{c+a}\right) + \left(1+\dfrac{c}{a+b}\right) \geq \dfrac{9}{2}$,

得 $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b} \geq \dfrac{3}{2}.$

問題拓廣

『注』上述問題回歸中的這個不等式可以推廣為:

設 $x_i > 0, i = 1,2,\cdots,n$ 且令 $S = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$,

則有 $\dfrac{x_1}{S-x_1} + \dfrac{x_2}{S-x_2} + \dfrac{x_3}{S-x_3} + \cdots + \dfrac{x_n}{S-x_n} \geq \dfrac{n}{n-1}$,

當且僅當 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 時取得等號成立.

對於這個推廣的證明如下:

證明: $\dfrac{x_1}{S-x_1} + \dfrac{x_2}{S-x_2} + \dfrac{x_3}{S-x_3} + \cdots + \dfrac{x_n}{S-x_n}$

$= \dfrac{S-(S-x_1)}{S-x_1} + \dfrac{S-(S-x_2)}{S-x_2} + \dfrac{S-(S-x_3)}{S-x_3} + \cdots + \dfrac{S-(S-x_n)}{S-x_n}$

$$= S\left(\frac{1}{S-x_1}+\frac{1}{S-x_2}+\frac{1}{S-x_3}+\cdots+\frac{1}{S-x_n}\right)-n$$

$$= \frac{1}{n-1}[(S-x_1)+(S-x_2)+\cdots+(S-x_n)]\left(\frac{1}{S-x_1}+\frac{1}{S-x_2}+\cdots+\frac{1}{S-x_n}\right)-n$$

$$\geq \frac{1}{n-1}n^2-n\text{(根據柯西不等式可得)}$$

$$= \frac{n}{n-1}.$$

當且僅當$(S-x_1):(S-x_2):\cdots:(S-x_n)=\frac{1}{S-x_1}:\frac{1}{S-x_2}:\cdots:\frac{1}{S-x_n}$,

也即 $\dfrac{S-x_1}{\frac{1}{S-x_1}}=\dfrac{S-x_2}{\frac{1}{S-x_2}}=\cdots=\dfrac{S-x_n}{\frac{1}{S-x_n}}$

得 $S-x_1=S-x_2=\cdots=S-x_n$.

即 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 時取得等號成立.

結論應用

練習題 1. 如果 $a+b+c=1$,求 $\sqrt{3a+1}+\sqrt{3b+1}+\sqrt{3c+1}$ 的最大值.

這是一道非常好的題目,能夠充分應用上述的結論來求解.

解法 1:利用“$x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+xz$”這個知識點求解如下:

令 $x=\sqrt{3a+1}$, $y=\sqrt{3b+1}$, $z=\sqrt{3c+1}$, $t=x+y+z$,

則 $t^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz\leq 3(x^2+y^2+z^2)=18$,

所以 $t\leq 3\sqrt{2}$,當且僅當 $a=b=c=\frac{1}{3}$ 時,等號成立.

解法 2:利用“$\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\leq\sqrt{\dfrac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}$”這個知識點求解如下:

得 $\dfrac{\sqrt{3a+1}+\sqrt{3b+1}+\sqrt{3c+1}}{3}\leq\sqrt{\dfrac{(3a+1)+(3b+1)+(3c+1)}{3}}$

$$=\sqrt{\frac{3(a+b+c)+3}{3}}=\sqrt{2},$$

所以 $\sqrt{3a+1}+\sqrt{3b+1}+\sqrt{3c+1}\leq 3\sqrt{2}$,當且僅當 $a=b=c=\frac{1}{3}$ 時,等號成立.

解法 3:取 *Cauchy* 不等式“$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\leq\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)$當且僅當$\frac{a_i}{b_i}=\lambda$(常數)時等號成立”的三元式,得

$(\sqrt{3a+1}\cdot 1+\sqrt{3b+1}\cdot 1+\sqrt{3c+1}\cdot 1)^2 \le [(3a+1)+(3b+1)+(3c+1)]\cdot(1^2+1^2+1^2)=6\times 3=18$,

所以 $\sqrt{3a+1}+\sqrt{3b+1}+\sqrt{3c+1}\le 3\sqrt{2}$,當且僅當 $a=b=c=\frac{1}{3}$ 時,等號成立.

解法 4:由均值不等式:$xy\le\frac{x^2+y^2}{2}$,

得 $\sqrt{3a+1}=\frac{\sqrt{3a+1}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\le\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{(3a+1)+2}{2}=\frac{3a+3}{2\sqrt{2}}$,

同理可得:$\sqrt{3b+1}\le\frac{3b+3}{2\sqrt{2}}$, $\sqrt{3c+1}\le\frac{3c+3}{2\sqrt{2}}$,

三式相加得 $\sqrt{3a+1}+\sqrt{3b+1}+\sqrt{3c+1}\le\frac{3(a+b+c)+9}{2\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$,

當且僅當 $a=b=c=\frac{1}{3}$ 時,等號成立.

解法 5:根據平面向量數量積的性質:$\overrightarrow{mn}\le|\overrightarrow{m}||\overrightarrow{n}|$,

構造向量 $\overrightarrow{m}=(\sqrt{3a+1},\sqrt{3b+1},\sqrt{3c+1})$, $\overrightarrow{n}=(1,1,1)$,

得 $\sqrt{3a+1}\cdot 1+\sqrt{3b+1}\cdot 1+\sqrt{3c+1}\cdot 1\le\sqrt{(3a-+1)+(3b+1)+(3c+1)}\cdot\sqrt{(1^2+1^2+1^2)}=\sqrt{18}$,

所以 $\sqrt{3a+1}+\sqrt{3b+1}+\sqrt{3c+1}\le 3\sqrt{2}$,當且僅當 $a=b=c=\frac{1}{3}$ 時,等號成立.

練習題 2. 設 a,b,c,d,e 是實數,使得 $a+b+c+d+e=8$ 且 $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=16$,求 e 的最大值.

解:由 $a+b+c+d+e=8$ 得 $a+b+c+d=8-e$. ①

由 $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=16$ 得 $a^2+b^2+c^2+d^2=16-e^2$. ②

運用柯西不等式得 $(a+b+c+d)^2\le(1+1+1+1)(a^2+b^2+c^2+d^2)$,

即 $(8-e)^2\le 4(16-e^2)$,

解之得 $0\le e\le\frac{16}{5}$.

當且僅當 $a=b=c=d=\left(8-\frac{16}{5}\right)\div 4=\frac{6}{5}$ 時 e 有最大值為 $\frac{16}{5}$.

練習題 3. 求證 a,b,c,d,e 若都是正整數,則 $\frac{a}{b+2c+3d+4e}+\frac{b}{c+2d+3e+4a}+$

$$\frac{c}{d+2e+3a+4b}+\frac{d}{e+2a+3b+4c}+\frac{e}{a+2b+3c+4d}\geq\frac{1}{2}.$$

證明: 由柯西不等式得到當 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5;y_1,y_2,y_3,y_4,y_5 都是正實數時,

有$\left(\sum_{i=1}^{5}x_i\right)^2\leq\left(\sum_{i=1}^{5}x_iy_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{y_i}\right)$.

現在設$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(a,b,c,d,e)$及$(y_1,y_2,y_3,y_4,y_5)=(b+2c+3d+4e,c+2d+3e+4a,d+2e+3a+4b,e+2a+3b+4c,a+2b+3c+4d)$ 設 $A=\frac{a}{b+2c+3d+4e}+\frac{b}{c+2d+3e+4a}+\frac{c}{d+2e+3a+4b}+\frac{d}{e+2a+3b+4c}+\frac{e}{a+2b+3c+4d}$,

則由上式所示,得 $A\times5(ab+ac+ad+ae+bc+bd+be+cd+ce+de)\geq(a+b+c+d+e)^2$,

$$\therefore A\geq\frac{(a+b+c+d+e)^2}{5(ab+ac+ad+ae+bc+bd+be+cd+ce+de)}.$$

但是,由$(a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(a-e)^2+(b-c)^2+(b-d)^2+(b-e)^2+(c-d)^2+(c-e)^2+(d-e)^2\geq0$ 得 $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2\geq\frac{1}{2}(ab+ac+ad+ae+bc+bd+be+cd+ce+de)$.

$$\therefore(a+b+c+d+e)^2\geq\frac{5}{2}(ab+ac+ad+ae+bc+bd+be+cd+ce+de).$$

得 $A\geq\frac{1}{2}$,命題得證.

練習題 4. (1) 若 a,b,c 是正數,且 $a+b+c=1$,

試證明$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2+\left(c+\frac{1}{c}\right)^2\geq\frac{100}{3}$.

(2) 若 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是正數,且 $a_1+a_2+\cdots+a_n=1$,

試求$\left(a_1+\frac{1}{a_1}\right)^2+\left(a_2+\frac{1}{a_2}\right)^2+\cdots+\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)^2$ 的最小值.

解: (1) 證明:由已知 $a+b+c=1$,及柯西不等式,

得 $\left[\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2+\left(c+\frac{1}{c}\right)^2\right](1^2+1^2+1^2)$

$\geq\left(a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}+c+\frac{1}{c}\right)^2$

$=\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2$;

又根據 $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a+b+c)\geq(1+1+1)^2=9$,

從而 $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2+\left(c+\frac{1}{c}\right)^2\geq\frac{\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}{3}\geq\frac{(1+9)^2}{3}=\frac{100}{3}$.

(2) **解:** 由已知 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$,及柯西不等式,

得 $\sum_{i=1}^{n}\left(a_i + \frac{1}{a_i}\right)^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}(1)^2 \geq \left[\sum_{i=1}^{n}\left(a_i + \frac{1}{a_i}\right)\right]^2 = \left(1 + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)^2$,

又 $\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right) = \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right) \geq n^2$,

所以 $\sum_{i=1}^{n}\left(a_i + \frac{1}{a_i}\right)^2 \cdot n \geq \left(1 + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)^2$

得 $\sum_{i=1}^{n}\left(a_i + \frac{1}{a_i}\right)^2 \geq \frac{\left(1 + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)^2}{n} \geq \frac{(1 + n^2)^2}{n}$,

當且僅當 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 時,等號成立,

故 $\left(a_1 + \frac{1}{a_1}\right)^2 + \left(a_2 + \frac{1}{a_2}\right)^2 + \cdots + \left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)^2$ 的最小值為 $\frac{(1 + n^2)^2}{n}$.

練習題 5. 設 a,b,c 是正數,試證 $\frac{a}{b+c} + \frac{4b}{c+a} + \frac{9c}{a+b} > 4$.

證明: 令 $a + b + c = S$,

則 $\frac{a}{b+c} + \frac{4b}{c+a} + \frac{9c}{a+b}$

$= \frac{S-(b+c)}{b+c} + \frac{4[S-(c+a)]}{c+a} + \frac{9[S-(a+b)]}{a+b}$

$= S\left(\frac{1}{b+c} + \frac{4}{c+a} + \frac{9}{a+b}\right) - (1+4+9)$

$= (a+b+c) \cdot \left(\frac{1}{b+c} + \frac{4}{c+a} + \frac{9}{a+b}\right) - 14$

$= \frac{1}{2}[(b+c) + (c+a) + (a+b)] \cdot \left(\frac{1}{b+c} + \frac{4}{c+a} + \frac{9}{a+b}\right) - 14$

$= \frac{1}{2}[(\sqrt{b+c})^2 + (\sqrt{c+a})^2 + (\sqrt{a+b})^2] \cdot \left[\left(\frac{1}{\sqrt{b+c}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{c+a}}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{a+b}}\right)^2\right] - 14$

$\geq \frac{1}{2}(1+2+3)^2 - 14$ (運用柯西不等式可得)

$= 18 - 14$

$= 4$.

當且僅當 $\left(\frac{\sqrt{b+c}}{\frac{1}{\sqrt{b+c}}}\right) = \left(\frac{\sqrt{c+a}}{\frac{2}{\sqrt{c+a}}}\right) = \left(\frac{\sqrt{a+b}}{\frac{3}{\sqrt{a+b}}}\right)$

即 $\frac{b+c}{1} = \frac{c+a}{2} = \frac{a+b}{3}$

即 $a = 2b$ 且 $c = 0$ 時,等號成立;

但是,題設中 a,b,c 是正數,故而等號不成立;

則 $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{4b}{c+a}+\dfrac{9c}{a+b}>4.$

練習題 6. 試證對所有正實數 a,b,c,都有 $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\dfrac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\dfrac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geq 1.$

證明:可以考慮首先證明 $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}\geq\dfrac{a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}}$,

或者等價證明$(a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}})^2\geq a^{\frac{2}{3}}(a^2+8bc)$.

由算幾不等式可得$(a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}})^2-(a^{\frac{4}{3}})^2$

$=(b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}})\cdot(a^{\frac{4}{3}}+a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}})$

$\geq 2b^{\frac{2}{3}}c^{\frac{2}{3}}\cdot 4a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}=8a^{\frac{2}{3}}bc$,

故$(a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}})^2\geq(a^{\frac{4}{3}})^2+8a^{\frac{2}{3}}bc=a^{\frac{2}{3}}(a^2+8bc)$,

得 $$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}\geq\frac{a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}},$$

同理可得$$\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}\geq\frac{b^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}},$$

$$\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geq\frac{c^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}},$$

將上面三個不等式同向相加得 $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\dfrac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\dfrac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geq 1.$

練習題 7. 試證明對所有正實數 a,b,c,都有 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\leq\dfrac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3}.$

證明:不妨設 $a\geq b\geq c\geq 0$,則有 $\dfrac{1}{bc}\geq\dfrac{1}{ca}\geq\dfrac{1}{ab}$.

得 $$\begin{aligned}\frac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3}&=\frac{a^5}{b^3c^3}+\frac{b^5}{a^3c^3}+\frac{c^5}{a^3b^3}\\&\geq\frac{a^5}{a^3c^3}+\frac{b^5}{a^3b^3}+\frac{c^5}{c^3b^3}\qquad\text{(運用排序不等式)}\\&=\frac{a^2}{c^3}+\frac{b^2}{a^3}+\frac{c^2}{b^3}\\&\geq\frac{a^2}{a^3}+\frac{b^2}{b^3}+\frac{c^2}{c^3}\qquad\text{(運用排序不等式)}\\&=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.\end{aligned}$$

從而,對所有正實數 a,b,c,都有 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\leq\dfrac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3}.$

練習題 8. 已知非負實數 a,b,c 滿足 $a+b+c=1$，對正數 x_1,x_2,x_3，若 $\begin{cases} y_1 = ax_1+bx_2+cx_3 \\ y_2 = ax_2+bx_3+cx_1 \\ y_3 = ax_3+bx_1+cx_2 \end{cases}$，試證明：$y_1y_2y_3 \geq x_1x_2x_3$.

證明：運用柯西不等式，由 $a+b+c=1$，

$$\begin{aligned}
\text{得 } y_1y_2y_3 &= (ax_1+bx_2+cx_3)\cdot(ax_2+bx_3+cx_1)\cdot(ax_3+bx_1+cx_2) \\
&= (ax_1+bx_2+cx_3)\cdot(ax_2+bx_3+cx_1)\cdot(ax_3+bx_1+cx_2)\cdot(a+b+c) \\
&\geq (a\sqrt{x_1x_2}+b\sqrt{x_2x_3}+c\sqrt{x_3x_1})^2\cdot(a\sqrt{x_3}+b\sqrt{x_1}+c\sqrt{x_2})^2 \\
&\geq (a\cdot\sqrt[4]{x_1x_2x_3}+b\cdot\sqrt[4]{x_1x_2x_3}+c\cdot\sqrt[4]{x_1x_2x_3})^4 \\
&= (\sqrt[4]{x_1x_2x_3})^4\cdot(a+b+c)^4 \\
&= (x_1x_2x_3)\cdot(1)^4 \\
&= x_1x_2x_3.
\end{aligned}$$

即有 $y_1y_2y_3 \geq x_1x_2x_3$ 成立.

練習題 9. 設 $x^2+y^2=2$，求 $x^2+y^2+6x+2y+10$ 的最大值及取得最大值時的 x 與 y 的值.

解法 1：由 $x^2+y^2=2$，

得 $x^2+y^2+6x+2y+10 = 2+6x+2y+10 = 12+2(3x+y)$；

運用柯西不等式得 $(3x+y)^2 \leq (3^2+1^2)\cdot(x^2+y^2) = 10\times 2 = 20$，

從而 $|3x+y| \leq \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$，得 $-2\sqrt{5} \leq 3x+y \leq 2\sqrt{5}$，

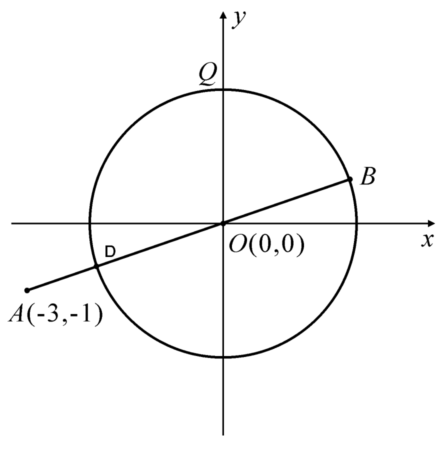
所以 $x^2+y^2+6x+2y+10 = 12+2(3x+y) \leq 12+4\sqrt{5}$，

當且僅當 $\frac{x}{3}=\frac{y}{1}$ 即 $x=3y$ 時，等號成立，

把 $x=3y$ 代入 $x^2+y^2=2$ 得 $y^2=\frac{1}{5}$，

解得 $y=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$（負數不合，捨去），得 $x=\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

解法 2：由於方程 $x^2+y^2=2$ 表示的軌跡是以原點 O 為圓心，半徑為 $\sqrt{2}$ 的圓，可記這個圓為 $\odot Q$；由 $x^2+y^2+6x+2y+10=(x+3)^2+(y+1)^2$，設 $d=(x+3)^2+(y+1)^2$，則問題轉化為"在以原點 O 為圓心，半徑為 $\sqrt{2}$ 的圓 Q 上找一點 $B(x,y)$，使點 B 與點 $A(-3,-1)$ 的距離達到最大".



如圖所示,可知當線段 AB 通過圓心 O 時出現最大值,此時 $|AB| = |AO| + |OB| = \sqrt{(0+3)^2 + (0+1)^2} + \sqrt{2} = \sqrt{10} + \sqrt{2}$,得 $d = |AB|^2 = (\sqrt{10} + \sqrt{2})^2 = 12 + 4\sqrt{5}$;由兩點式可得直線 AB 的方程為 $x - 3y = 0$,聯立 $x^2 + y^2 = 2$ 可解得 $\begin{cases} x = \dfrac{3\sqrt{5}}{5} \\ y = \dfrac{\sqrt{5}}{5} \end{cases}$ 或者 $\begin{cases} x = -\dfrac{3\sqrt{5}}{5} \\ y = -\dfrac{\sqrt{5}}{5} \end{cases}$(負數不合,捨去). 數形結合法雖然直觀,但是運算量頗大,比不上用柯西不等式那麼簡約雅緻,一氣呵成.

解法 3:就本題而言,由方程 $x^2 + y^2 = 2$ 類比 $cos^2\alpha + sin^2\alpha = 1$,可以考慮用三角換元法來求解 $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 10$ 的最大值.

令 $x = \sqrt{2}cos\alpha, y = \sqrt{2}sin\alpha$,

得 $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 10$

$= 12 + 2(3x + y)$

$= 12 + 2(3\sqrt{2}cos\alpha + \sqrt{2}sin\alpha)$

$= 12 + 2\sqrt{2}(3cos\alpha + sin\alpha)$

$= 12 + 2\sqrt{20}\left(\dfrac{3}{\sqrt{10}}cos\alpha + \dfrac{1}{\sqrt{10}}sin\alpha\right)$ (令 $\dfrac{3}{\sqrt{10}} = sin\beta, \dfrac{1}{\sqrt{10}} = cos\beta$)

$= 12 + 4\sqrt{5}sin(\alpha + \beta)$

$\leq 12 + 4\sqrt{5}$.

練習題 10. 設 x, y, z 都是正數,且 $x + y + z = 1$,

(1) 求 $\dfrac{1}{x} + \dfrac{4}{y} + \dfrac{9}{z}$ 的最小值;

(2) 求 $\sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} + \sqrt{z+1}$ 的最大值;

(3) 求 $\sqrt[3]{3x+7} + \sqrt[3]{3y+7} + \sqrt[3]{3z+7}$ 的最大值.

解:(1) 運用柯西不等式得

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{9}{z} &= \left(\frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{9}{z}\right)\cdot 1 \\ &= \left(\frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{9}{z}\right)\cdot(x + y + z) \\ &= \left[\left(\sqrt{\frac{1}{x}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{4}{y}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{9}{z}}\right)^2\right]\cdot[(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2 + (\sqrt{z})^2] \\ &\geq (\sqrt{1} + \sqrt{4} + \sqrt{9})^2 = 36.\end{aligned}$$

當且僅當 $\dfrac{\sqrt{\dfrac{1}{x}}}{\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{\dfrac{4}{y}}}{\sqrt{y}}=\dfrac{\sqrt{\dfrac{9}{z}}}{\sqrt{z}}$ 即 $\dfrac{1}{x}=\dfrac{2}{y}=\dfrac{3}{z}$,

即 $x=\dfrac{1}{6}, y=\dfrac{1}{3}, z=\dfrac{1}{2}$ 時,等號成立,得 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}+\dfrac{9}{z}$ 的最小值為 36.

(2)運用柯西不等式,

$\because (\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}+\sqrt{z+1})^2$

$\leq [(\sqrt{x+1})^2+(\sqrt{y+1})^2+(\sqrt{z+1})^2](1^2+1^2+1^2)$

$=3(x+y+z+3)=3(1+3)=12.$

$\therefore \sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}+\sqrt{z+1}\leq 2\sqrt{3}.$

當且僅當 $\dfrac{\sqrt{x+1}}{1}=\dfrac{\sqrt{y+1}}{1}=\dfrac{\sqrt{z+1}}{1}$ 即 $x=y=z=\dfrac{1}{3}$ 時,等號成立,

得 $\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}+\sqrt{z+1}$ 的最大值為 $2\sqrt{3}$.

(3)運用柯西不等式,

$\because \sqrt[3]{3x+7}\cdot\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{8}\leq \dfrac{(3x+7)+8+8}{3}=x+\dfrac{23}{3},$

$\therefore \sqrt[3]{3x+7}\leq \dfrac{x+\dfrac{23}{3}}{4}=\dfrac{x}{4}+\dfrac{23}{12};$

同理可得 $\sqrt[3]{3y+7}\leq \dfrac{y}{4}+\dfrac{23}{12};$

$\sqrt[3]{3z+7}\leq \dfrac{z}{4}+\dfrac{23}{12};$

從而 $\sqrt[3]{3x+7}+\sqrt[3]{3y+7}+\sqrt[3]{3z+7}\leq \dfrac{x+y+z}{4}+3\times\dfrac{23}{12}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{23}{4}=6,$

當且僅當 $\sqrt[3]{3x+7}=\sqrt[3]{3y+7}=\sqrt[3]{3z+7}$ 即 $x=y=z=\dfrac{1}{3}$ 時,等號成立,

得 $\sqrt[3]{3x+7}+\sqrt[3]{3y+7}+\sqrt[3]{3z+7}$ 的最大值為 6.

練習題 11. 已知 x、y、$z>0$,並且 $\dfrac{x^2}{1+x^2}+\dfrac{y^2}{1+y^2}+\dfrac{z^2}{1+z^2}=2,$

求證: $\dfrac{x^2}{1+x^2}+\dfrac{y^2}{1+y^2}+\dfrac{z^2}{1+z^2}\leq\sqrt{2}.$

證明: 由已知 $\dfrac{x^2}{1+x^2}+\dfrac{y^2}{1+y^2}+\dfrac{z^2}{1+z^2}=2,$

易知 $\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{1}{1+y^2}+\dfrac{1}{1+z^2}=1,$

運用柯西不等式,得 $\left(\frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2}+\frac{z}{1+z^2}\right)^2$

$=\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\cdot\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\cdot\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\right)^2$

$\leq\left(\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}+\frac{1}{1+z^2}\right)\left(\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{y^2}{1+y^2}+\frac{z^2}{1+z^2}\right)$

$=1\times 2=2$,

$\therefore\ \frac{x^2}{1+x^2}+\frac{y^2}{1+y^2}+\frac{z^2}{1+z^2}\leq\sqrt{2}$.

練習題 12. 已知 $a,b,c,x,y,z\in R^+$,且 $a+2b+3c=4$, $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}=8$,求 $\sqrt{\frac{a}{x}}+2\sqrt{\frac{b}{y}}+3\sqrt{\frac{c}{z}}$ 的最大值.

解: 運用柯西不等式,

$\because\left(\sqrt{\frac{a}{x}}+2\sqrt{\frac{b}{y}}+3\sqrt{\frac{c}{z}}\right)^2$

$\leq[(\sqrt{a})^2+(\sqrt{2b})^2+(\sqrt{3c})^2]\left[\left(\sqrt{\frac{1}{x}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{2}{y}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{3}{z}}\right)^2\right]$

$=(a+2b+3c)\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}\right)$

$=4\times 8=32$,

當且僅當 $\sqrt{\frac{8}{4}}\sqrt{a}=\sqrt{\frac{1}{x}}$, $\sqrt{\frac{8}{4}}\sqrt{2b}=\sqrt{\frac{2}{y}}$, $\sqrt{\frac{8}{4}}\sqrt{3c}=\sqrt{\frac{3}{z}}$,即 $ax=by=cz=\frac{1}{2}$ 時取等號.

$\therefore\left(\sqrt{\frac{a}{x}}+2\sqrt{\frac{b}{y}}+3\sqrt{\frac{c}{z}}\right)_{max}=4\sqrt{2}$.

練習題 13. 已知 $a,b,c\geq 0$,且滿足 $a+b+c\leq 3$,求 $f(a,b,c)=\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}$ 的最小值.

解: 由題設,運用柯西不等式,得

$6\cdot f(a,b,c)\geq[(1+a)+(1+b)+(1+c)]\left(\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\right)$

$\geq(1+1+1)^2=9$,

即 $f(a,b,c)\geq\frac{3}{2}$,

當且僅當 $1+a=1+b=1+c$ 及 $a+b+c=3$

即 $a=b=c=1$ 時,等號成立;

故而當且僅當 $a=b=c=1$ 時,$f(a,b,c)=\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}$ 的最小值為$\frac{3}{2}$.

練習題 14. 若 $a,b,c\geq 0$ 且 $a+b+c=8$,求$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ 的最大值和最小值.

解:運用柯西不等式,

$\because [(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2+(\sqrt{c})^2]\cdot(1^2+1^2+1^2)\geq(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2$,

$\therefore\ \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\leq\ \sqrt{8\times 3}=2\sqrt{6}$,

當且僅當$\sqrt{a}=\sqrt{b}=\sqrt{c}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$即 $a=b=c=2\sqrt{2}$ 時,等號成立;

由 $a,b,c\geq 0$,

得$(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2=(a+b+c)+2(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca})\geq a+b+c=8$,

所以$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\geq\sqrt{8}=2\sqrt{2}$,

當且僅當$\sqrt{a}=\sqrt{b}=\sqrt{c}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$即 $a=b=c=\frac{8}{9}$ 時,等號成立(注意,這裡沒有使用均值不等式、柯西不等式之類要滿足“一正二定三相等”的條件,這只是一個必要條件,而並非充分且必要條件,所以不用也不能寫這個要求,其它的解還有 $a=b=0,c=8$ 或者 $a=c=0,b=8$ 或者 $a=8,b=c=0$ 等);

綜上可得$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ 的最大值和最小值分別為 $2\sqrt{6}$ 和 $2\sqrt{2}$.

練習題 15. 已知 $a,b,c\geq 0$,求$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}$ 的最小值.

分析:當直接應用基本不等式有困難時,不妨考慮對所求式子作變形運算如下:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}=\frac{a}{\sqrt{a(b+c)}}+\frac{b}{\sqrt{b(c+a)}}+\frac{c}{\sqrt{c(a+b)}},$$

再對右式每一項的分母用均值不等式,

可得$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}\geq 2$.

但是,這裡的等號並不具備成立的條件!

問題出在哪兒?

問題就出在上面的變形中!

因為這個變形的前提是 a,b,c 均不為 0,而原式中是可以允許 a,b,c 中恰有一個為 0 的!顯然,a,b,c 中至多可以允許有一個為 0!

若其中一個為 0,不妨設 $c=0$,則原式 $=\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\geq 2$,其中等號當且僅當 $a=b\neq 0$

時成立. 這說明 2 確實是原式的最小值.

解:由上述分析知,a,b,c 中至多可以允許有一個為 0.

若 a,b,c 其中一個為 0,不妨設 $c=0$,

則原式 $=\sqrt{\dfrac{a}{b}}+\sqrt{\dfrac{b}{a}}\geq 2$,當且僅當 $a=b\neq 0$ 時等號成立.

若 a,b,c 均不為 0,則

$$原式=\frac{a}{\sqrt{a(b+c)}}+\frac{b}{\sqrt{b(c+a)}}+\frac{c}{\sqrt{c(a+b)}}$$

$$\geq \frac{a}{\frac{a+(b+c)}{2}}+\frac{b}{\frac{b+(c+a)}{2}}+\frac{c}{\frac{c+(a+b)}{2}} \qquad (這裡的等號不能成立!)$$

$$=\frac{2a}{a+(b+c)}+\frac{2b}{b+(c+a)}+\frac{2c}{c+(a+b)}$$

$$=\frac{2(a+b+c)}{a+b+c}=2.$$

綜上可知,當 $a=b\neq 0,c=0$;或者 $a=c\neq 0,b=0$;或者 $b=c\neq 0,a=0$ 時等號成立,得原式的最小值為 2.

可見,選擇合適並正確使用有關的不等式定理來解題和證明,同時保持解答過程中的同解變形和恆等變形也是很重要的 .

參考文獻:

[1]《臺灣高中數學競賽試題選》,國立中央大學數學系,陳弘毅.

[2]《奧數教程(高二年級)》,華東師範大學出版社,2007 年第四版.

[3]《"希望杯" 數學能力培訓教程(高二)》,2005 年 12 月第一版.

[4]《臺灣高考數學試題(理科) 匯編詳解(2011)》,澳門出版協會,李偉東.

[5]《超級數學專題題典 —— 不等式》,上海世界圖書出版公司,BSK 高考命題研究組,2007 年 2 月第 1 版.

選例淺說“算兩次”

澳門數學教育研究學會　鄭志民

一、“好範例”作引子,“算兩次”易入門

請看顧下面一個典型的幾何問題的兩種解法.

〔例〕如圖1－1所示,兩圓$\odot O_1$與$\odot O_2$外切,它們的半徑分別為r_1, r_2. 外公切線EF切$\odot O_1$於E、切$\odot O_2$於F. $\odot O$與$\odot O_1$、$\odot O_2$及EF相切(如圖1－1). 求證$\odot O$的半徑r與$\odot O_1$和$\odot O_2$的半徑r_1, r_2滿足:

$$\frac{1}{\sqrt{r}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} \qquad (1)$$

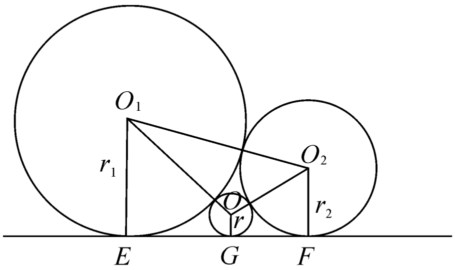


圖1−1

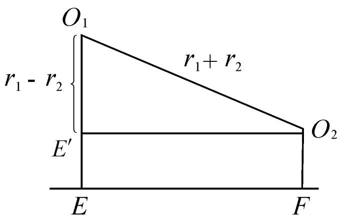


圖1−2

設$\odot O$與EF相切於G. 由已知

〔證法一〕$O_1O_2 = r_1 + r_2, O_1O = r_1 + r, OO_2 = r + r_2$

在圖1－2中,過O_2作直線$O_2E' \mathbin{/\mkern-5mu/} FE$,交$O_1E$於$E'$. 易知$O_1E' = r_1 - r_2$,從而有

$$EF = O_2E' = \sqrt{(r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2} = 2\sqrt{r_1r_2} \qquad (2)$$

EF還有另一種算法,即

〔證法二〕如圖1－1知:

$$EF = EG + GF \qquad (3)$$

而與(2)類似,我們有

$$EG = 2\sqrt{r_1r}, GF = 2\sqrt{rr_2} \qquad (4)$$

將(2)、(4)代入(3)得

$$2\sqrt{r_1r_2} = 2\sqrt{r_1r} + 2\sqrt{rr_2} \qquad (5)$$

(5) 式兩邊同除以 2 $\sqrt{r_1 r_2 r}$ 便得到(1).

極為普通的(3) 式卻是本題的關鍵(熟悉解析幾何的讀者不難看出(3) 實際上就是 $\triangle O_1OO_2$ 的三條邊在 EF 上的射影之和為“0”).

本例的兩種證法被稱為對一個數學問題的**“算兩次”**.

幾何中,常常采用**“算兩次”** 的方法.

“算兩次”,是一種重要的數學方法,也稱做富比尼(*G. Fubini*) 原理.

細心的小學生做完算術題後,常常再算一次,檢驗結果是否正確. 檢驗,可以原原本本地重算一遍(這樣做不太容易發現自己的錯誤),也可以採用不同的方法,例如減法用加法檢驗,除法用乘法檢驗等等.

學過列方程解應用題的同學一定知道**“為了得到一個方程,我們必須把同一個量以兩種不同的方法表示出來. ”**(波利亞著《數學的發現》第一卷,歐陽絳譯本 37 頁),即將一個量**“算兩次”** 這種手法在幾何計算中也極為常見.

不僅計算題、求解題需要這樣做,在證明中,用兩種方法計算同一個量,更是一種行之有效的基本方法.

單墫教授在其專著《**算兩次**》的前言中寫了上述的一段話. 我借用它作為本文之“引例” 的說明.

二、“五彩繽紛” 算兩次,“深入淺出” 見功夫

〔**例 1**〕梯形的面積等於一腰和另一腰中點到這腰距離的積.

〔**已知**〕梯形 $ABCD$ 中,$AB \parallel DC$,M 是 BC 的中點,$MN \perp AD$ 於 N(圖 2 - 1).

〔**求證**〕$S_{梯形ABCD} = MN \cdot AD$.

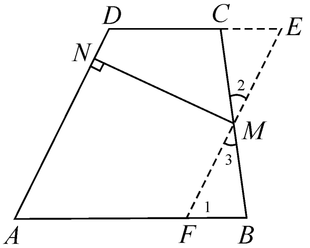


圖2-1

〔**證法一**〕過 M 作 $EF \parallel AD$ 交 DC 的延長線於 E,交 AB 於 F,

$\because DC \parallel AB$,

$\therefore \angle E = \angle 1$,

又 $\angle 2 = \angle 3$,$MC = MB$($\because M$ 為 BC 的中點),

$\therefore \triangle MCE \cong \triangle MBF$,

$\therefore S_{梯形ABCD} = S_{\square AFED}$.

又 $MN \perp AD$ 於 N,

$\therefore S_{\square AFED} = MN \cdot AD$,

即 $S_{梯形ABCD} = MN \cdot AD$.

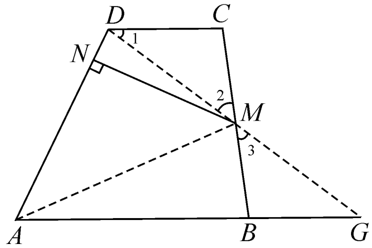


圖2-2

〔**證法二**〕連結 DM,延長交 AB 的延長線於 G(圖 2 - 2).

$\because DC \parallel AB$,

$\therefore \angle 1 = \angle G$,

又 $\angle 2 = \angle 3$,$MC = MA$($\because M$ 為 BC 的中點),

$\therefore \triangle MCD \cong \triangle MBG.$

$\therefore DM = MG$,且 $S_{\triangle MBG} = S_{\triangle MCD}$.

連結 AM,

則 $S_{\triangle ADM} = S_{\triangle AMG}$.

又 $MN \perp AD$ 於 N,

$\therefore S_{\triangle ADG} = 2S_{\triangle ADM} = 2 \cdot \frac{1}{2}MN \cdot AD = MN \cdot AD.$

$\therefore S_{梯形ABCD} = S_{ABMD} + S_{\triangle MCD} = S_{ABCD} + S_{\triangle MBG} = S_{\triangle ADG} = MN \cdot AD$,

即 $S_{梯形ABCD} = MN \cdot AD$.

〔**評註**〕本題兩種證法都是**割補法**. 證法一將梯形 $ABCD$ 割補為等積的平行四邊形 $AFED$;證法二將梯形 $ABCD$ 割補為等積的三角形 ADG. **割補法是證明面積問題的一種基本方法**.

〔**例** 2〕證明重要不等式:$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$($a$、$b$ 皆為正數,當且僅當 $a = b$ 時,等號成立).

〔**證法一**〕$\because (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$ (a,b 均為正數,當且僅當 $a = b$ 時,等號成立).

$\therefore a + b - 2\sqrt{ab} \geq 0$,

即 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$(當 $a = b$ 時,等號成立).

(即兩正數的算術平均值不少於這兩正數的幾何平均值).

〔**證法二**〕a,b 皆為正數,作線段 $AC = a$,延長 AC 至 B,使 $CB = b$. 以 AB 為直徑作半圓,過 C 作 $CD \perp AB$ 交半圓周於 D(如圖 2 - 3).

由幾何性質可知 $CD^2 = AC \cdot CB = ab$.

$\therefore CD = \sqrt{ab}.$

過圓心 O 作 $OE \perp AB$ 交半圓周於 E,

$\therefore OE = \frac{a+b}{2}.$ ①

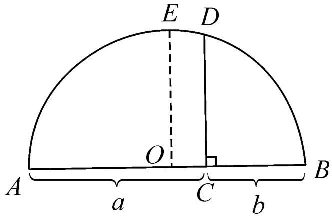


圖2−3

當 $a \neq b$ 時,$OE > CD$, $\therefore \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}.$

當 $a = b$ 時,則 CD 就是 OE,

故 $\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}.$ ②

由 ①,② 可得 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$,證畢.

〔**註**〕不難看出,利用幾何圖形性質來證明這個重要不等式,既簡便,又直觀.

〔**例** 3〕(1979 **年全國高考題**) 設 $CEDF$ 是圓內接矩形. 過 D 作該圓的切線與 CE 的延長線交於 A,與 CF 延長線交於 B(如圖 2 - 4).

〔**求證**〕$\frac{BF}{AE}=\frac{BC^3}{AC^3}$.

〔**分析**〕本例可以用幾何方法證明,有〔證法一〕和〔證法二〕,其證法如下.

〔**證法一**〕如圖 2 －4 所示,已知 $CEDF$ 為矩形,在 $Rt\triangle ABC$ 中,由射影定理知,

$$AC^2=AD\cdot AB,BC^2=BD\cdot AB.$$

兩式相除,有 $\frac{BD}{AD}=\frac{BC^2}{AC^2}$. ①

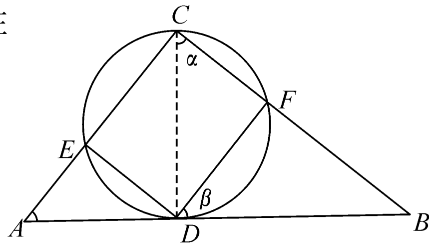


圖2−4

因為 AB 是切線,所以

$BD^2=BC\cdot BF,AD^2=AC\cdot AE.$

兩式相除,有 $\frac{BD^2}{AD^2}=\frac{BC\cdot BF}{AE\cdot AC}$. ②

由 ①、②,有 $\frac{BC\cdot BF}{AC\cdot AE}=\frac{BC^4}{AC^4}$. 即 $\frac{BF}{AE}=\frac{BC^3}{AC^3}$.

〔**證法二**〕據已知,

由 $\triangle BDF\backsim\triangle ABC$,得 $\frac{BF}{DF}=\frac{BC}{AC}$. ①

由 $\triangle BDF\backsim\triangle DFC$,得 $\frac{BF}{DF}=\frac{DF}{CF}$.

所以 $\frac{DF}{CF}=\frac{BC}{AC}$. ②

又由 $\triangle ADE\backsim\triangle ABC$,得 $\frac{DE}{AE}=\frac{BC}{AC}$. ③

① × ② × ③,並利用 $CF=DE$ 便可證得本題.

上述兩種證法分別要多次利用射影定理和相似三角形的性質,進行較複雜的比例式的變換. 思路較難找,能力要求較高.

當年的考生,由於平面幾何論證能力差,因為想不起來或者找不到那麼幾對相似的三角形,或者不會利用射影定理等關係進行代換,而證明不出者,數以千計、萬計. 不少在校成績好的學生,考試中對這個題也感到有些棘手.

但注意到 AB 是切線,由弦切角可得到一連串的角相等. 若引入輔助角 α、β(如圖 2 －4),則有關線段的比均可用 α、β 的正切表示,從而有〔證法三〕.

〔**證法三**〕(三角證法) 如圖 2 －4 所示,連結 CD,因為 $CEDF$ 是圓內接矩形,AB 是切線,所以 $CD\perp AB$. $\angle\alpha=\angle\beta$.

又 $\angle A=90°-\angle B=\alpha$,所以 $\angle A=\angle\alpha=\angle\beta$.

在 $Rt\triangle ABC$ 中,$tanA=\frac{BC}{AC}$, 所以 $tan^3A=\frac{BC^3}{AC^3}$. ①

又在 $Rt\triangle BDF$ 中,$tnaA=tan\beta=\frac{BF}{DF}$, ②

由 $Rt\triangle CDF$ 知,$tnaA = tan\alpha = \dfrac{DF}{CF}$, ③

在 $Rt\triangle ADE$ 中,$tnaA = \dfrac{DE}{AE}$, ④

又 $CEDF$ 為矩形,$\therefore CF = DE$,

② × ③ × ④,有 $tan^3 A = \dfrac{BF}{DF} \cdot \dfrac{DF}{CF} \cdot \dfrac{DE}{AE} = \dfrac{BF}{AE}$, ⑤

比較 ①、⑤,有 $\dfrac{BF}{AE} = \dfrac{BC^3}{AC^3}$.

顯然〔**證法三**〕要簡明得多. 它通過引入輔助角,將有關線段的比用輔助角的三角函數表示出來,**把幾何論證問題轉化為三角問題**,使得思路明確,易於入手.

用三角函數來證明平面幾何問題的方法我們把它稱為**“三角法”**.

三、“算兩次”之外又一村,“劈新路”題解顯親貌

算兩次,即從兩個方面來考察問題.

世界上有許多複雜的事件,只有從多個側面去觀察,才能把握它的實質. 解數學題也是如此. 如從一個方面不能解決,就必須改從其他方面考慮,決不堅持一條道走到黑,這就是**算兩次**的精神所在.

當然,算兩次也並不是說只能從兩個方面,不能從一個方面或三個方面去考慮. 咬定“兩次”,也是膠柱鼓瑟. 或許,某些時候用**“轉換觀點”**,**“換一個角度看問題”**等說法比**“算兩次”**稍為確切一些.

(一)面積法

〔**例** 1〕已知:如圖 3 - 1 - 1,$\square ABCD$ 中,$BE = DF$,BE、DF 交於 P.

〔**求證**〕PC 平分 $\angle BPD$.

〔**證法一**〕如圖 3 - 1 - 1 所示,連結 CE、CF,

$\because ABCD$ 為 $\square$,$\triangle BCE$ 與 $\square ABCD$ 有公共底邊.

$\therefore S_{\triangle BCE} = \dfrac{1}{2} S_{\square ABCD}$.

同理,$S_{\triangle DCF} = \dfrac{1}{2} S_{\square ABCD}$.

$\therefore S_{\triangle BCE} = S_{\triangle DCF}$.

作 $CM \perp FD$ 於 M,$CN \perp BE$ 於 N.

$\therefore \dfrac{1}{2} CN \cdot BE = \dfrac{1}{2} CM \cdot FD$,

$\because BE = DF$,

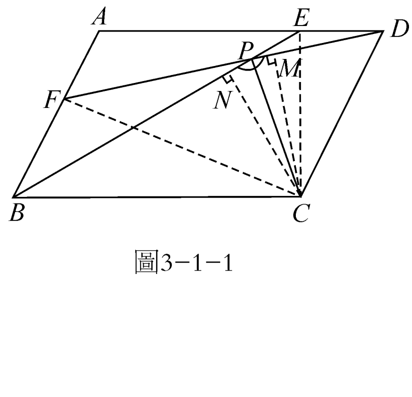


圖3−1−1

$\therefore CN = CM.$

$Rt\triangle CPM \cong Rt\triangle CPN,$

$\therefore \angle CPM = \angle CPN,$

$\therefore PC$ 平分 $\angle BPD.$

〔**證法二**〕因為含有 $\angle DPC$、$\angle BPC$ 的三角形是 $\triangle DPC$ 和 $\triangle BPC$,所以我們可從這兩個三角形的面積比入手.

$$\because \frac{\frac{1}{2}DP \cdot PC\sin\angle DPC}{\frac{1}{2}BP \cdot PC\sin\angle BPC} = \frac{S_{\triangle DPC}}{S_{\triangle BPC}} = \frac{S_{\triangle DPC}}{S_{\square ABCD}} \cdot \frac{S_{\square ABCD}}{S_{\triangle BPC}} \qquad ①$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle DPC}}{2S_{\triangle DFC}} \cdot \frac{2S_{\triangle BEC}}{S_{\triangle BPC}} = \frac{DP}{DF} \cdot \frac{BE}{BP}, \qquad ②$$

($\triangle DPC$ 與 $\triangle DFC$, $\triangle BPC$ 與 $\triangle BEC$ 中,兩個三角形高分別是同一線段 CM 和同一線段 CN.)

又已知 $BE = DF$,由 ①、② 可知,

$\frac{\sin\angle DPC}{\sin\angle BPC} = 1$, $\sin\angle DPC = \sin\angle BPC,$

又 $\angle BPC + \angle DPC < 180°,$

$\therefore \angle DPC = \angle BPC.$

則 PC 平分 $\angle BPD.$

〔**例 2**〕在角 OXY 的平分線上有一定點 P,過 P 的任意線直線交 OX;OY 於 A,B 試證 $\frac{1}{OA} + \frac{1}{OB}$ 為一定值.

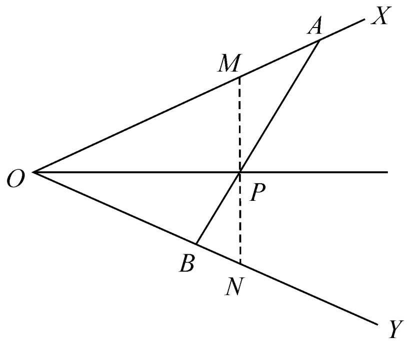


圖3−1−2

〔**已知**〕P 是定角 XOY 的平分線上一定點,過 P 的任意直線與 OX,OY 各交於 A,B.

〔**求證**〕$\frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} =$ 一定值.

〔**分析**〕如圖 3 − 1 − 2,研究特殊圖形 → 過 P 作 OP 的垂線與 OX,OY 各交於 M,N,則 M,N 為定點;OM,ON 為定長.

因 $\frac{1}{OM} + \frac{1}{ON} = \frac{2}{OM}$, 故可推測: $\frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} = \frac{2}{OM} =$ 定長.

如何證明呢?請看下述的證明.

〔**證法一**〕過 P 作 OP 的垂線與 OX,OY 各交於 M,N,則 OM,ON 是定長.

設 h 是 P 至 OX 或 OY 的距離,

則 $S_{\triangle OAB} = S_{\triangle OAP} + S_{\triangle OBP} = \frac{1}{2}h \cdot OA + \frac{1}{2}h \cdot OB = \frac{1}{2}h(OA + OB).$

$$S_{\triangle OMN} = S_{\triangle OMP} + S_{\triangle ONP} = \frac{1}{2}h \cdot OM + \frac{1}{2}h \cdot ON$$

$$= \frac{1}{2}h(OM + ON) = \frac{1}{2}h \cdot 2OM = h \cdot OM.$$

又這兩三角形 OAB,OMN 共有一角 $\angle XOY$.

$$\therefore \frac{S_{\triangle OAB}}{S_{\triangle OMN}} = \frac{\frac{1}{2}OA \cdot OB}{\frac{1}{2}OM \cdot ON} \cdot \frac{\sin\angle XOY}{\sin\angle XOY} = \frac{OA \cdot OB}{OM^2}.$$

但 $\dfrac{S_{\triangle OAB}}{S_{\triangle OMN}} = \dfrac{\frac{1}{2}h(OA + OB)}{h \cdot OM} = \dfrac{OA + OB}{2 \cdot OM}$.

故 $\dfrac{OA \cdot OB}{OM^2} = \dfrac{OA + OB}{2 \cdot OM}$, 即 $\dfrac{OA + OB}{OA \cdot OB} = \dfrac{2 \cdot OM}{OM^2}$.

$$\therefore \frac{OA}{OA \cdot OB} + \frac{OB}{OA \cdot OB} = \frac{2}{OM}.$$

即 $\dfrac{1}{OA} + \dfrac{1}{OB} = \dfrac{2}{OM}$ 為一定值.

〔**證法二**〕如圖 3－1－3 所示,過 P 作 $PC \parallel OY$,$PD \parallel OX$,各與 OX,OY 交於 C,D,

則 $\dfrac{PD}{OA} = \dfrac{PB}{AB}$, $\dfrac{PC}{OB} = \dfrac{AP}{AB}$.

相加得 $\dfrac{PD}{OA} + \dfrac{PC}{OB} = \dfrac{PB}{AB} + \dfrac{AP}{AB} = 1.$　　(1)

其次,因 $OCPD$ 是平行四邊形且對角線 OP 平分 $\angle COD$,故 $OCPD$ 為菱形.

$\therefore PC = PD$　　(2)

(2) 代入(1),得 $\dfrac{PC}{OA} + \dfrac{PC}{OB} = 1.$

用 PC 去除各項得 $\dfrac{1}{OA} + \dfrac{1}{OB} = \dfrac{1}{PC}$.

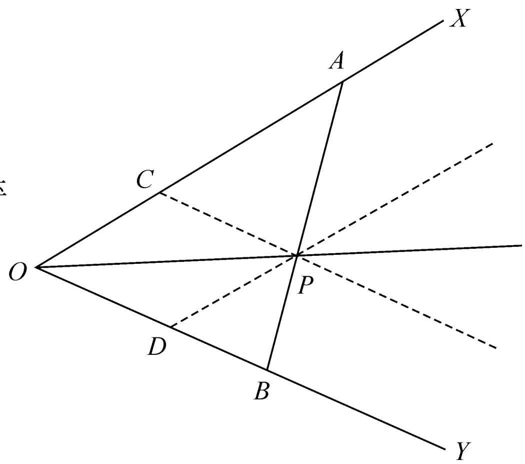


圖3－1－3

但 P 是定點,故 PC 為定長,於是 $\dfrac{1}{OA} + \dfrac{1}{OB} = \dfrac{1}{PC}$ 為一定值.

(二) 三角法

〔**例 1**〕(1964 年福建省中學數學競賽試題) 設 a、b、c 是直角三角形的三邊,c 為斜邊,整數 $n \geq 3$.

〔**求證**〕$a^n + b^n < c^n$(如圖 3－2－1).

〔**思路**〕本題雖然是幾何不等式,但顯然無法用幾何法證得.

由於原不等式等價於$\left(\dfrac{a}{c}\right)^n + \left(\dfrac{b}{c}\right)^n < 1$,如圖 3－2－1 所示,注意到在 $Rt\triangle ABC$ 中,

$\frac{a}{c} = sinA > 0$，$\frac{b}{c} = cosA > 0$，所以原不等式又等價於 $sin^nA + cos^nA < 1$. 至此，顯然可以從 $sinA$、$cosA$ 的性質和關係入手來證明.

〔**證明**〕在 $Rt\triangle ABC$ 中（如圖 3－2－1），

$$sinA = \frac{a}{c},\ cosA = \frac{b}{c}.$$

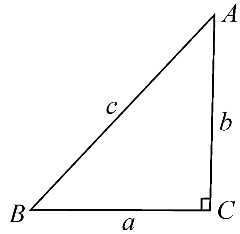


圖3−2−1

因為 $0° < \angle A < 90°$，所以 $0 < sinA < 1$，$0 < cosA < 1$.

則，當 $n \geq 3$ 時，

$$sin^nA < sin^2A,\ cos^nA < cos^2A.$$

所以 $sin^nA + cos^nA < sin^2A + cos^2A = 1$.

即 $(\frac{a}{c})^n + (\frac{b}{c})^n < 1$，也即 $a^n + b^n < c^n$.

〔**例** 2〕如圖 3－2－2 所示，$\triangle ABC$ 中，$AB > AC$，CF、BE 分別是 AB 和 AC 上的高.

〔**求證**〕$AB + CF \geq AC + BE$.

〔**思路**〕三角形中邊的不等關係的問題，往往是較難解答的. 本題中待證不等式中的四條線段一時難以歸入某個三角形中處理，用幾何方法就更顯困難.

注意到 BE、CF 是高，故有 $BE = ABsinA$、$CF = ACsinA$. 則待證不等式即為 $AB + ACsinA \geq AC + ABsinA$，也即 $AB(1 - sinA) \geq AC(1 - sinA)$.

顯然由 $sinA$ 的有界性（即 $|sinA| \leq 1$）容易證得這一結果，從而原不等式可證.

〔**證明**〕因為 BE、CF 分別是 $\triangle ABC$ 的高，所以在 $Rt\triangle ABE$ 中，$BE = ABsinA$，在 $\triangle ACF$ 中，$CF = ACsinA$.

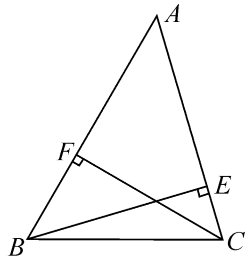


圖3−2−2

又因為 $\angle A$ 是 $\triangle ABC$ 的內角，

所以 $0 \leq sinA \leq 1$.

因為 $AB > AC$，所以 $AB - AC > 0$.

所以 $AB - AC \geq (AB - AC)sinA$.

即 $AB - AC \geq ABsinA - ACsinA$.

即 $AB + ACsinA \geq AC + ABsinA$.

即 $AB + CF \geq AC + BE$.

〔**例** 3〕如圖 3－2－2，$a, b \in R^+$，且 $a + b = 1$，

〔**求證**〕$a^4 + b^4 \geq \frac{1}{8}$.

〔**證明**〕已知 $a, b \in R^+$，且 $a + b = 1$，故 $0 < a < 1$. 令 $a = sin^2\theta$，則 $b = 1 - a = cos^2\theta$.

於是
$$\begin{aligned} a^4 + b^4 &= sin^8\theta + cos^8\theta \\ &= (cos^4\theta + sin^4\theta)^2 - 2sin^4\theta cos^4\theta \\ &= [(sin^2\theta + cos^2\theta) - 2sin^2\theta cos^2\theta]^2 - 2sin^4\theta cos^4\theta \\ &= [1 - 2sin^2\theta cos^2\theta]^2 - 2sin^4\theta cos^4\theta \end{aligned}$$

$$= 2sin^4\theta cos^4\theta - 4sin^2\theta cos^2\theta + 1$$

$$= \frac{1}{8}sin^4 2\theta - sin^2 2\theta + 1$$

$$= \frac{1}{8}(sin^2 2\theta - 4)^2 - 1.$$

但 $0 < sin^2 2\theta \leq 1$,

∴ $-4 < sin^2 2\theta - 4 \leq -3.$

∴ $16 > (sin^2 2\theta - 4)^2 \geq 9.$

∴ $2 > \frac{1}{8}(sin^2 2\theta - 4)^2 \geq \frac{9}{8}.$

於是 $1 > \frac{1}{8}(sin^2 2\theta - 4)^2 - 1 \geq \frac{1}{8}.$

則 $a^4 + b^4 \geq \frac{1}{8}.$

(三)換元法

〔**例1**〕已知函數$f(x)$是奇函數,$g(x)$是偶函數,且$f(x)+3g(x)=6x$,求$f(x)$和$g(x)$.

〔**解**〕因為$f(x)$是奇函數,$g(x)$是偶函數,所以

$f(-x)=-f(x)$, $g(-x)=g(x)$.

由$f(x)+3g(x)=6x$, ①

得$-f(x)+3g(x)=-6x$, ②

由①、②解得$f(x)=6x$, $g(x)=0$.

〔**例2**〕①已知:$f(\frac{1}{x})=\frac{x^2+1}{x^2-1}$,求$f(x)$;

②已知:$3f(x)=4x-2f(\frac{1}{x})$,求$f(x)$.

①〔**解**〕設$\frac{1}{x}=t$, 則$x=\frac{1}{t}$.

$$f(t)=\frac{(\frac{1}{t})^2+1}{(\frac{1}{t})^2-1}=\frac{1+t^2}{1-t^2}, f(x)=\frac{1+x^2}{1-x^2}.$$

②〔**解**〕把$x=t$, $x=\frac{1}{t}$分別代入已知條件,得

$$\begin{cases} 3f(t)=4t-2f(\frac{1}{t}), \\ 3f(\frac{1}{t})=\frac{4}{t}-2f(t). \end{cases}$$

在方程組中,消去$f(\frac{1}{x})$,可得

$$f(x) = \frac{12}{5}t - \frac{8}{5t} = \frac{12t^2 - 8}{5t}.$$

$$\therefore f(x) = \frac{12x^2 - 8}{5x}.$$

（四）運用“集合性質法”

〔**例 1**〕某班有 55 人參加三角、代數考試，已知考三角合格的有 42 人，考代數合格的有 35 人，兩科都考不合格的有 7 人，問考試兩科都合格的有多少人？考試至少一科合格的有多少人？

〔**分析**〕把某班的學生當全集 I，通過繪製文氏圖 3－4－1 可知，所求的人數即求考三角合格的學生的集合 A 和考代數合格的學生的集合 B 之交集的數目 $n(A \cap B)$ 和並集的數目 $n(A \cup B)$.

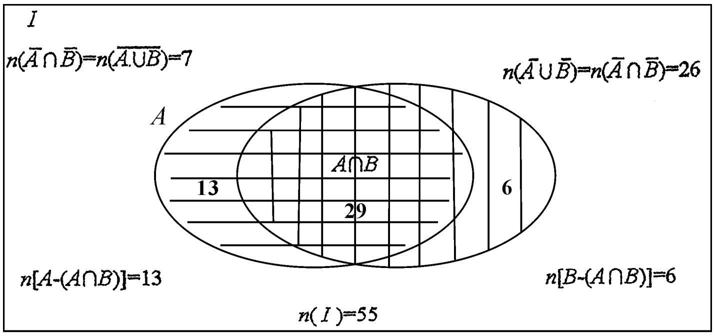


圖3－4－1

〔**解**〕設 $I = \{$某班的學生$\}$，$A = \{$考三角合格的學生$\}$，$B = \{$考代數合格的學生$\}$，

$A \cap B = \{$考三角、代數均合格的學生$\}$，

$\overline{A \cup B} = \{$考三角、代數均不合格的學生$\}$，

據已知，$n(A) = 42$ 人，$n(B) = 35$ 人，$n(\overline{A \cup B}) = 7$，

又 $n(I) = n(A \cup B) + n(\overline{A \cup B}) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) + n(\overline{A \cup B})$，

$\therefore n(A \cap B) = n(A) + n(B) + n(\overline{A \cup B}) - n(I) = 42 + 35 + 7 - 55 = 29$(人).

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 42 + 35 - 29 = 48$(人).

〔**答**〕考試兩科都合格的有 29 人，考試至少有一科合格的有 48 人.

〔**反思**〕本題解利用文氏圖，使解題思路更加清晰. 利用文氏圖還可以進一步迅速地求得考試僅三角科（或僅代數科）不合格的人數及考試至少有一科不合格的人數.

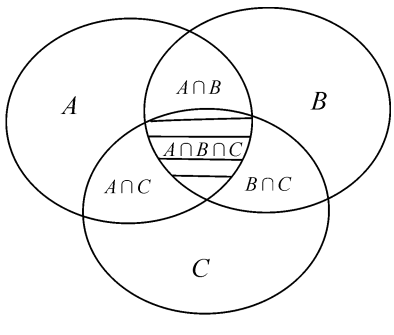


圖3－4－2

〔**例 2**〕某校先後進行數、理、化三科競賽，其中至少參加一種的人數為：數學 807 人，物理 739 人，化學 437 人；至少參加兩種的人數為：數學、物理 593 人，化學、數學 371

人,物理、化學 267 人;三科均參加的 213. 試求參加數、理、化競賽的學生總數.

〔**解**〕設 $n(A) = 807$ 人, $n(B) = 739$ 人, $n(C) = 437$ 人, $n(A \cap C) = 371$ 人, $n(B \cap C) = 267$ 人, $n(A \cap B \cap C) = 213$ 人.

由圖 3 - 4 - 2 可看出設參加數、理、化競賽的學生總數 N,則有

$$N = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$
$$= 807 + 739 + 437 - 593 - 371 - 267 + 213 = 965(\text{人}).$$

〔**反思**〕解這類問題,最怕的是元素重複計算,除注意選擇集合的計算公式外,還要重視公式中的各部分的內涵,並借助文氏圖,可使解題事半功倍.

〔**例 3**〕圖書館買了三本新書 a,b,c,經調查,某班學生至少借過其中一本書,並且還知道借過 a 和 b 的有 5 人,借過 b 和 c 的有 3 人,借過 a 和 c 的有 6 人,借過 a 或 b 的有 23 人,借過 b 或 c 的有 15 人,借過 a 或 c 的有 20 人,問只借過 a,b,c 三本書中一本書的各有幾人?

〔**分析**〕弄清**"至少"**,**"和"** 即**"並且"**、**"或"** 等詞語的含義並能用集合的形式表達出來,再配合文氏圖便可順利解題.

〔**解**〕設 $A = \{$借過 a 的學生$\}$, $B = \{$借過 b 的學生$\}$, $C = \{$借過 c 的學生$\}$

由題意,如圖 3 - 4 - 3 可知

$n(A \cap B) = 5,\ n(A \cup B) = 23,$ ①

$n(B \cap C) = 3,\ n(B \cup C) = 15,$ ②

$n(A \cap C) = 6,\ n(A \cup C) = 20,$ ③

由 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ 及 ① 可得

$n(A) + n(B) = 23 + 5 = 28,$ ④

由 $n(B \cup C) = n(B) + n(C) - n(B \cap C)$ 及 ② 可得

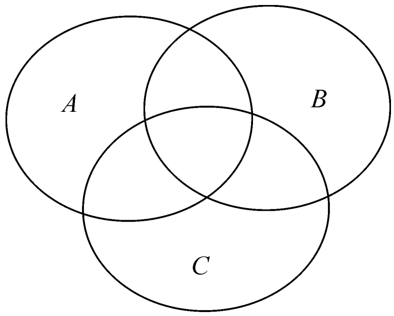


圖3−4−3

$n(B) + n(C) = 15 + 3 = 18,$ ⑤

由 $n(A \cup C) = n(A) + n(C) - n(A \cap C)$ 及 ③ 可得

$n(A) + n(C) = 20 + 6 = 26,$ ⑥

由方程組 $\begin{cases} n(A) + n(B) = 28, \\ n(B) + n(C) = 18, \\ n(A) + n(C) = 26 \end{cases}$ 可解得 $n(A) = 18,\ n(B) = 10,\ n(C) = 8.$

〔**答**〕只借過書 a 的有 18 人,只借過書 b 的有 10 人,只借過書 c 的有 8 人.

〔**反思**〕本題視 $n(A),n(B),n(C)$ 為未知數,根據題意,結合集合元數的個數之公式 $n(x \cup y) = n(x) + n(y) - n(x \cap y)$,建立關於 $n(A)$, $n(B)$, $n(C)$ 為未知數的三元一次方程組,解方程組便得本題答案. 此法不失為"妙招".

〔**例 4**〕求(Ⅰ)$\begin{cases} x - y + 1 > 0, \\ 2x + y - 2 < 0 \end{cases}$ 的解集.

〔**分析**〕此題乃二元一次不等式組的求解問題,原屬高二級的代數內容,似乎不宜在高

一講授,但若用集合的觀點,配合坐標系,用"數形結合"的辦法,找出公共區域,即可順利求解.

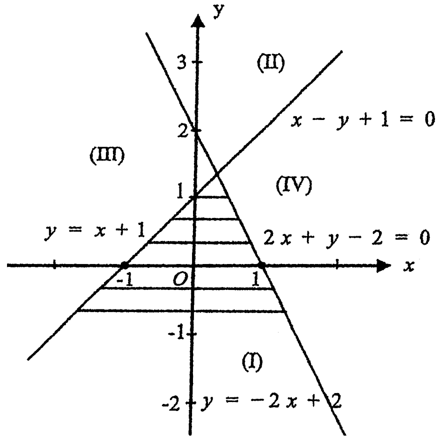


圖3−4−4

〔**解**〕設 $S_1 = \{(x,y) \mid x - y + 1 > 0\}$,

$S_2 = \{(x,y) \mid 2x + y - 2 < 0\}$.

如圖3−4−4所示,可以看出S_1表示$x - y + 1 = 0$的右下側的區域,S_2表示$2x + y - 2 = 0$的左下側的區域,因此$S_1 \cap S_2 = S$(右圖中斜線部分),即直線$x - y + 1$的右下側與直線$2x + y + 2 = 0$的左下側的公共部分(圖中陰影部分),便是所求的$\begin{cases} x - y + 1 > 0, \\ 2x + y - 2 < 0 \end{cases}$的解集.

〔**反思**〕按上述的思路,結合上圖,除可以求出(Ⅰ)的解集外,還可迅速求出

(Ⅱ)$\begin{cases} x - y + 1 < 0, \\ 2x + y - 2 > 0, \end{cases}$ (Ⅲ)$\begin{cases} x - y + 1 < 0, \\ 2x + y - 2 < 0, \end{cases}$ 和(Ⅳ)$\begin{cases} x - y + 1 > 0, \\ 2x + y - 2 > 0 \end{cases}$的解集.

〔**例5**〕已知$A = \{y \mid y = x^2 - 4x + 3,\ x \in R\}$,$B = \{y \mid y = -x^2 - 2x + 3,\ x \in R\}$,求$A \cap B$.

〔**分析**〕有的同學一看見是求交集,就由聯立方程組

$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 3, \\ y = -x^2 - 2x + 2, \end{cases}$ 消去y,得方程

$x^2 - 4x + 3 = -x^2 - 2x + 2$, 即$2x^2 - 2x + 1 = 0$.

由於方程的判別式$\triangle = (-2)^2 - 4 \times 2 \times 1 = -4 < 0$, 故方程無解,因而$A \cap B = \phi$.

畫出兩條拋物線的圖象(如圖3−4−5所示)亦可看到,它們確實沒有交點.

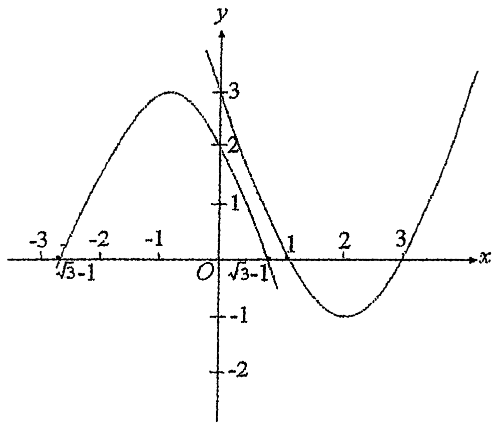


圖3−4−5

但是,這種解法是錯誤的. 它既有知識性的錯誤,又有心理性的錯誤,知識性的錯誤是未能弄清楚A,B的元素是什麼,把"數"y誤認為"數對"(x,y),把"值域"誤認為整條拋物線;心理性的錯誤是未能認眞審題,憑老習慣,以為"求交集"就是"解方程組",就是"求曲線的交點",其實本題是求兩值域的交集,即兩個關於y為元素的兩個集合的交集.

〔**解**〕由$y = x^2 - 4x + 3 = (x - 2)^2 - 1$, 可知$y \geq -1$.

又由$y = -x^2 - 2x + 2 = 3 - (x + 1)^2$, 可知$y \leq 3$.

$\therefore A = \{y \mid y \geq -1\}$, $B = \{y \mid y \leq 3\}$,

$\therefore A \cap B = \{y \mid -1 \leq y \leq 3\}$.

〔**反思**〕學習集合必須抓住**“元素”**這個關鍵，集合是由元素確定的，空集、子集、交集、並集、補集和差集等也都是通過元素來定義的，**集合的基本性質（確定性、互異性、無序性）**便是針對元素描述的，集合的分類與表示方法等亦全都是通過元素來刻畫的. 遇到集合問題，首先要**弄清“元素是什麼”**. **“不弄清”（心理性的錯誤）**或**“弄不清”（知識性的錯誤）**都會產生對問題的**“分析”**出現**“似是而非”**的錯誤.

（五）構圖法

〔**例 1**〕勾股定理的歷史與證明.

勾股定理是數學史上最古老也最著名的定理之一. 據我國古代的《周髀算經》記載，約在公元前12世紀，商高便發現“勾三、股四、弦五”的事實. 因此，勾股定理也叫做商高定理.

在西方，勾股定理被稱為畢達哥拉斯定理. 其實，世界上許多民族，尤其是數學文化發達、有四大文明古國之稱的中國、印度、埃及和巴比倫，早在畢達哥拉斯之前就已經或多或少地知道了勾股定理.

勾股定理不僅結論十分重要，而且證法也非常之多. 目前世界上可以查到的證明勾股定理的方法有幾百種，這些證明中有的極為簡單和直觀，甚至從圖上立即可以看顧出.

請看下面兩圖.

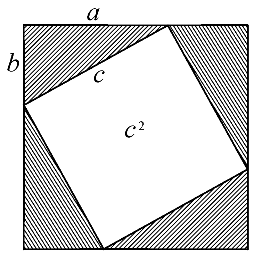


圖3−5−1

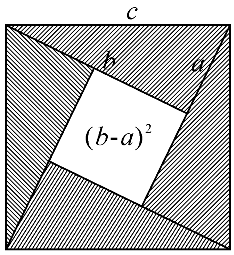


圖3−5−2

由圖 3 − 5 − 1 知，$(a+b)^2 =$ 大正方形的面積 $= 4 \cdot \dfrac{ab}{2} + c^2$，從而 $a^2 + b^2 = c^2$；

由圖 3 − 5 − 2 知，$c^2 =$ 大正方形的面積 $= 4 \cdot \dfrac{ab}{2} + (b-a)^2$，從而 $a^2 + b^2 = c^2$.

上述證法屬我國古代數學家趙爽，他是我國明確證明勾股定理的第一人. 趙爽在證明中先對圖形進行移、合、補、拼，然後通過代數運算得出幾何問題的證明. 這種融幾何代數於一體的方法，體現了我國古代證題術的特色.

直到近代，還有人在探索勾股定理的新證法. 美國第 20 任總統伽菲爾德在 1876 年曾通過構造直角梯形（圖 3 − 5 − 3）得到一個巧妙的證明：

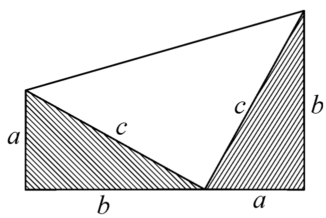


圖3−5−3

$$\frac{1}{2}(a+b)(a+b) = \text{梯形的面積} = \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}c^2,$$

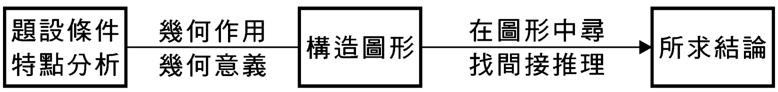
則
$$a^2 + b^2 = c^2.$$

勾股定理的發現是人類早期文明的特徵. 由此,有的科學家認為,倘若地球外某個星球存在智慧生物的話,他們也一定知道勾股定理. 這樣說來,勾股定理還可以作為一種與外星人交流的“語言”呢!

上述的解法是運用**“構造圖形”**的方法來解題. **“構造圖形法”**簡稱**“構圖法”**. 是用構造法解數學題的一個分支(此外還有構造函數法,構造方程(組)法,構造不等式法等其他方法).

如果問題的條件中數量關係有明顯的幾何意義;或者用某種方式可與幾何圖形(體)建立聯繫,則可設法構造圖形或幾何體,將題設條件中的數量關係直接在形(體)中實現,用構造的圖形(立體)尋找要求解、求證的結論.

構造圖形法(構圖法)解題過程的模式是



〔**例** 2〕設 x、y、z 都是正實數,且滿足

$$x^2 + xy + y^2 = 19, \qquad ①$$
$$y^2 + yz + z^2 = 37, \qquad ②$$
$$z^2 + zx + x^2 = 28. \qquad ③$$

求 $x+y+z$ 的值.

〔**思路**〕本題是一道三元二次方程組的問題,但如果試圖解這個三元二次方程組,求出 x、y、z 的值來求 $x+y+z$ 的值,顯然是十分麻煩的.

分析已知條件的特徵,如①式. 將該式稍作變形,得

$$x^2 + y^2 + 2\times\frac{1}{2}xy = (\sqrt{19})^2,$$

則具有明顯的幾何特徵——與餘弦定理相似. 則由餘弦定理知,以 x、y、$\sqrt{19}$ 為三邊恰能構成一個三角形,且長 x 和 y 的兩邊的夾角為 $120°$. 同此,由②、③知,可構造另兩個有一角為 $120°$ 的三角形;並且這三個三角形恰能拼成一個邊長為 $\sqrt{19}$、$\sqrt{37}$ 和 $\sqrt{28}$ 的大三角形(如圖 3-5-4). 由所得三角形的面積關係易知 $xy+yz+zx$ 的值. 從而可望與原方程組配合,求出 $x+y+z$.

〔**解**〕把已知條件改寫成

$$x^2 + y^2 - 2xy\cos 120° = (\sqrt{19})^2,$$
$$y^2 + z^2 - 2yz\cos 120° = (\sqrt{37})^2,$$
$$z^2 + x^2 - 2zx\cos 120° = (\sqrt{28})^2.$$

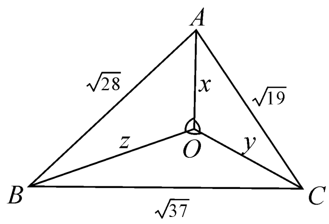


圖3-5-4

根據餘弦定理,把 x、y、z 看做線段長,可以作出輔助三角形 ABC(圖 3－5－4),其中 $AB=\sqrt{28}$, $BC=\sqrt{37}$, $CA=\sqrt{19}$. O 是 ABC 內一點,$OA=x$, $OB=z$, $OC=y$, $\angle AOB=\angle BOC=\angle COA=120°$.

顯然,$S_{\triangle AOB}+S_{\triangle BOC}+S_{\triangle COA}=S_{\triangle ABC}$. ④

因為 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}xz\sin 120°=\frac{\sqrt{3}}{4}xz$,

$S_{\triangle BOC}=\frac{1}{2}yz\sin 120°=\frac{\sqrt{3}}{4}xz$,

$S_{\triangle COA}=\frac{1}{2}xy\sin 120°=\frac{\sqrt{3}}{4}xz$,

又 $\cos\angle CAB=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\frac{5}{\sqrt{28}\cdot\sqrt{19}}$,

所以,$\sin\angle CAB=\sqrt{1-\cos^2\angle CAB}=\frac{13\sqrt{3}}{\sqrt{28}\cdot\sqrt{19}}$.

所以 $S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\cdot\sin\angle CAB=\frac{13}{2}\sqrt{3}$.

把以上各式代入 ④,得

$$\frac{\sqrt{3}}{4}(xy+yz+xz)=\frac{13}{2}\sqrt{3}.$$

所以 $xy+yz+zx=26$. ⑤

所以 ①＋②＋③＋3×⑤,並整理得

$$2(x+y+z)^2=162.$$

因為 x、y、z 是正數,所以 $x+y+z=9$.

〔**評註**〕(1) 求 $xy+yz+zx$ 是解本題的關鍵,這裏用了**構形法**(構造 $\triangle ABC$,並利用面積關係). 由此我們體會到,對於代數條件應能聯想其是否具有某種幾何意義,只有善於正確聯想,才能恰當而靈活地運用**構形法**來簡化問題的求解.

(2) 本例求 $xy+yz+zx$ 是為了進一步求 $x+y+z$ 做準備. 這表明**構形法**既可以作為整體性的解題策略,也可以為局部計算或推理提供輔助.

〔**例 3**〕已知 a、b 是小於 1 的正數,試證明:

$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(1-a)^2+b^2}+\sqrt{a^2+(1-b)^2}+\sqrt{(1-a)^2+(1-b)^2}\geq 2\sqrt{2}$(僅當 $a=b=\frac{1}{2}$ 時,等號成立).

〔**分析**〕觀察不等式的左邊各項,發現它們恰為相應直角三角形的斜邊值,借助 a、b、$1-a$、$1-b$ 數字特點,可構造如圖 3－5－5 來證明.

〔**證法一**〕如圖 3－5－5 所示,作邊長為 1 的正方形 $ABCD$,在 AB 上取點 E,在 DC 上取點 F,在 AD 上取點 G,在 BC 上取點 H,使 $AE=DF=a$, $AG=BH=b$, 則:$EB=FC=1$

$-a$, $DG = CH = 1 - b$.

連 OA、OB、OC、OD,則 $OA + OC \geq AC$(等號當且僅當 O 與 O' 重合時成立).

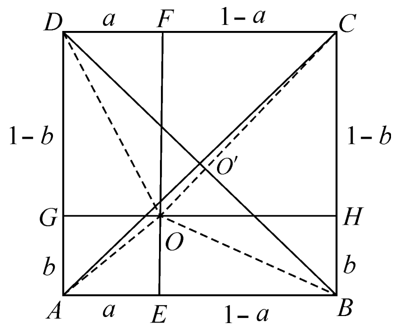


圖3−5−5

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{(1-a)^2 + (1-b)^2} \geq \sqrt{2} \qquad (1)$$

同理 $\sqrt{(1-a)^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + (1-b)^2} \geq \sqrt{2} \qquad (2)$

(1) + (2) 得:

$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{(1-a)^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + (1-b)^2} + \sqrt{(1-a)^2 + (1-b)^2} \geq 2\sqrt{2}$(僅當 $a = b$ 時,等號成立).

〔**證法二**〕取 $AB = 1$,在 AB 上取 $AO = a$, 則 $OB = 1 - a$, 過 O 作 $CD \perp AB$, 取 $OD = b$, $CD = 1$, 則 $OC = 1 - b$.

則四邊形 $ACBD$ 的周長為

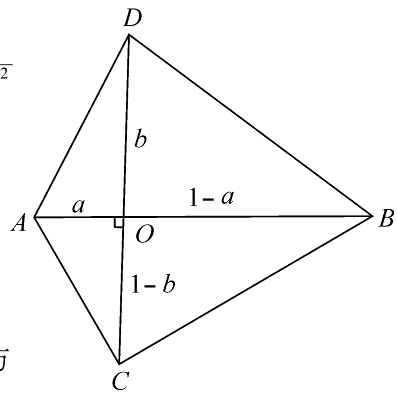


圖3−5−6

$$P = \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{(1-b)^2 + a^2} + \sqrt{(1-a)^2 + (1-b)^2} + \sqrt{(1-a)^2 + b^2}$$

而 $S_{四邊形ACBD} = \frac{1}{2}AB \cdot CO + \frac{1}{2}AB \cdot DO$

$$= \frac{1}{2}AB \cdot CD = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}\text{(定值)}.$$

$\because$ 面積一定,周長最小的四邊形為正方形,此時因正方形對角線互相平分.

$\therefore a = b = \frac{1}{2}$.

$$P_{極小} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}.$$

故 $P \geq 2\sqrt{2}$.

也即:$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{(1-a)^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + (1-b)^2} + \sqrt{(1-a)^2 + (1-b)^2} \geq 2\sqrt{2}$.

* 有些代數式的數量關係,可以集中在特定的幾何圖形上,因此,設法搆造出這一特定的圖形並藉助圖形的性質,就可迅速使代數問題獲得解決.

〔**例 4**〕求函數 $y = \sqrt{x^2 + 2x + 10} + \sqrt{x^2 - 6x + 10}$ 的最小值及相應的 x 的值.

〔**分析**〕本題用常見的初等的代數方法是難於求出函數的最小值的,但是當我們進行下面的變形時,

$$y = \sqrt{x^2 + 2x + 10} + \sqrt{x^2 - 6x + 10} = \sqrt{(x+1)^2 + 3^2} + \sqrt{(x-3)^2 + 1^2}.$$

我們發現 $\sqrt{(x+1)^2 + 3^2}$ 表示 y 軸上的點 $P(x,0)$ 到點 $(-1,3)$(或點 $(-1,-3)$)的距離,而 $\sqrt{(x-3)^2 + 1^2}$ 表示 x 軸上的點 P 點到 $(3,-1)$(或點 $(3,1)$)的距離. 這樣一來,本題就變成了在 x 軸上找一點 P,使它到兩個定點的距離之和最小. 所以這個問題用解析幾何

知識迅速得到了解決.

〔**解**〕因為 $y=\sqrt{(x+1)^2+3^2}+\sqrt{(x-3)^2+1^2}$ 所以上式右邊可視為 x 軸上一點 $P(x,0)$,分別到點 $A(-1,3)$ 與 $B(3,-1)$(注意:這兩點取在 x 軸的兩旁為好) 如圖 3－5－7.

由平面幾何知識得,A、B 兩點的連線中,以線段之長為最短. 故所求的 x 即為線段 AB 與 x 軸的交點的橫坐標,容易求得點 P 的坐標為(2,0).

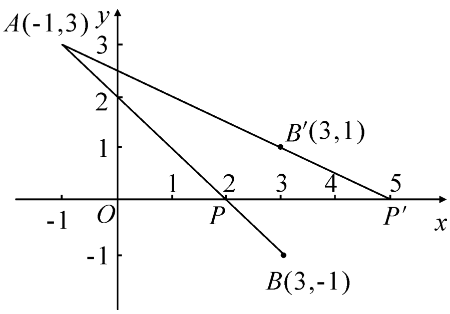


圖3－5－7

由 $A(-1,3)$,$B(3,-1)$ 得 AB 的方程為

$$x+y-2=0,$$

從而可得 AB 與 x 軸的交點坐標爲(2,0).

此時 $|AB|=\sqrt{(2+1)^2+3^2}+\sqrt{(2-3)^2+1}=4\sqrt{2}$.

$\therefore$ 當 $x=2$ 時,y 的最小值為 $4\sqrt{2}$.

〔**評註**〕這個題使用的構圖法,使我們對這種方法有了一點感性認識和初步了解.

假如這個題變為:"求函數 $y=\sqrt{x^2+2x+10}-\sqrt{x^2-6x+10}$ 的最大值,及 y 取得最大值時相應的 x 的值."

則它的解答與上面例題的解答類似.

因為 $y=\sqrt{(x+1)+3^2}-\sqrt{(x-3)^2+(-1)^2}$,所以上式右邊可視為 x 軸上一點 $P'(x,0)$ 分別到點 $A(-1,3)$ 與 $B'(3,1)$(注意:這兩點取在 x 軸的同旁為好) 的距離之差,即 $y=|P'A|-|P'B'|$.

由平幾知識知道,直線 AB' 與 x 軸的交點就是我們所找的點 P',它的橫坐標容易求得為 5,這就是使 y 有最大值的 x 的值,此時

$y=\sqrt{(5+1)^2+3^2}-\sqrt{(5-3)^2+(-1)^2}=2\sqrt{5}$,

亦即 $y=|AB'|=\sqrt{(3+1)^2+(1-3)^2}=2\sqrt{5}$.

故得當 $x=5$ 時,y 取得最大值 $2\sqrt{5}$.

從上面的解的過程知,AB' 與 x 軸不平行時才有上面的解法. 如果 AB' 與 x 軸平行,則直線 AB' 與 x 軸沒有交點,這種情況函數不一定有最大值.

〔**例 5**〕已知 a、b、c 均為正數. 求 $y=\sqrt{x^2+a}+\sqrt{(c-x)^2+b}$ 的極小值.

〔**分析**〕這是一個相當麻煩的求極值問題,運用一般代數方法無疑要經歷令人煩惱的繁雜而又冗長的運算過程.

但是,由於所給條件 a、b、c 均為正數,並且函數關係式是兩個都化為平方和的算術平方根之和的形式,因此,使得利用兩個直角三角形斜邊之和的平面幾何途徑解決這個問題成為可能.

〔**解**〕如圖 3－5－8,取 $AB=c$,作 $AC\perp AB$,取 $AC=\sqrt{a}$,作 BD 反向垂直 AB,取 $BD=\sqrt{b}$.

設 $AM = x$, 則 $MB = c - x$.

在直角 $\triangle AMC$ 中, $CM = \sqrt{x^2 + a}$,

在直角 $\triangle BMD$ 中, $DM = \sqrt{(c-x)^2 + b}$.

顯然有 $y = CM + DM$,即 y 表示 M 到 C、D 距離之和;當 C、M、D 三點在一直線時,M 到 C、D 距離之和為最小,此時 M 應在 M' 處.

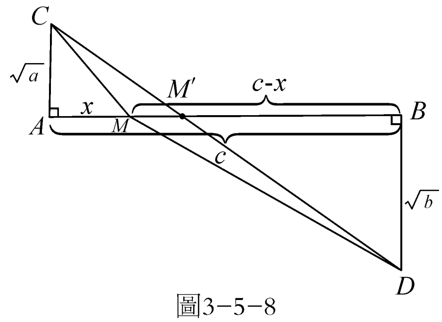


圖3-5-8

由 $\triangle ACM' \backsim \triangle DBM'$,得 $\frac{AM'}{M'B} = \frac{AC}{BD}$, 即 $\frac{x}{c-x} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

解之,得$x = \frac{c \cdot \sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$,並代入函數關係式得:

$$y_{極小} = \sqrt{\frac{ac^2}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} + a} + \sqrt{\frac{bc^2}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} + b}\ .$$

〔**例 6**〕已知 $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$,求 $\sqrt{x^2 + y^2}$ 的極大值與極小值.

〔**分析**〕$\because$ 所給條件 $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$ 是一個圓. 滿足條件的(x,y) 必是圓周上的點. 因此 $\sqrt{x^2 + y^2}$ 顯然是圓周上的點(x,y) 到原點的距離了.

〔**求**〕$\sqrt{x^2 + y^2}$ 的極大值與極小值,實際上就是求圓上的點到原點的最大距離和最小距離.

因為原點在圓外(圓心到原點的距離大於半徑). 這個問題利用平面幾何性質極好解決. 我們只須把原點和圓心連結起來並延長,此線與圓的兩個交點即是圓上到原點最大距離與最小距離的點了. 分別算出它們的距離,問題即可解決.

當然,在算它們的距離時,我們只要求得原點到圓心的距離和圓的半徑,不可機械地先去求直線與圓的交點,然後再用兩點間的距離公式.

具體解法如下:

〔**解**〕$x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$, 經配方得:

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 4.$$

這是圓心為 $C(4,3)$,半徑為 $R = 2$ 的圓.

$\because$ $\sqrt{x^2 + y^2}$ 是圓周上的點到原點的距離,

$\therefore$ 連 OC 並延長交圓於 A、B.

$\because$ C 點坐標為$(4,3)$, $\therefore$ $|OC| = 5$.

故 $|OA| = 5 - 2 = 3$, $|OB| = 5 + 2 = 7$.

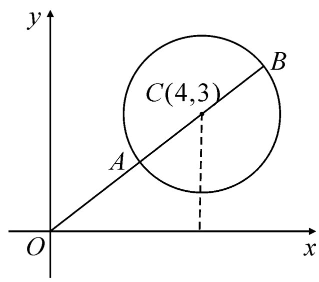


圖3-5-9

即 $\sqrt{x^2 + y^2}$ 的極大值為 7,極小值為 3.

〔**註**〕從此例不難看出,運用構形法,運用幾何圖形的性質,這個函數極值問題的解決是何等的輕快!

（六）函數法

〔例 1〕已知函數 $y=f(x)(x\in R)$ 是偶函數,若函數在 $(-\infty,0)$ 上單調遞增,且 $f(2a^2+a+1)<f(3a^2-2a+1)$,求 a 取值的範圍.

〔解〕設 $0<x_1<x_2$，則 $-x_2<-x_1<0$.

$\because f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上單調遞增,即 $f(-x_2)<f(-x_1)$,

又 $\because f(x)$ 在 R 上是偶函數，$\therefore f(-x_2)=f(x_2)$, $f(-x_1)=f(x_1)$,

$\therefore f(x_2)<f(x_1)$.

而由已知可知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上單調遞減.

今有 $2a^2+a+1=2(a+\frac{1}{4})^2+\frac{7}{8}>0$，且 $3a^2-2a+1=3(a-\frac{1}{3})^2+\frac{2}{3}>0$.

又 $\because f(2a^2+a+1)<f(3a^2-2a+1)$,

$\therefore 2a^2+a+1>3a^2-2a+1$,

$\therefore 0<a<1$.

〔例 2〕若定義在 R 上的函數 $y=f(x+1)$ 的反函數是 $y=f^{-1}(x-1)$，且 $f(0)=1$，求 $f(2008)$.

〔解〕由 $y=f^{-1}(x-1)$ 得 $x-1=f(y)$,

則 $y=f^{-1}(x-1)$ 的反函數為 $y=f(x)+1$,

即 $f(x+1)=f(x)+1$.

則 $f(2008)=f(2007)+1=\cdots=f(0)+2008=2009$.

〔例 3〕$f(x)$ 是定義在 R 上的奇函數,它的最小正周期為 2，試求 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(1996)$ 的值.

〔解〕$f(x)$ 是定義在 R 上的奇函數，$\therefore f(0)=0$.

又 $\because f(x)$ 的最小正周期為 2，$\therefore f(2)=f(0+2)=f(0)=0$.

同理 $f(4)=f(6)=\cdots=f(1996)=0$，$\therefore f(2)+f(4)+\cdots\cdots+f(1996)=0$.

$\because f(3)=f(-1+2\times2)=f(-1)=-f(1)$，$\therefore f(1)+f(3)=0$.

同理 $f(5)+f(7)=0$，$\cdots$，$f(1993)+f(1995)=0$,

$f(1)+f(3)+f(5)+f(7)+\cdots+f(1995)$ 共 998 項,可分為 499 組,其和都是零.

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(1995)+f(1996)=0$.

〔例 4〕已知 $f(x)$ 是定義在 R 上的函數,且有 $f(x+2)[1-f(x)]=1+f(x)$，(1) 求證: $f(x+4)\cdot f(x)+1=0$；(2) 若 $f(1)=2-\sqrt{3}$，求 $f(2003)$ 的值.

〔證明〕(1) $\because f(x+2)[1-f(x)]=1+f(x)$，此時 $f(x)\neq1$，否則條件不成立($0=2$,矛盾).

$\therefore f(x+2)=\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}$,

$$f(x+4)=\frac{1+f(x+2)}{1-f(x+2)}=\frac{1+\frac{1+f(x)}{1-f(x)}}{1-\frac{1+f(x)}{1-f(x)}}=-\frac{1}{f(x)},$$

$\therefore f(x+4)\cdot f(x)+1=0.$

〔**解**〕(2) 由(1) 知,$f(x+4)=-\dfrac{1}{f(x)}$,

$\therefore f(x+8)=f[(x+4)+4]=-\dfrac{1}{f(x+4)}=f(x)$, 對於 R 上的一切的 x 成立.

$\therefore$ 我們發現, $f(x)$ **是以** 8 **為週期的函數**,

$\therefore f(2003)=f(3+8\times250)=f(3).$

$\because f(x+2)=\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}$, 又 $f(1)=2-\sqrt{3}$,

$\therefore f(3)=\dfrac{1+f(1)}{1-f(1)}=\dfrac{1+2-\sqrt{3}}{1-(2-\sqrt{3})}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{-1+\sqrt{3}}=\sqrt{3}.$

$\therefore f(2003)=\sqrt{3}.$

> * **發現 $f(x)$ 以 8 為週期,抓住了問題的實質,巧妙地解答了第(2) 小題. 請回顧解法中是怎樣巧用第(1) 小題的結論解第(2) 小題的.**

〔**例 5**〕(美國數學邀請賽第二屆競賽題) 函數 f 定義在整數集合上,且滿足:

$$f(n)=\begin{cases}n-3,\ 當\ n\geq1000,\\ f(f(n+5)),\ 當\ n<1000,\end{cases}\quad 求 f(84).$$

〔**解法一**〕$f(84)=ff(84+5)=fff(84+5\times2)=ffff(84+5\times3)=\cdots$

$$=\underbrace{ff\cdots f}_{184}(84+183\times5)=\underbrace{ff\cdots f}_{184}(999)$$

$$=\underbrace{ff\cdots f}_{185}(1004)=\underbrace{ff\cdots f}_{184}(1001)=\underbrace{ff\cdots f}_{183}(998)=\underbrace{ff\cdots f}_{184}(1003)$$

$$=\underbrace{ff\cdots f}_{183}(1000)=\underbrace{ff\cdots f}_{182}(997)=\underbrace{ff\cdots f}_{183}(1002)=\underbrace{ff\cdots f}_{182}(999)=\cdots$$

$$=ff(999)=fff(1004)=ff(1001)=f(998)=ff(1003)$$

$$=f(1000)=1000-3=997.$$

〔**解法二**〕我們探討 $n<1000$ 時, $f(n)$ 的一般規律.

先從接近於 1000 的 n 值計算 $f(n)$, 尋找 $f(n)$ 的規律.

$$f(999)=f(f(1004))=f(1001)=998,$$

$$f(998)=f(f(1003))=f(1000)=997,$$

$$f(997)=f(f(1002))=f(999)=998,$$

$$f(996)=f(f(1001))=f(998)=997,$$

$$f(995)=f(f(1000))=f(997)=998,$$

由此猜測出:

$$f(n)=\begin{cases}997, & \text{當 } n \text{ 是小於 } 1000 \text{ 的偶數,}\\ 998, & \text{當 } n \text{ 是小於 } 1000 \text{ 的奇數.}\end{cases}$$

因此 $f(84)=997$.

我們用倒推歸納證明這個結論.

〔**註**〕本文是作者為澳門之中學年青的數學教師培訓班而編寫的培訓資料之一.

參考資料:

[1] 蔡哲夫著:《面積論》,臺灣中央書局 1972 年 8 月版.

[2] 王占聰著:《中學數學中的數與形》,安徽科學出版社,1981 年 3 月版.

[3] 張景中編著:《面積關係幫你解題》上海教育出版社,1982 年 12 月版.

[4] 唐霞賓著:《中學數學解題方法 —— 圖解法》,四川教育出版社,1989 年 11 月版.

[5] 劉志圖著:《中學數學解題方法 —— 換元法》,四川教育出版社,1989 年 12 月版.

[6] 陳進興編著:《用構造法解數學題》,廣西教育出版社,1990 年 9 月版.

[7] 周志文、陳威編著:《數形結合解題思路分析》,福建人民出版社,1990 年 12 月版.

[8] 濠江中學數學科組編寫:《初中數學課本 —— 幾何第三冊》,濠江中學 1998 年 5 月版.

[9] 單墫編著:《算兩次》,中國科技大學出版社,2001 年 7 月版.

[10] 芮茲、顧秋根編著:《21 世紀中學數學解題創新叢書 —— 數形結合》,安徽少年兒童出版社,2002 年 1 月版.

[11] 李祥立主編:《數學教育 —— 澳門教育文選(第二輯)》,中國社會科學出版社,2012 年 8 月版.

[12] 鄭志民編著:《學海浪花 —— 數學教育閑思集》,中國社會科學出版社,2012 年 12 月版.

[13] 鄭志民編著:《潤物細無聲 —— 數學教育探研集》,中國社會科學出版社,2015 年 8 月版.

淺談梁曉君老師示教課《“烙餅問題”》

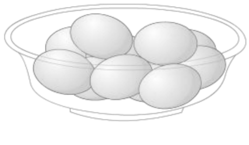
澳門鏡平學校中學部　鄧海棠
廣東省清遠市陽山縣黎埠鎮中心小學　王玉芬

由教育暨青年局始於 1996 年主辦的教學設計獎勵計劃為推動本澳各學科的學術研究,提升相關科目的教學人員專業素質,激勵創思型的課堂教學,增進單位時間內的教學成效,培養教學人員課程與教材開發和教學研究的能力,給廣大教育工作者提供了一個百家爭鳴、取長補短、博納優異的實用平臺。

2018 年 11 月 10 日有幸作為澳門數學教育研究學會的代表,獲教育暨青年局邀請擔任評委,觀摩了在青洲小學進行的 2017/2018 學年教學設計獎勵計劃－教學公開課（小學數學科）梁曉君老師的示教課《“烙餅問題”》,大有裨益,收穫甚多,在此略發感言,談談愚見,以作教育界同行交流,冀得大家指正。

該節課的教案如下：

<table>
<tr><td>班級</td><td>四年級</td><td>單元名稱</td><td>數學廣角——優化</td><td>人數</td><td>24 人</td><td>課時</td><td>40 分鐘</td></tr>
<tr><td>日期</td><td>2018 年 11 月 10 日</td><td>課題</td><td>烙餅問題</td><td>教材</td><td>人教版</td><td>課節</td><td>第二課節</td></tr>
<tr><td rowspan="6">教學目標</td><td colspan="3" rowspan="6">1. 通過生活中的簡單事例,使學生初步體會到優化思想在解決問題中的應用。
2. 使學生認識到解決問題中的策略的多樣性,初步形成尋找解決問題最優化方案的意識。
3. 讓學生感受到數學在日常生活中的廣泛應用,嘗試用數學的方法來解決實際生活中的簡單問題。
4. 使學生能積極地參與數學學習活動,體會到學習數學的樂趣。</td><td>基本學力要求項目編號</td><td colspan="3">本年級可達致的目標</td></tr>
<tr><td>F－1－1</td><td colspan="3">樂於參與數學學習活動,表現積極的態度；</td></tr>
<tr><td>F－1－2</td><td colspan="3">結合具體的生活情境,認識數學與生活的聯繫；</td></tr>
<tr><td>F－1－3</td><td colspan="3">能在數學活動中與他人進行交流,學會傾聽和尊重他人的觀點；</td></tr>
<tr><td>F－2－1</td><td colspan="3">樂於參與數學問題的探究,體會其探索性和創造性；</td></tr>
<tr><td>F－2－2</td><td colspan="3">通過觀察、操作、概括、推理等學習過程,云解數學與日常生活的密切關係；</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>教材
分析</td><td>《烙餅問題》主要通過動手操作、交流爭辯等學習活動,討論烙餅時怎樣合理安排操作,達到最節省時間,從而滲透統籌思想,讓學生體會在解決問題中優化思想利用的重要性。本節內容的安排,符合學生的認知特點,是知識源於生活,生活中處處存在數學的一種體現,為我們教師聯繫生活進行數學教學提供了很好的示範作用。</td></tr>
<tr><td>學情
分析</td><td>四年級的學生已經有了一定的解決問題的能力和基礎,結合日常生活經驗,學生較容易找到解決烙餅問題的不同策略。但本節課的關鍵是讓學生能從多種策略中去優化方法,從而形成從多種方案中尋找最優方案的意識,提高解決問題的能力。在研究烙餅方法過程中蘊含的重要的數學思想即「運籌思想」,若從字面或定義直接去理解,對於學生來說是很抽象的。因此,設計本節課時,教師從學生實際情況出發,用通俗易懂的語言,用生動形象的生活實例,有步驟和有層次地向學生滲透「運籌」思想。</td></tr>
<tr><td>重點
難點</td><td>重點:使學生能從解決問題的多種方案中尋找出最優方案,初步體會優化的思想,形成優化的意識。
難點:尋找出解決問題的最優方案,形成優化的意識,提高解決實際問題的能力。</td></tr>
<tr><td>教學
資源</td><td>多媒體課件、小鍋、圓餅圖片、表格、學習單、磁鐵等。</td></tr>
<tr><td>教學
過
程、
內容
及活
動</td><td>一、情境創設:
(一)出示澳門美食節圖片。
導入情景,跟隨小東、小麗、小紅,三人組去逛逛美食節。
(二)複習舊知
他們走近了一個煮雞蛋的攤檔。

引出複習問題:煮熟一個雞蛋要用 5 分鐘。煮熟 3 個雞蛋最快要用多長時間?
預設 1:15 分鐘。
預設 2:5 分鐘。
提問:你覺得哪種方法比較好?(答 5 分鐘)再問:你覺得好,說說理由。讓學生自己說出來更能去感受省時省空間省能源。
小結:3 個雞蛋同時煮,既節約時間,又節約能源!</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>教學
過
程、
內容
及活
動</td><td>【設計意圖:創設生活化的教學情境,激發學生的學習興趣。在本節課的開始,從生活中「煮雞蛋」的簡單事例出發,調動學生已有的生活經驗,引導學生回顧平時怎樣合理安排操作能節省時間,為新知教學滲透優化思想做好準備。】

二、探究新知
(一)導入新課
創設情境,有一對姐妹正向老闆說:我們要 2 張餅!
小東他們通過觀察,知道:每個烙餅要烙正反底面,每面需要烙 3 分鐘,而且每個鍋同時最多可以烙兩面。
同學們幫忙算算,這對姐妹要等多久才能同時吃到烙餅呢?
師:這也是我們這節課要研究的烙餅問題。(板書課題)
(二)探究新知
1. 學習烙 2 張餅
設問:如果要烙 2 張餅呢? 需要幾分鐘?
(1)同學互說:你是怎樣烙的? 所用時間是多少?
(2)指名學生彙報,預設出現兩種情況:
①烙一張餅需要 6 分鐘,烙兩張餅需要 12 分鐘。
②可兩張餅一起烙,先烙正面需要 3 分鐘,再烙反面,又需要 3 分鐘,共 6 分鐘。
學生彙報時,師結合教具在黑板上直觀演示,讓學生具體明白兩種烙法的操作過程,並引導學生進行完整口述。
(3)比較優化兩種方案。
設疑:你認為哪種方案好? 為什麼?
【設計意圖:讓學生從兩種方案中比較得出:第二種方案好,原因是節省時間,只需要 6 分鐘就可烙好兩張餅,從而讓學生初步體會到優化思想在解決問題中的應用。】
2. 學習烙 3 張餅
(1)導語:兩姐妹走了以後,就輪到小東他們三人了!
猜想:同學們,烙 2 張餅用了 6 分鐘,那麼小東他們要烙 3 張餅,到底要用幾分鐘呢?
(2)合作探究
師:烙 3 張餅最少需要多少時間?
現在請大家以小組形式進行合作,根據題目的要求,運用桌面的鍋與烙餅模擬操作、討論,看哪個小組能算出烙 3 塊餅的最少時間,然後和大家分享。
為便於操作,建議各小組在試驗中給每個餅編號、並記錄烙餅步驟及所需時間。</td></tr>
</table>

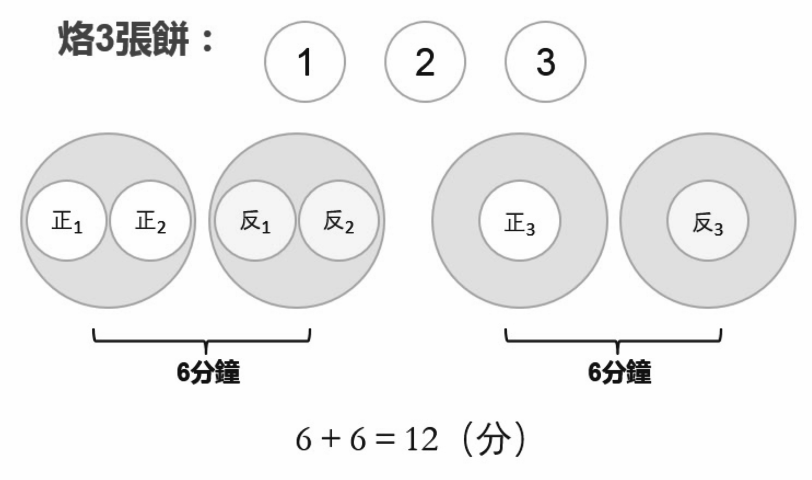
教學過程、內容及活動

預計:巡視過程中,當學生討論未果時提醒學生:你能不能想一個辦法保證每一次鍋子裡總有兩張餅?

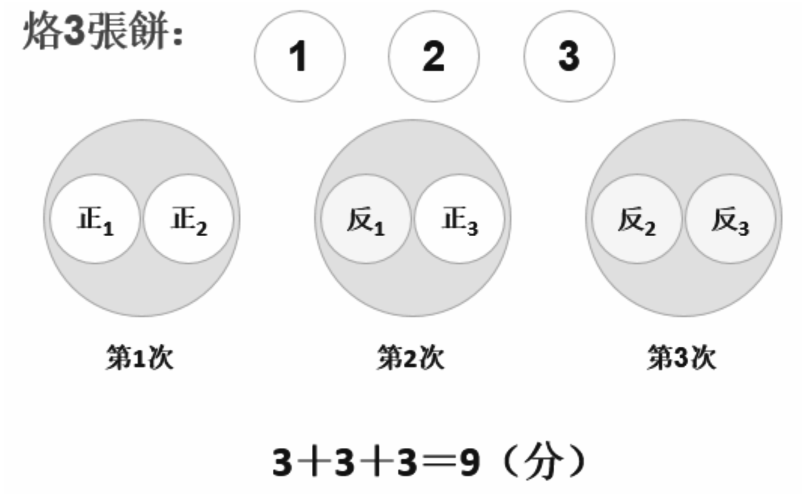
3. 交流彙報,請小組派代表上臺「烙餅」。

預設方案 1:每次烙 1 張需 6 分,3 張共需時間 $3\times6=18$(分)。

預設方案 2:先烙 2 張需 6 分鐘,再烙 1 張需 6 分鐘,一共 12 分鐘。



預設方案 3:第一次:烙 1、2 號餅的正面,用 3 分鐘。第二次:把 2 號餅暫時取出,把 3 號餅放入,烙 1 號餅的反面和 3 號餅的正面,又用 3 分鐘。第三次:取出 1 號餅,放入 2 號餅,烙 2、3 號餅的反面,用 3 分鐘。一共用 9 分鐘。



(三)選擇最優方案

師:這種烙法為甚麼會節省時間呢?

與全體學生回顧,並整理表格:

教學過程、內容及活動	

	第一張	第二張	第三張	所用時間(分鐘)
第一次	正	正		3
第二次	反		正	3
第三次		反	反	3

【設計意圖:在選擇最優方案時,通過直觀形象表格羅列,清晰每次都有兩張餅在鍋裡,沒有讓鍋有空餘,也為下一步鞏固練習讓學生學會填寫表格作鋪墊。】

讓學生仔細觀察,並思考:都是烙熟 3 張餅,為什麼 9 分鐘的方法會比 12 分鐘的方法節省 3 分鐘?

學生交流質疑,最後得出:9 分鐘烙的時候,每次鍋裡都有兩張餅在烙,只需要烙 3 次,所以節省了時間。

小結:每次總烙(2)張餅,別讓鍋(有空餘),這樣應該最省時間。

回顧剛才同學的匯報分享整個過程,為了能節省時間,我們要最大限度的利用時間和空間。做這類事情時,重要的是:如何做到優化,省時、省能源。(板書)

【設計意圖:如何儘快地烙三張餅,是本節課的難點。這裡通過讓學生自己去動手試一試,烙一烙,說一說的方法,讓學生學生在直觀中思考、在操作中發現,從而感悟到簡單的運籌思想。認識怎麼樣操作才是最優方案。使學生在實踐中感悟到解決問題策略的多樣化與方法的合理性。】

三、鞏固練習

(一)引導語

師:排在小東他們後面的是一個五人家庭,有爸爸媽媽和三個孩子,他們也準備購買烙餅,問題來了,烙 5 張餅至少需要多少時間?請同學們小組互相討論一下,看看那組給出最優的方案,好讓這個五人家庭也快速吃到美味的烙餅?

(二)烙 5 張餅最少需要多少時間?

師:那麼烙 5 個餅你打算怎麼烙?先烙幾張?再烙幾張?最少要用多少時間呢?

交流彙報。

生:先烙 2 張用 6 分鐘,再烙 3 張用 9 分鐘,一共 15 分鐘。

【設計意圖:以兩三個餅的最優化方法為基礎,拓展多張餅的最優化方案,這裡完全放手讓學生去研究發現規律,進一步體現了學習的自主性。】

<table>
<tr>
<td>教學過程、內容及活動</td>
<td>

四、知識應用

(一)他們三個人都吃飽了,然後繼續逛美食街。

師:澳門的美食節除了有吃的,還有________?(生:玩的!)

看,他們來到一個遊戲攤位。玩 1 局要 5 分鐘,可以單人玩,也可以雙人玩。小東、小麗、小紅一起玩,每人玩兩局,至少需要多少分鐘?

(二)大家能否用剛才學到的知識算算他們至少需要多少分鐘。

怎樣安排他們玩,才能讓時間最少?

儘量讓雙人同時玩,這樣省時間。

	小東	小麗	小紅
第一局	√	√	
第二局	√		√
第三局		√	√

【設計意圖:由於學生已經有了前面的規律,建立了數學模型,能很快正確地計算時間。這樣既能使所學知識得到鞏固和應用,又可以發展學生的思維,開發學生的潛能,培養學生的實踐能力。】

五、小結

我們的日常生活與學習是緊密相連的,只要開動腦筋,讓學習為我們生活服務,相信大家的學習生活會更豐富,更精彩!

</td>
</tr>
</table>

《烙餅問題》是新人教版小數教材第 7 冊“數學廣角”中出現的,而這個內容,在之前舊版的教材中是沒有出現過的。為什麼新版教材中要增加“數學好玩”或“數學廣角”呢? 因為小學數學的課程標準變了! 通過解讀 2011 版課程標準,我們發現,編委們編制“數學好玩”或“數學廣角”等,意在體現《課程標準(2011 版)》新增的“雙基、雙能”。基礎知識、基本技能要不要? 要,但還不夠。我們還要領悟數學的基本思想和積累基本活動經驗。不光要能分析問題、解決問題,還要能發現問題、提出問題。實現從“雙基(基礎知識 + 基本技能)”走向“四基(+ 基本思想 + 基本活動經驗)”,從“兩能(分析問題 + 解決問題)”走向“四能(+ 發現問題 + 提出問題)”。

“烙餅問題”的數學意義是什麼? 單單是解決“烙餅的問題”嗎? 學生為什麼要學習“烙餅問題”?(教師為什麼要上這節課?)怎樣才能算得上已經學清楚了“烙餅問題”? 怎樣來感悟“優化”?(怎樣才能算得上已經教清楚了這節課?)這是我在課前看到這個課題後一直在思考的。也就是,我們通常所說的“是什麼?”、“為什麼?”、“怎麼做?”。

這節課主要結合日常生活經驗,通過讓已經有了一定的解決問題能力和基礎的四年級學生動手操作、交流辯論等學習活動,找到解決烙餅問題的不同策略,怎樣合理安排操作最節省時間,從而滲透統籌思想,讓學生體會在解決問題中優化思想利用的重要性。形成從多種方案中尋找最優方案的意識,提高解決問題的能力。

那麼,"烙餅問題"到底是什麼呢?是"烙"為關鍵?還是"餅"為關鍵?是讓學生經歷一系列完整的"烙"的過程,從中體會轉化、分類、最優等數學思想方法、積累動手操作和思維活動經驗重要?還是把餅弄熟,吃了就算?我想,這是毋庸置疑的,肯定是讓學生經歷一系列完整的最優的"烙"的過程,從中領悟數學思想方法、積累活動和思維經驗更重要。讓學生以餅為素材,烙中體驗,烙出方法,烙出成功。

梁曉君老師結合本土的美食節題材,創設小東、小麗、小紅參加美食節的情境,貫穿整節課,以數學思想方法的學習為主線,從煮雞蛋的簡單溫習,引出"一對姐妹要等多久才能同時吃到烙餅"的問題,借助小東、小麗、小紅之手,引領同學們尋求解決問題的多種策略,到找到最優化的可行方案,實在是令人耳目一新。

通過一對姐妹"要烙 2 張餅,需要幾分鐘?"預設出現的兩種情況:

①一張餅需要 6 分鐘,烙兩張餅需要 12 分鐘。

②可兩張餅一起烙,先烙正面需要 3 分鐘,再烙反面,又需要 3 分鐘,共 6 分鐘。

的策略比較,以及小東、小麗、小紅"要烙 3 張餅,到底要用幾分鐘?"的預設方案:

①每次烙 1 張需 6 分,3 張共需時間 $3 \times 6 = 18$(分)。

②先烙 2 張需 6 分鐘,再烙 1 張需 6 分鐘,一共 12 分鐘。

③第一次:烙 1、2 號餅的正面,用 3 分鐘。第二次:把 2 號餅暫時取出,把 3 號餅放入,烙 1 號餅的反面和 3 號餅的正面,又用 3 分鐘。第三次:取出 1 號餅,放入 2 號餅,烙 2、3 號餅的反面,用 3 分鐘。一共用 9 分鐘。

的策略比較,進而到一個五人家庭"烙 5 張餅至少需要多少時間?"的問題解決策略:"先烙 2 張用 6 分鐘,再烙 3 張用 9 分鐘,一共 15 分鐘。"

這種螺旋漸進式的問題顯現,以兩、三張餅的最優化方法為基礎,拓展多張餅的最優化方案,梁老師完全放手讓學生去研究發現規律,進一步體現了學習的自主性。可謂環環相扣、精彩紛呈。美中不足的是,形勢大好、直搗黃龍之際,教師錯失良機,並沒有順時而動、因機以發地引導學生趁勢演繹歸納出烙餅的最短時間公式,令人徒呼奈何。

事實上,要烙 2 張餅,最少需要 6 分鐘;(2×3)

烙 3 張餅,最少需要 9 分鐘;(3×3)

之後,所有要烙的餅最少要用的分鐘數都可以用"烙 2 張餅"和"烙 3 張餅"作為基本單位來計算了。請看以下的情況:

烙 4 張餅,相當於烙 2 張餅的 2 倍,最少需要 12 分鐘;(4×3)

烙 5 張餅,相當於烙 2 張餅與烙 3 張餅之和,最少需要 15 分鐘;(5×3)

烙 6 張餅,相當於烙 2 張餅的 3 倍,最少需要 18 分鐘;(6×3)

烙 7 張餅,相當於烙 2 張餅的 2 倍與烙 3 張餅之和,最少需要 21 分鐘;(7×3)

烙 8 張餅,相當於烙 2 張餅的 4 倍,最少需要 24 分鐘;(8×3)

烙 9 張餅,相當於烙 2 張餅的 3 倍與烙 3 張餅之和,最少需要 27 分鐘;(9×3)

……

通過演繹歸納,就可以得到**烙餅的最短時間 =(餅數)×(烙一面的時間)(一張餅除外)**。

至於觀看預先錄製的烙餅視頻,則是顯得有些重複之嫌了。因為已經有不少學生能夠正確解答出這個問題的結果,而且還讓學生出來講臺面對全班同學作了解說,加上絕大部分的學生都說知道怎樣操作了,除非還是有人不明白,才需要用到這個烙餅過程的視頻。

對於學生的答題解說,一個在白板作口頭講解,一個在電腦平臺操作儀器,加強團結協作、增強團隊合作,符合當今時代的社會實際情況。因為個人英雄主義已經不適宜當下了,社會需要團隊協作合力解決問題的人才。

在餅的量詞的使用方面,教案中有時用“張”,有時用“個”,建議統一用“張”。

課堂上通過列表來分類說明烙餅的多種情況,梁老師滲透了統籌思想,這些做法從長遠而言會對接到高中數學的線性規劃問題,也算是為學生以後學習更高層次的知識內容作了打基礎的鋪墊。同時也教會了學生“同時烙”、“交替烙”的具體方法,引導學生具體問題具體分析的思維品質。

我認為梁老師這一堂課是一節非常優質、實用、有效的公開課。這從學生在三人交替進行“電玩日誌”的練習中,把人比作成要烙的“餅”、把玩兩次比作為要烙的“兩面”中可見一斑。

從板書中的“省時、省能源”可以看到,教師在學生學習過程中,不但滲透了統籌思想,還薰陶了環保意識,給未來的主人翁建立了正確的社會價值觀念,尤如在紛繁雜亂的思想意識注入了一股清流的源泉,隨師滲入課,潤物細無聲。

參考資料:

[1]澳門特別行政區教育暨青年局“教學設計獎勵計劃”網頁;

[2]澳門教業中學梁曉君老師公開課《“烙餅問題”》教案。

常港澳小學"新思維數學"課堂教學邀請賽

2018 年 12 月 15 日下午和 12 月 16 日上午,澳門數學教學研究學會在澳門高美士中學舉辦"常港澳小學'新思維數學'課堂教學邀請賽"。

江蘇常州市博愛小學的潘雪琪老師以《秒的認識》作為展示表演課。

澳門濠江中學附屬小學的莊淑蘭老師以《推理》參加比賽,獲一等獎。

澳門花地瑪聖母女子學校魏佩珊老師以《平行四邊形的面積》參加比賽,獲二等獎。

參加比賽的還有:

香港英皇院同學會小學的賴永康老師以《速率》,參加比賽。

澳門浸信中學小學部的李換棉老師以《代數式(一)》,參加比賽。

評委:本會特邀內地及港澳著名數學教育專家擔任本屆評委.

1. 首都師範大學數學學院　方運加教授;
2. 常州大學嘗試教育科學研究院　邱學華院長;
3. 北京電子工業出版社數學編輯　孫清先先生;
4. 常州市市北實驗初級中學　錢秋芬校長;
5. 史豐收速算法推廣中心　史豐寶主任。

下面是參加比賽獲一等獎,二等獎和表演嘉賓的參賽教案,僅供參考。

(一)《推理》;

(二)《平行四邊形的面積》;

(三)《秒的認識》。

(一)教學活動教案

<table>
<tr><td>學校</td><td>澳門濠江中學
附屬小學</td><td>班級</td><td>二年級</td><td>執教
教師</td><td>莊淑蘭老師</td><td>科目</td><td>數學</td></tr>
<tr><td>單元
名稱</td><td>推理</td><td>活動
名稱</td><td>推理</td><td>日期</td><td>2018 年 12 月 15 日</td><td>課時</td><td>1 課時</td></tr>
<tr><td rowspan="6">活動目標</td><td colspan="3" rowspan="6">1. 通過觀察、猜測等活動,讓學生經歷簡單的推理過程,理解邏輯推理的含義,初步獲得一些簡單推理的經驗。
2. 能借助語言描述等方式整理資訊,並按一定的方法進行推理。
3. 在簡單推理的過程中,培養學生初步的觀察、分析、推理和有條理地進行數學表達的能力。
4. 使學生感受推理在生活中的廣泛應用,初步培養學生有順序地、全面地思考問題的意義。</td><td colspan="4">該節課相對應之基本學力要求</td></tr>
<tr><td>項目編號</td><td colspan="3">相對應之文字表述</td></tr>
<tr><td>$F-1-1$</td><td colspan="3">樂於參與數學學習活動,表現積極的態度。</td></tr>
<tr><td>$F-1-2$</td><td colspan="3">結合具體的生活情境,認識數學與生活的聯繫。</td></tr>
<tr><td>$F-1-3$</td><td colspan="3">能在數學活動中與他人進行交流,學會傾聽和尊重他人的觀點。</td></tr>
<tr><td>$F-1-4$</td><td colspan="3">能結合生活情境,體會數學的美;</td></tr>
<tr><td>學情分析</td><td colspan="7">一年級已經滲透了找規律,而邏輯推理能力是人們生活、學習、工作中很重要的能力。本單元主要要求學生能根據提供的資訊,進行判斷、推理,得出結論,讓學生進行簡單、有條理地思考。本單元的內容體現了教材在滲透數學思想方面做出的一些努力和探索,把重要的數學思想方法通過學生日常中最簡單的事例呈現出來,並運用操作、實驗、猜測等直觀手段解決這些問題,初步培養學生有序地、全面地思考問題的意識。</td></tr>
<tr><td>重點難點</td><td colspan="7">1、重點:經歷簡單的推理過程,初步獲得一些簡單推理的經驗。
2、難點:初步培養學生有序,全面地思考問題及數學表達能力。</td></tr>
<tr><td>活動過程</td><td colspan="7">一、創設情境,引入課題(3 分鐘):
1. 師:喜歡看《熊出沒》的動畫版嗎? 是不是有兩只胖乎乎的小傢夥,他們是誰啊?
今天他們來到我們的課堂,請看大螢幕,這兩個調皮的小傢夥跟咱們玩起捉迷藏遊戲,你們能猜出他們分別藏在哪個盒子裡?(學生自由猜)</td></tr>
</table>

2. 師:看來我們不能確定他們分別藏在哪個盒子裡?

那現在呢?(課件出示主題圖)

小結:在猜事物的時候,根據有用的資訊作出準確的判斷。

在猜熊大,熊二的過程中運用數學中——推理,我們這節課就來學習簡單的推理。

二、通過“猜一猜”活動,探究新知(30 分鐘):

(一)通過角色扮演,猜“熊大、熊二和光頭強各拿了什麼顏色的水壺”

1. 創設情境

用角色扮演,引出“熊大拿的是什麼顏色?”(出示 *PPT*)

(1)師:你們能猜猜熊二拿的是什麼顏色? 光頭強呢? 學生自由猜

(2)每人只拿一個,要想猜對,我們該根據什麼去猜?

2. 討論交流

讓學生猜,並說出猜的理由。(討論再彙報交流)

3. 幫熊大、熊二和光頭強找到各自的書包(做一做)

出示要求及提示,並要求學生說說想的過程。

提示 1:我的號比 12 大

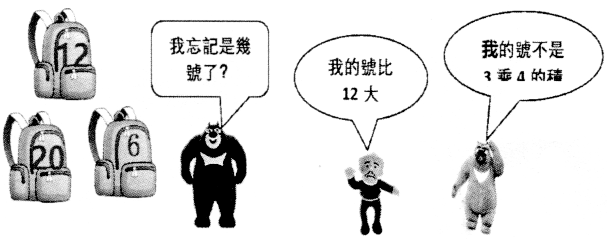
提示 2:我的號不是 3 乘 4 的積

學生根據提示進行猜測,推理,最後交流彙報。

4. 師生共同總結

可以通過畫表或連線的方法引導學生分析推理,感受在推理的時候應該像這樣找到關鍵資訊,按一定的順序全面的思考,從而得出結論。

熊大，熊二和光頭強他們去森林學校，他們各是幾號書包？



(二)巧妙破密碼

1. 師:來到森林學校,門需要解鎖,密碼藏在★後面。

學生獨立完成,說說推理的過程。

2	1		3
3		★	1
	2	3	4
4			2

三、靈活應用,解決問題(5 分鐘):

1. 師:森林學校“小偵探社”開班,有興趣同學找王老師報名。

根據條件,尋找王老師在 1—5 號的幾號課室裡?

(王老師:男,20 多歲,一米八左右)

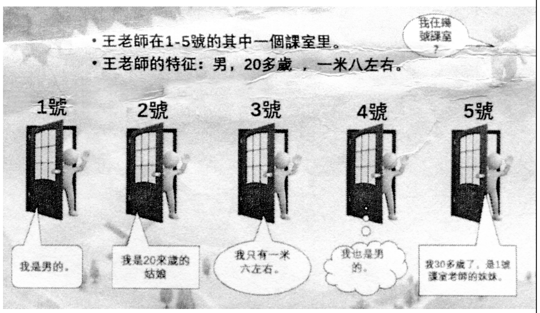
1 號課室:我是男的

2 號課室:我是 20 來歲的姑娘

3 號課室:我只有一米六左右

4 號課室:我也是男的

5 號課室:我 30 多歲了,是 1 號課室老師的妹妹



小組討論,邀請學生彙報思路與結果。

2. 學兒哥

· 我是一名小偵探,

· 抓住線索認眞想。

· 能確定的先確定,

· 能排除的再排除,

· 剩下越少越好猜。

四、課堂總結(2 分鐘):

1. 這堂課你有什麼收藏?

共同小結:在玩遊戲過程中學會了數學思考,還學到了根據提供的資訊進行有理有據地猜事物的方法。只要我們善於觀察,勤於思考,一定會利用推理解決更多的問題。

PPT 課件,信封,工作紙。

《平行四邊形的面積》教學設計

化地瑪聖母女子學校　魏佩珊

教學內容:人教版數學五年級上冊第 87 ~ 88 頁例 1。

教學目標:

1. 學生經歷探索平行四邊形面積的計算公式的過程,掌握平行四邊形的面積計算,能解決相應的實際問題。

2. 通過操作、觀察和比較發展學生的空間觀念,滲透轉化思想,培養學生分析、綜合、抽象概括和動手解決實際問題的能力。

3. 通過學生動手實踐,培養學生的探索精神,感受數學與生活的密切聯繫。

教學重點:探索並掌握平行四邊形面積計算公式。

教學難點:理解平行四邊形面積公式的推導過程。

教學方法:直觀演示,引導發現。

學習方法:動手操作、自主探索、合作交流。

教學準備:多媒體課件、工作紙等。

學具準確:平等四邊形紙片、三角板、剪刀。

基本學力要求:

$B-2-5$ 會計算平行四邊形、三角形、梯形的周長和面積。

$F-2-1$ 樂於參與數學問題的探究,體會其探索性和創造性。

$F-2-2$ 通過觀察、操作、概括、推理等學習過程,瞭解數學與日常生活的密切關係。

教學過程:

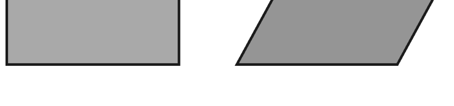
一、復習鋪墊(2 分鐘):

教師引導學生回憶常用的面積單位、長方形面積公式以及平行四邊形相對應的底和高。

二、巧設情境,鋪墊導入(3 分鐘):

師:同學們,大家喜歡聽故事嗎?

生:(喜歡)(課件出示一塊長方形菜地和一塊平行四邊形菜地)



師:這裏的“大小”指的是什麼?(面積)

師:那長方形的面積怎麼算?(板書:長方形的面積 = 長 × 寬)

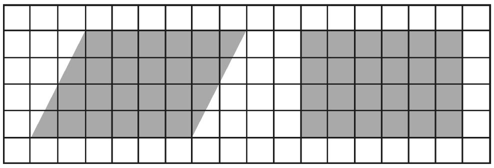
師:那我們會計算平行四邊形的面積嗎?(不會)

師:今天這節課我們就來研究平行四邊形的面積。(板書:平行四邊形的面積)

三、合理猜想,動手驗證,獲取新知(20 分鐘):

1. 探索平行四邊形的面積的計算方法。

(課件出示方格圖)在方格紙上數一數,然後填寫下表。(一個方格代表 1 平方米,不滿一格的都按半格計算。)



平行四邊形	底	高	面積
長方形	長	寬	面積

2. 從上面的表格中,你發現了什麼?

A. 觀察:長方形的長是(　　)米,平行四邊形的底是(　　)米,長方形的寬是(　　)米,平行四邊形的高是(　　)米。

B. 猜測:誰能大膽猜想一下平行四邊形的面積等於什麼?

C. 思考:通過剪和拼的辦法將平行四邊形轉化成長方形,轉化計算方法?

D. 討論:小組內討論以下兩個問題。

(1)拼出的長方形和原來的平行四邊形相比較,面積變了沒有?

(2)拼出的長方形的長和寬與原來的平行四邊形的底和高有什麼關係?

3. 得出結論並板書。

四、鞏固運用、解決問題。(10)分鐘:

師:你們會計算平行四邊形的面積了嗎?(會)

師:現在我們再回過頭來看顧看顧能不能解決小儀和小玲的困惑了?(出示情景圖)

兩塊菜地的大小是什麼關係?

師:要求出平行四邊形的面積,需要知道哪些條件?

平行四邊形菜地的底是 6 米,高是 4 米,它的面積是多少?

$$S = ah = 6 \times 4 = 24\ (\text{平方米})$$

生:兩塊菜地的面積都是 24 平方米,一樣大,所以她們可以交換了。

● 鞏固練習:

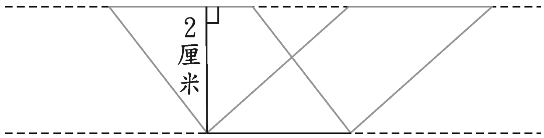
◇ 請口算下面每個平行四邊形的面積。

◇ 判斷題。

◇ 你能算出下面平行四邊形的面積嗎?

● 拓展練習:

下面兩個平行四邊形的面積相等嗎? 它們的面積各是多少?



師:等底等高的平行四邊形面積相等。

五、課堂總結,鞏固新知(5 分鐘):

回想一下剛才我們的學習過程,今天學會了什麼(學生總結)?

六、課外延伸:

猜謎語遊戲:有一個平行四邊形,它的面積是 12 平方分米,請你猜一猜它的底和高各是多少? 看誰猜出的答案最多。

底					…
高					…

秒的認識

江蘇常州市博愛小學　潘雪琪

一、教學內容：蘇教版二年級上冊第 92 ~ 93 頁。

二、教材簡析：

《秒的認識》是義務教育課程標準實驗教科書二年級上冊第九單元《時、分、秒》中的教學內容，通過前兩節課的學習，學生已經對 1 分鐘、1 小時持續的時間具有一定感性體驗，知道時與分之間的進率關係，能正確認讀幾時幾分。本節課是在學生已初步建立時、分概念的基礎上進行的順勢教學。通過學習使學生認識鐘面上的秒針，瞭解時間單位秒，知道 1 分期 60 秒，初步建立秒的時間觀念。經歷聯繫實際生活解決簡單問題的過程，初步培養學生的觀察、交流、合作探究能力，並有效地促進個性思維的發展。讓學生充分感受數學與生活的密切聯繫，激發學生珍惜時間的積極情感。

三、教學目標：

1. 認識鐘面上的秒針與時間單位秒，知道 1 分期 60 秒。
2. 通過觀察與體驗活動，逐步建立 1 秒的時間觀念，體會秒在生活中的應用。
3. 結合教學內容適時滲透珍惜時間的教育。

四、教學重難點：逐步建立秒的具體概念。

五、教具學具準備：

老師準備：多媒體課件，秒表、口算紙、跳繩、皮球、作業紙等。

學生準備：鐘錶。

六、教學過程：

課前談話。

一、延續情境，導入新課：

今天我們學什麼？讓我們用倒計時來迎接。

我們倒計時時，每數一個數用了多長時間？

“秒”也是一個時間單位，為什麼不用“時”或“分”呢？揭示課題：“認識秒”

二、自主探索，合作求知：

（一）在鐘面上認識秒。

讓學生說說在鐘錶上已經知道了哪些秒的知識？

學生說到哪個,教師板書哪個。然後有序討論。
先解決:哪根是秒針? 秒針長得怎樣?
再解決:秒針走一小格是幾秒?
秒針走 1 大格是幾秒?
如果鈔針要走 10 秒可以從幾走到幾?
你想讓秒針從幾走到幾是多少秒
最後解決:秒針走一圈是多長時間?
讓學生觀察鐘面,秒針走一圈有什麼發現?
同桌先互相說一說,然後全班交流,得出 1 分期 60 秒。
(二)體驗感受,建立 1 秒的概念。
1. 體驗節奏:
你們能用聲音和動作把 1 秒 1 秒的節奏表示出來嗎?
指名孩子帶著鐘錶上來學一學。
讓全班跟著動作做得好的孩子做一做。
讓我們跟著大屏幕上的秒針,用自己喜歡的聲音動作表示每一秒。
再指名兩個背對大屏幕單獨打出 1 秒 1 秒的節奏。
2. 感受 10 秒:
10 秒有多長呢? 請小朋友閉上眼睛靜靜地聽,當你認為 10 秒到了就喊“停”。
你怎麼知道喊“停”的?
得出方法:1 秒 1 秒數,從 1 數到 10。
3. 估計時間:
(1)不看鐘面估一段時間有多長(20 秒),看看誰能估準。
(2)“長音王”到底一口氣能“啊”多長。學生默數,老師按秒表計時。
(3)聽一段 30 秒的音樂,估計這段音樂有多長。
(三)30 秒活動體會 1 秒的價值。
1. 30 秒活動:
指名 3 個學生分別跳繩,拍球,做下蹲起立。
其他同學選擇活動,看看 30 秒能做些什麼。
活動完後讓運動的學生分別說說自己 30 秒能拍幾個球? 跳幾下繩? 做幾組下蹲起立?
師歸納:1 秒大約能跳 2 下繩,1 秒大約能拍 2 個球,1 秒大約做 1 組下蹲直立。
讓其他孩子說說 30 秒的時間做了些什麼?
2. 1 秒能做些什麼呢? 學生體會到 1 秒很短。
然後出示課件:各行各業 1 秒產生的價值。
你們有什麼想說的?

時間是 1 秒 1 秒累積起來的,我們要珍惜每一分,每一秒。

三、聯繫實際,鞏固應用:

1. 老師電腦上顯示的時間是這樣的,這上面的時間你們會讀嗎?

2. 在括號內填上哪個時間單位比較合適呢? 拿出作業紙先讀一讀,再想一想,最後填一填。

(1)學生每天睡覺時間大約 9(　　)

(2)做一次深呼吸大約用了 4(　　)

(3)小明吃飯大約用了 25(　　)

(4)脈搏跳 10 次大約用了 8(　　)

四、全課總結,拓展延伸:

1. 總結:今天我們學習了秒,你們有哪些收穫?

2. 延伸:出示前面記錄"長音王"時間的秒表,你們看得懂嗎? 比秒更小的時間單位是什麼? 有興趣的可以課後研究。

附板書設計:

認識秒

秒針走一小格是 1 秒　　　　秒針走一大格是 5 秒

分針走一小格　同時　秒針走一圈　　　　走 60 圈是 1 小時

↓　　　　↓

1 分　=　60 秒　　　　走 120 圈 2 小時

澳門數學教育研究學會

聯絡地址:澳門殷皇子大馬路 11 號群發花園第一座 14 樓 A
電話:853 - 28965253,853 - 66878553 傳真:853 - 28788259
E - mail: macaumath@ yahoo. com. hk , inwmacau@ yahoo. com. hk
Website:http://www. mathsmo. com/

會務活動紀錄

2002 年

6 月 17 日	在氹仔海島公證署辦理本會註冊手續.

2003 年

6 月 7 日	舉辦“中國數學教學的雙基原理—2002 年數學教育高級研討班”——會議精神傳達報告會.
12 月 13、14 日	舉行中小學“數學開放題教學”專題研討會及示範課.
12 月	《澳門數學教育》創刊號出版.

2004 年

4 月 17 日	舉辦“DM_Lab 和動態數學教學”講座.
9 月 30 日	赴杭州拜訪教育研究中心,訪問海寧市崇文實驗學校及杭州市南宛小學.
10 月 9、10 日	舉行“數學情景與提出問題教學”專題研討會及示範課.

2005 年

3 月 24 - 28 日	赴貴陽、興義市參觀和交流,訪問興義八中和延安路小學.
4 月 16 日	與教育出版社合辦“突破兒童數學思維空間”研討會及《新思維數學》教材展覽會.
11 月 26、27 日	舉行“全國小學特級數學男教師教學風采展示”專題研討會及示範課.
12 月 20 - 28 日	前往武漢訪問華中師範大學第一附屬中學、東方紅小學以及育才第二小學.

2006 年

3 月 4 日	舉辦“因材施教、拔尖保底——如何幫助數學差生學習”專題研討會.

4 月 14、15 日　赴廣東省河原市第二小學和河源市中學觀課.
6 月 25－29 日　前往山東濟南參觀濟南第十二中學和解放路第一小學.
12 月 9－10 日　舉行"國家數學教育高級研修班'數學教師教育'澳門會議".

2007 年

4 月 28、29 日　與全國嘗試教學理論研究會合辦"兩岸四地小學數學課堂教學觀摩及說課比賽".
7 月 4、5 日　與澳門大學教育學院合辦"有效的數學教學:一個國際視角"及"有效數學教學實務:美國的經驗"講座.
7 月 30 日至
8 月 3 日　訪問陝西省西安市吉祥路小學、西安市第一中學、西北工業大學附小.
9 月 1 日　舉辦"創造性數學的想法及方法運用"講座.

2008 年

11 月 1 日　舉辦"小學數學專家講座".
11 月 22 日　舉辦"中學數學教育改革成功經驗介紹暨課堂教學展示"專題會議.

2009 年

5 月 29 日、30 日　前往美國參加第 34 屆美國高中數學競賽(ARML),榮獲國際組第一名.
8 月 15 日~20 日　訪問內蒙古包頭市鐵路二中.
11 月 14 日　舉辦"數學教學的有效性與開放性" 研討大會及示範課.
12 月 5 日、6 日　舉辦"第一屆澳門小學數學優質課堂教學" 評比大會.
(慶祝祖國成立 60 週年,澳門回歸 10 週年,本會成立 5 週年活動)

2010 年

6 月　成立"澳門數學奧林匹克學會",政府憲報刊登該會章程.
11 月 26 日、27 日　組織 18 名數學優秀學生前往北京參加首屆世界數學團體錦標賽.
1 月 18 日　華東師範大學聘請汪會長擔任華東師範大學國際數學奧林匹克研究中心澳門實驗培訓基地主任.

2011 年

1 月 28 日　「美國高中數學競賽」澳門區代表隊榮獲澳門特區政府頒授功績獎狀.
9 月 27 日、28 日　與澳門大學教育學院合辦"國際著名教育家蘇霍姆林斯基教育理念介紹會".

2012 年

6 月 9 日　　　舉辦“如何激發學生數學創造力講座暨中學數學課堂教學展示”公開課.

8 月 1 – 6 日　　赴吉林、延邊中、小學進行學術交流.

11 月 3 – 4 日　　舉辦“全國小學數學四大教學流派課堂教學展示課”.

11 月 3 日晚上　舉行慶祝本會成立十週年晚宴,十週年成果展.

2013 年

4 月 6 日　　　舉辦亞太區小學奧數(澳門區)選拔賽.

4 月 14 日　　　進行中學第二十四屆、小學第十一屆“希望杯”澳門地區第二試決賽.

4 月 16 日　　　名譽會長陳明金先生宴請本會,表示對本澳數學教育的支持和鼓勵.

5 月 11 日　　　舉辦“幼兒教育理論講座與幼兒教學實踐示範課”.

6 月 1 日　　　赴新加坡參加 2013 亞太小學數學奧林匹克總決賽.

5 月 31、6 月 1 日前往美國參加第 38 屆美國高中數學競賽(ARML),澳門隊第二.

6 月 15 – 19 日　舉辦數學實驗——統計與概率工作坊.

7 月 10 日　　　澳門基金會為 ARML 澳門隊凱旋而歸的健兒舉行慶功宴.

7 月 18 日　　　舉行希望杯、亞太區小學奧數(新加坡)、數學大王賽頒獎禮暨(ARML)美國高中數學競賽成果滙報會.

8 月 1 – 7 日　　赴哈爾濱、鷄西中、小學進行學術交流.

11 月 16 – 17 日　與澳門大學教育學院合辦「嘗試教學理論研究華人論壇」和幼兒教育報告會.

12 月 7 – 9 日　　舉辦「中學、小學數學奧林匹克教練員考級証書培訓班」.

12 月　　　　　《澳門數學教育》第十一期出版.

2014 年

1 月 11 日　　　舉行「幾何王」初中平面幾何學習軟件介紹會.

4 月 3 日　　　拜訪澳門基金會.

4 月 13 日　　　進行中學第二十五屆、小學第十二屆“希望杯”澳門地區第二試決賽.

4 月 15 日　　　拜訪澳門教育暨青年局.

4 月 17 日至 21 日赴臺灣澎湖、高雄參訪活動.

4 月 26 日　　　舉辦“史豐收速算法”介紹會.

5 月 30 – 31 日　前往美國參加第 39 屆美國高中數學競賽(ARML),澳門隊第二.

6 月 14 日　　　舉行「領導數學科組工作經驗介紹會暨瀋陽七中教學展示課」活動.

7 月 11 日　　　舉行「幾何王」初中平面幾何學習軟件培訓班.

7 月 12 日	舉行希望杯、亞太區小學奧數（新加坡）、數學大王賽、環亞太杯國際數學賽、中小學數學奧林匹克教練員考級証書頒獎禮暨（ARML）美國高中數學競賽成果滙報會.
8 月 10 – 16 日	派學生前往四川西昌參加澳門基金會教科文中心航天團.
10 月 18 日	舉辦"熟能生巧數學觀點講座暨高中數學教學展示課".
11 月 22 – 23、29 – 30 日	舉辦“史豐收速算法”導師培訓班.
12 月 6 日、7 日	舉辦“第五屆澳門小學數學優質課堂教學”評比大會暨全國協作區孔子杯小學數學課堂教學大賽（澳門賽區）.
12 月	《澳門數學教育》第十二期出版.

2015 年

1 月 16 日	拜訪澳門基金會。
1 月 31 日	舉行成立“史豐收速算法”培訓基地新聞發佈會。
4 月 12 日	進行中學第二十六屆、小學第十三屆“希望杯”澳門地區第二試決賽。
4 月 19 日	拜訪澳門教育暨青年局。
5 月 10 日	汪會長參加上海“小學數學教師教育高級研修班”。
5 月 23 日	舉行「任勇的數學教學主張」講座。
5 月 28 – 31 日	前往新加坡參加第 26 屆亞太區小學數學奧林匹克賽決賽。
5 月 29 – 30 日	前往美國參加第 40 屆美國高中數學競賽（ARML），澳門隊重獲冠軍。
6 月 13 日	舉行希望杯、亞太區小學奧數（新加坡）、數學大王賽、環亞太杯國際數學賽暨（ARML）美國高中數學競賽成果滙報會。
6 月 3 – 7 日	澳門大學教育學院與本會合辦“數學整數教育"專題研討會。
6 月 6 日	邀請意大利幾何學專家和捷克數學家教育專家舉行講座。
6 月 27 日	往港參加史豐收速算兩岸三地比賽。
7 月 11 日	與澳門大學教育學院、香港資優教育學會合辦「環亞太杯國際數學邀請賽總決賽」。
8 月	《兩岸三地升大數學教程》出版。
8 月 8 – 12 日	澳門隊赴桂林參加 WMI 世界數學邀請賽。
8 月 15 – 20 日	赴陝西省進行學術交流。
10 月 17 日	舉辦“幼兒教育報告會及幼兒史豐收速算法演示課”。
12 月 5 日、6 日	舉辦“第一屆小學新思維數學“澳門杯”課堂教學大賽評比大會”。
12 月 7 日	獲澳門特別行政區授予團隊功績獎狀。
12 月	《澳門數學教育》第十三期出版。

2016 年

1 月 17 日　　舉辦“兒童資優培育” 介紹會。
3 月 5 日　　舉辦“希望杯數學競賽試題分析”講座。
3 月 19 日　　合辦 “中、小學數學實驗和智力發展”專題講座。
5 月 26－29 日　前往新加坡參加第 27 屆亞太區小學數學奧林匹克賽決賽。
6 月 3－4 日　　前往美國參加第 41 屆美國高中數學競賽（ARML），澳門隊獲亞軍。
6 月 18 日　　舉行希望杯、亞太區小學奧數（新加坡）、數學大王賽、環亞太杯國際數學賽暨（ARML）美國高中數學競賽成果滙報會。
10 月 22 日　　舉辦“雲南麗江市教育局講座暨中學示範課”。
11 月 19 日　　舉辦“四川省成都市成華小學示範課”。
11 月 25－29 日　前往馬來西亞參加 MIMO 馬來西亞國際奧數競賽。
12 月 10－11 日　舉辦第二屆小學“新思維數學”澳門杯課堂教學比賽。
12 月　　《澳門數學教育》第十四期出版。

2017 年

3 月 11 日　　慶祝十五周年會慶暨春茗聚餐。
5 月 25－28 日　前往新加坡參加第 28 屆亞太區小學數學奧林匹克賽決賽。
6 月 2－3 日　　前往美國參加第 42 屆美國高中數學競賽（ARML）。
6 月 17 日　　希望杯、亞太區小學奧數（新加坡）、數學大王賽、環亞太杯國際數學賽暨（ARML）美國高中數學競賽成果滙報會。
7 月 8－9 日　　舉行首辦「首屆奧林匹克數學三維杯環亞太國際邀請賽賽（2017）」。
9 月 12 日　　拜訪譚俊榮司長。
11 月 4 日　　舉辦“海峽兩岸小學數學課堂教學交流展示”。
12 月 9 日、10 日　舉辦第三屆小學“新思維數學”澳門杯課堂教學比賽。
12 月　　《澳門數學教育》第十五期出版。

2018 年

1 月 28 日　　前往中山拜訪華星幼稚園。
4 月 28 日　　於聖瑪大肋納分校舉辦「世界七大數學死題破解演講會」，邀請上海崔榮琰先生來澳作數學難題破解示範。
5 月 24－29 日　前往新加坡參加第 29 屆亞太區小學數學奧林匹克賽決賽，邵敏老師帶領（培正） 黃浩政，梁熙哲和（濠江英才）洪崇博同學，黃浩政同學獲初賽白金獎，洪崇博同學獲金獎，爲澳門學界爭光。
6 月 1－2 日　　組織本澳 19 名數學優秀學生前往美國拉斯維加斯內華達大學拉斯維加斯校區（UNLV）參加第 43 屆美國高中數學競賽（ARML），澳門隊領

隊、教練汪甄南、施振雄、鄧海棠、金鑫,李寶田校長、導師賀彩珍、劉淑華,隊員包括(濠江)高偉盛、袁浩軒、容逸朗、李俊傑、林瀟、(培正)唐健維、(菜農子弟)陳志豪、(鏡平)何浩賢、陳明浩、廖俊龍、楊昊、(勞校)黎智健、余文焯、(培道)廖汶鋒、袁仲賢、馮懿、(聖保祿)鍾梓瓏、譚嘉傑。比賽完畢後,遊覽洛杉磯植物園和環球片場等景點。澳門隊於國際排名榜亞軍,團體分數與中國隊並列第一,為澳門學界爭光。

6 月 30 日 –
7 月 2 日　與香港資優教育學會合辦 2018 三維杯環亞太國際數學邀請賽(香港舉行),來自香港、澳門、上海、深圳、菲律賓、印尼等亞太十國、地區共 600 多名中小學生參加。培正中學施懿罡獲初小組個人金獎,澳門大學附屬應用學校王梓言獲中小組個人金獎,培正中學鄭子謙獲高小組個人金獎。

7 月 7 日　於聖保祿中學禮堂舉行希望杯、數學大王國際邀請賽、環亞太杯國際數學賽暨(ARML)美國高中數學競賽成果滙報會。教育暨青年局梁怡安處長為獲得者及其教練員頒發獎牌和證書。

5 月 25 – 28 日　前往新加坡參加第 28 屆亞太區小學數學奧林匹克賽決賽。

6 月　為香港名創教育(文達出版社)編輯的澳門基力數學探知 1A 和 1B 出版。

6 月 16 – 17 日　組織本澳幼稚園和小學數學老師前往深圳觀摩交流,出席 2018 全國史豐收數學速算法大獎賽,同時參觀史豐收教學基地。

10 月 13 日　於濠江中學附屬小學舉辦「使用漫畫進行數學教學 — 來自新加坡的經驗」講座,邀請新加坡南洋理工大學國立教育學院數學與數學教育學系的卓鎭南教授來澳介紹使用漫畫進行數學教學。

11 月 10 日　於濠江中學附屬小學舉辦「世界數學難題一尺解第二次講座」,再次邀請上海崔榮琰先生來澳操作實習講解會。

11 月 23 – 27 日　汪甄南、賀彩珍和劉淑華老師帶領 60 位培正小學生和家長前往馬來西亞力行華小學參加第 5 屆 馬來西亞國際數學奧林匹克競賽。

12 月 8 – 9 日　第二十八屆「滙業盃中學生常識問答比賽」數學命題,為協辦單位。

12 月 15 日、16 日　於高美士中葡中學禮堂舉辦常港澳小學「新思維數學」課堂教學邀請賽。
進入決賽老師:
浸信中學李煥棉老師,課題:小五〈代數式(一)〉
濠江中學附屬小學莊淑蘭老師,課題:小二〈 推理〉
常州市博愛路小學潘雪琪老師,課題:小二〈「秒」的認識〉
化地瑪聖母女子學校魏佩珊老師,課題:小五〈平行四邊形的面積〉

香港英皇小學賴永康老師,課題:小六〈速率〉

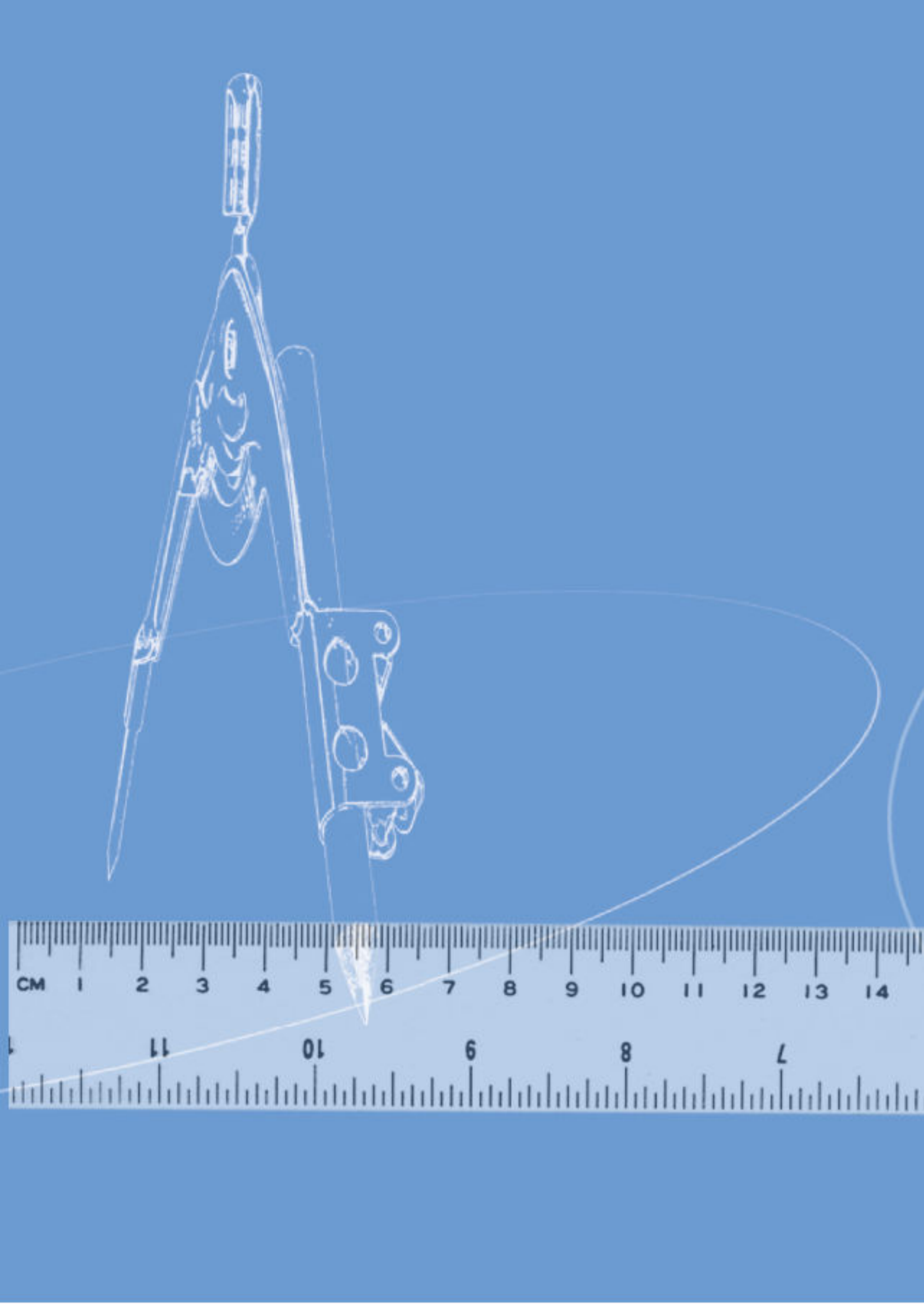
評委:方運加教授(首都師範大學數學系)、邱學華院長(常州大學嘗試教育科學研究院)、孫漘先先生(北京電子工業出版社數學編輯)、錢秋芬校長(常州市市北實驗初級中學)、胡月媚(澳門數學教育研究學會理事)。

評選結果:

一等獎:莊淑蘭老師

二等獎:李煥棉老師、魏佩珊老師

12 月　《澳門數學教育》第十六期出版。


CM 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14