第二十一期 No.21
ISSN 1814-2176

Educação Matemática de Macau

澳門数学教育

——张奠宙 題

Mathematics Education in Macau

澳門數學教育研究學會

澳門數學教育研究學會出版
2023年12月

ISSN 1814-2176
9 771814 217007

澳門數学教育（第二十一期）　2023 年 12 月

目　錄

澳門數學教育研究學會出版
澳門新聞局編號：2877
地址：澳門南灣街 107 號
刊頭題詞：張奠宙教授
排版：廣源紙業文具行
印刷：新文寶印務有限公司
刊號：ISSN 1814－2176

中聯辦勉數研會育人才

2023 年 7 月 22 日星期六　《澳門日報》第 A07 版：澳聞

該會一行與中聯辦代表合照

澳門數學教育研究學會在會長江春蓮帶領下，本月二十日拜訪中聯辦，獲教育與青年工作部副部長石書正接待。

新屆會長江春蓮匯報該會近二十年工作和取得的成果。在創會會長汪甄南帶領下，該會所作貢獻兩次獲特區政府授予功績獎狀。新一屆領導層將積極配合國家及特區政府的發展及政策，推動兩地數學教育人才交流，為國家及特區培育具備堅實的數學基礎、良好數學能力的愛國愛澳人才。

秘書長鄧海棠簡介該會歷史及活動項目。理事長伍劍佐介紹會務發展，期望在中聯辦支持下，促進與國家不同省市的數學教研交流活動。

石書正希望該會把握時代發展機遇，堅定為國家及特區培育愛國愛澳人才，勉勵該會續發揮數學教育專業團體作用，加強教師培訓工作和教學研討活動，中聯辦也將積極協調、支持兩地在數學教育的學術交流。

致　詞

澳門數學教育研究學會會長　江春蓮

承蒙澳門數學教育研究學會汪甄南會長及理監事會的信任與支持,以及各位對我的厚愛,我於 2022 年 12 月接任本會會長,在此我感謝榮譽會長汪甄南先生、顧問李寶田校長和吳琍玲老師、副會長伍助志先生、秘書長鄧海棠博士、理事長伍劍佐博士、副理事長劉明藝老師、林松孝老師、施振雄老師和各位理事,監事長劉淑華老師、副監事長胡漢賢老師和監事賀彩珍老師曾經為本會所做的無私的工作、幫助及指導,向全體成員對本會的信任與支持,致以衷心的感謝。

本會於 2002 年 7 月由汪甄南先生成立。22 年來,在汪會長的帶領下,本會組織並舉辦了一系列活動:1)數學公開課比賽和教師培訓,提升教師的數學和數學教學水平,促進其專業發展。2)邀請內地、臺灣、新加坡、烏克蘭等地數學名師到澳門給本地老師做講座,特別是 2006 年 12 月舉辦的國家數學教育高級研修班"數學教師教育"(澳門會議),開拓了教師的視野。3)帶領本會會員、澳門教師到內地、臺灣等地學習參訪,深入了解並學習各地辦學理念,了解學生學習情況,學習各地教師的教學經驗。4)本會組織編寫了《小學教育階段數學基本學力要求》、《澳門新思維數學》小學教材和《澳門基力數學探知》初中教材以及《數學試題詳解》、《升大數學教程》高中教材,為澳門的中小學數學課程建設做出了自己的貢獻。5)本會組織並舉辦各種數學競賽活動,培訓澳門學生參加國際數學比賽,多次獲得一等、二等獎項。6)出版發行《澳門數學教育》,提升數學教師的數學解題、教學反思和研究水平。這些工作獲得了澳門教育界的認同和贊許,本會於 2015 年獲特區政府授予團隊功績獎狀。不忘初心,本會一直致力於在保持華人數學學習傳統的基礎上,學習和吸收國內外適合我們現實的數學教育理論和方法,在堅定地執行"一國兩制"方針和"愛國愛澳"原則下積極參與澳門教育事業,為澳門數學教育事業的發展發揮著重要的作用,為本會樹立了良好的聲譽和形象。在此,請允許我對汪先生和各位會員表達最衷心的感謝和崇高的敬意!

過去三年,受新冠疫情影響,澳門社會和經濟遭受到前所未有的沖擊,本會會員堅守教學一線,堅持線上教學,支持特區政府和教育及青年發展局的各項抗疫防疫措施,克服重重困難,群策群力,共同度過難關。今年年初,我們痛失鄭志民先生。離世前,他仍然念念不忘數學會的工作,在此,特向鄭主任表示深深的感謝和深情的哀悼!

今年是疫情後的首年,新的傳染病也時不時會在學校發生,各位工作在教學一線,仍然要留意。疫情期間,盡管大家一直在努力完成教學進度,但教學效果卻很難達到疫情前的

水平，很多學生面臨課業壓力和疫情帶來的心理壓力，我們需要在努力幫助他們提升學業水平的同時，關心他們的身心健康。

今年也是澳門非高等教育中長期規劃（2021－2030）實施的第三年，我們新一屆理監事成員將齊心協力，在繼續做好汪榮譽會長開拓的工作的基礎上，不斷拓展新的工作內容和工作方式，特別是借助新媒體檢討數學教育現狀，不斷改進各級數學和數學教育課程、教學與評估，提升澳門學生的數學思維能力，培養他們對數學學習的積極態度和堅強信念，為澳門、粵港澳大灣區和大中華地區的數學教育發展出一份力。

最後藉此機會衷心感謝澳門特區政府、澳門教育及青年發展局、澳門基金會、澳門各間學校校長、副校長、主任和數學教師，以及來自各地的數學教育同仁一直以來對本會工作的大力支持。

祝願祖國富強昌盛、國泰民安，祝願大家事業興旺、身體健康、生活愉快！

变式问题串课堂 寻规说理话数思

澳門培華中學　葉睿琳　張春燕老師
澳門大學教育學院　江春蓮教授

（本文已提交澳門特別行政區教育及青年發展局作教研交流）

【导语】2023 年 2 月 24 日，澳門培華中學進行了數學教研活動，期間葉睿琳老師就《數列的概念》在高一文科班進行了公開課教學，隨后該校數學組老師就教學活動的設計進行了研討。下面我們將先完整呈現這節課的教學流程，同時就其教學設計作些講評，希望能給一綫數學老師帶來一些啓迪，特別是應用概念性變式進行教學問題的設計。

【教学目的】這節課的知識與技能方面的目的有三：（1）理解數列的有關概念；（2）掌握數列的分類；（3）掌握數列通項公式的概念，能夠根據數列的前幾項寫出數列的一個通項公式。過程與方法方面的目標是：經歷“事實 → 概念”的概念形成過程，提升數學抽象的核心素養。情感、態度與價值觀方面的目標是：學會用聯系的觀點學習數學，形成自主探索的學習習慣；感受數學文化的魅力，體會數學來源于生活，提高數學學習的興趣。

【评语 1】上面對這節課的“知識與技能”方面的目的寫得比較清晰，而另兩個方面可以再具體一點。如在“過程與方法”方面的目標是：（1）經歷“觀察、分析具體實例 → 歸納、抽象概念的本質屬性”的概念形成過程，發展數學抽象思維能力；（2）經歷“從特殊例子中歸納出一般規律 → 用更多的例子對觀察到的規律進行檢驗 → 生成一般規律”的思維過程，得到數列的通項公式，提升學生的數學模式識別能力和數學建模能力。“情感、態度與價值觀”方面的目標是：（1）學會從特殊性看問題，在特例中尋找一般規律的數學思維習慣；（2）感受數學文化的魅力，體會數學來源于生活又服務于生活，認識數學的廣泛應用性、提高學生數學學習興趣。

【活动 1】一天，偵探社的同學們收到一封神秘的信件。信件是這樣寫的：偵探社的同學們，請你們團結合作，找到我，并說出我的秘密。

第一關：請各組同學分別找出下列八組問題中每道題的規律，根據該規律得到其中空白處應該填入的數字，并計算同一組所填入的四個數字之和，八組問題的數字和按順序寫出來便是通往下一關的密碼。

第一組: 1）10，10，_____，10，10，… 2）_____，2，3，4，5，… 3）0，–1，_____，–3，–4 4）1，–7，1，_____，1，–7，1，–7		第二組: 1）5，_____，5，5，5，… 2）1，_____，5，7，9，… 3）–4，–6，–8，_____，–12 4）_____，0，2，0，2，0，2	
1）$a_n=$________	2）$b_n=$________	1）$a_n=$________	2）$b_n=$________
3）$c_n=$________	4）$d_n=$________	3）$c_n=$________	4）$d_n=$________
第三組: 1）_____，3，3，3，3，… 2）2，4，_____，8，10，… 3）–9，_____，–11，–12，–13 4）10，3，12，_____，14，3，16，3		第四組: 1）7，7，7，7，_____，… 2）1，4，9，_____，25，… 3）–10，_____，–30，–40，–50 4）–1，0，–1，_____，–1，0，–1，0	
1）$a_n=$________	2）$b_n=$________	1）$a_n=$________	2）$b_n=$________
3）$c_n=$________	4）$d_n=$________	3）$c_n=$________	4）$d_n=$________
第五組: 1）0，0，_____，0，0，… 2）1，6，11，16，_____，… 3）7，_____，–1，–5，–9 4）12，–24，12，_____，12，–24，12，–24		第六組: 1）5，_____，5，5，5，… 2）3，6，_____，12，15，… 3）25，16，9，_____，1 4）2，–4，2，–9，2，_____，2，–25，2，–36	
1）$a_n=$________	2）$b_n=$________	1）$a_n=$________	2）$b_n=$________
3）$c_n=$________	4）$d_n=$________	3）$c_n=$________	4）$d_n=$________
第七組: 1）2，2，_____，2，2，… 2）_____，5，10，15，20，… 3）–5，–10，–15，_____，–25 4）10，20，11，20，12，20，13，_____		第八組: 1）8，8，8，8，_____，… 2）10，_____，30，40，50，… 3）0，–7，–14，_____，–28 4）1，0，1，_____，1，–6，1，–9，1，–12	
1）$a_n=$________	2）$b_n=$________	1）$a_n=$________	2）$b_n=$________
3）$c_n=$________	4）$d_n=$________	3）$c_n=$________	4）$d_n=$________

【评语 2】活動 1 中主要的規律有:1）給出的數字全部相同,所以空白處也應該填入該數字,以保證整齊劃一;2）后項減前項得到的差全部一樣,即等差數列（當然,這節課不宜給出這個名稱）,這里的差有 1,2,3,5,－4,－5,10 等;3）隔項成規律的,如隔項的數相等,或者隔項的數成“等差”的;4）完全平方數的,如第六組的第 3）題,這里第一次出現,最好按遞增的順序呈現,緊接其后的第 4）題添加了負號。活動 1 的重點是用語言來描述每道題的規律,并得到同組同學的認可,不認可的可以講出自己的理由。

【活动 2】新知初探 1—— 數列的相關概念及分類

活動 2 則在總結活動 1 的基礎上帶領學生歸納出:（1）數列的概念、數列的第 n 項以及數列的記號$\{a_n\}$:$a_1,a_2,a_3,\cdots$。（2）數列的兩個分類:按個數有限還是無限分爲有窮數列和

無窮數列;按數列中前后項的大小遞增、遞減分爲常數數列、遞增數列、遞減數列、擺動數列等。之后是檢測學生對這些概念理解的辨析問題和填空問題(如下)。

第二關:請同學們小組討論,完成下列題目。

1、下列四項陳述中,正確的是(　　)

(*A*) 所有數列可分爲遞增數列和遞減數列兩類。

(*B*) 數列中的數由它的位置序號唯一確定。

(*C*) 數列 1,3,5,7 與數列 7,5,3,1 是同一組數列。

(*D*) 同一個數在數列中不可能重復出現。

2、下列數列中,既是無窮數列又是遞增數列的是(　　)

(*A*) $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots$

(*B*) $0,-1,0,-1,\cdots$

(*C*) $-4,-3,-2,-1,\cdots$

(*D*) $1,2,3,4,\cdots,30$

3、給出以下數列:

① $1,-1,1,-1,\cdots$

② $2,4,6,8,\cdots,2000$

③ $8,8,8,8,\cdots$

④ $0.8,0.8^2,0.8^3,0.8^4,\cdots,0.8^{10}$

其中,有窮數列爲________;無窮數列爲________;遞增數列爲________;遞減數列爲________;常數列爲________.(填序號)

【评语 3】從新知部分可以看出,活動 1 中每組問題的設計充分考慮到了數列的各種類型,并用具體的變式呈現出來。運用具體的概念變式(鮑建生,黃榮金,易凌峰,顧泠沅,2003)讓學生抽象出概念的定義,并輔助數列概念的兩種分類。概念學習后的課堂評估環節,采用了判斷題、選擇題和填空題相結合的形式。如圖 1 中的第 1 題,看起來是選擇題,實則是判斷題。

【活动 3】新知初探 2— 數列的通項公式

活動 3 是數列通項公式的定義和兩個注意事項。數列的通項公式是表示數列$\{a_n\}$的第 n 項與它的序號 n 之間的對應關系的式子。兩個注意事項是:(1) 并不是所有的數列都有通項公式;(2) 同一數列的通項公式,其表達形式可以不唯一,例如數列 $-1,1,-1,1,-1,1,\cdots$ 的通項公式可以寫成 $a_n=(-1)^n$、$a_n=(-1)^{n+2}$ 和 $a_n=cosn\pi$ 等。

接下來是鞏固練習。

第三關是同學們分組討論并完成題目:北宋哲學家邵雍的詩《山村咏懷》:“一去二三里,烟村四五家,亭臺六七座,八九十枝花。”詩中涉及的數字依次爲________________,這個數列的通項公式爲:____________。

第四關是每組同學設計一組能夠寫出通項公式的數列,與其他組交換,爲對方組别寫出他們所出的數列的通項公式。

【评语 4】考慮到學生從小學就有接觸“找規律” 的數字問題,在三個知識點中,數列的通項公式是這節課的難點。所以此處宜借助活動 1 中的例子帶着學生學會分析這些數列的數字特點,從原來的對兩相鄰項數值關系的關注轉到尋找序號 n 與 a_n 的關系。爲此,我們需要從最簡單的自然數數列開始,所以第三關是很好的例子,也可以在前面添加一項“0”,或者删除最前面一項“1”,僅僅移動一個數字,就會得到一個每項都不同的數列。爲了便于學生清晰看到 n 與 a_n 的關系,需要像上面的表格一樣,在前面加上一行代表 n 的值。

n	1	2	3	4	5	6	7	…	
$f(n)$	1	2	3	4	5	6	7	…	$f(n) = n$
$g(n)$	0	1	2	3	4	5	6	…	$g(n) = n - 1$
$h(n)$	2	3	4	5	6	7	8	…	$h(n) = n + 1$

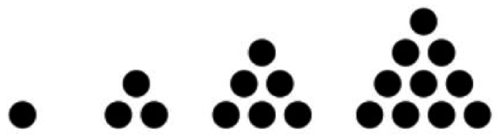
爲方便學生寫出通項公式,我們在活動1的后面添加了四個空格,讓學生在那里依次填上相應數列的通項公式。

本節課選用的通項公式需要盡量簡單,對學生來説是熟悉而又陌生的,如偶數數列 2,4,6,8,…;奇數數列:1,3,5,7,…;3 的倍數,4 的倍數等等。也可以讓學生接觸簡單的完全平方數數列,爲后面的學習作點鋪墊。

【活动 4】課堂小結并布置作業.

課堂小結部分是第五關,同學們自己總結本節課的知識點。作業是三角形數(如下圖),該數列的通項公式可以通過數點的方法得到:$a_n = 1 + 2 + \cdots + n$。這也是后面要學習的自然數數列的前 n 項和。

傳説古希臘畢達哥拉斯學派的數學家經常在沙灘上研究數學問題,他們在沙灘上畫點或用小石子來表示數,如右圖 1,三角形點陣表示三角形數,它們依次爲 ____, ____, ____, ____, ____,這個數列的通項公式爲 ________。



【总评】本節課的活動 1 設計得很完美,既可以用來抽象出數列的概念,還可以用來討論數列的分類及通項公式。用它來貫穿整個課堂,課堂就會連貫順暢起來。充分使用基于概念性變式設計的問題,可以極大地提升課堂教學效率。最后,也可像第四關一樣,讓學生學會自己出題,培養學生的創新能力和意識。

在活動1中,老師需要給學生足夠的時間讓學生觀察其中的數字排列規律,并用語言叙述出來。此時學生所描述的規律,大多會按小學學到的方法,即如何從前項得到后項,而數列的通項公式則是 a_n 與序號 n 之間的函數關系,所以確定數列的通項公式時,需要在前面

加一行 n 值 1,2,3,⋯,幫助學生觀察 a_n 與 n 的關系,并用語言和數學表達式表示出來,發展學生的數學思考能力和數學交流能力。

参考文献:

鲍建生,黄荣金,易凌峰,顾泠沅(2003). 变式教学研究(续). 数学教学, 2003(2), 6 - 10, 23.

2022 年澳門四校聯考數學正卷解題攻略

澳門聖若瑟教區中學第六校　鄧海棠

澳門四校聯考制度實行至今，已經有 6 年的運行經驗了。每年保送過後，失意落選的考生就要面對全澳高考學子進行競爭，參加四校聯考，向自己的升學目標努力奮鬥。

作為必考科目的教師，筆者也想為廣大莘莘學子做些事情，冀能給他們考題的方向上、解題的方法上、高效解決問題的技能技巧上提供幫助。有見於此，下面奉上 2022 年澳門四校聯考數學正卷的“考綱知識考點分佈統計表”及“解題攻略”，希望對他們有用、對他們的教師教學有用。

澳門高校聯合招生考試數學科考試大綱（正卷，2 小時完成）	選擇題題目題號	解答題題目題號
1. 基本概念：實數系統；集合的概念及集合的運算，交集、併集、補集和差集。韋恩圖，數學歸納法。	1. 空集的正確表示。	5. 用數學歸納法證明整除問題。
2. 百分數：百分數的意義及其在日常生活中的應用；盈虧、折扣、單利息和複利息、增長和折舊。	11. 入座位置的最多即利潤最大化問題。	
3. 比、比例及變數：變數法、正變、反變、聯變及部分變。		
4. 多項式及有理分式：多項式的運算，長除法及綜合除法；因式分解：因式定理及餘式定理，最高公因式（$H.C.F.$）及最小公倍式（$L.C.M.$）；平方差公式，立方和及立方差公式，部分分式。	3. 多項式余式定理（同余）。	
5. 一元二次方程及二次函數：方程的解與判別式的關係，二次方程的求根公式；根與系數的關係；會用配方法求二次函數的極值。	5. 方程有實根，求字母參數的取值。 12. 韋達定理與算術平均數。	1. 二次函數解析式，圖象平移，函數最值。
6. 指數及根式：指數定律；二次根式的簡化與運算；二項不盡根的平方根。	4. 二重根式的化簡求值。	
7. 代數不等式：代數不等式和絕對不等式的運算及其解集；解一元一次或二元一次不等式組，包括用幾何方法求解；在線性規劃問題的應用。	2. 不等式性質的應用。 9. 線性規劃約束條件組的可行域。	

8. 對數函數與指數函數：對數及指數的性質，換底公式，自然指數函數；在增長及衰變過程的應用（包括連續複利息），解指數方程及對數方程。	6. 指數對數式的轉化運算。 14. 指數方程求解。	
9. 非線性方程：解分式方程及無理方程。		
10. 排列與組合：基本概念，二項展開式。		
11. 數列與首 n 項和：等差數列及等比數列的通項公式，首 n 項和及等比數列無窮項和。		2. 等比等差數列的通項公式及求前 n 項和。
12. 平面幾何：(A) 直線圖形：三角形及凸多邊形內角和；直線及角的性質和定理；相似三角形、全等三角形；勾股定理；三角形、正方形、矩形、菱形及平行四邊形的性質；中位線定理及截距定理。(B) 圓：圓、弦及弧的性質；圓心角、圓周角、圓內接四邊形、外接圓；弧長及扇形面積。	7. 三個圓互切求半徑。	
13. 三角：角度制及弧度制的關係；三角函數與三角恆等式，複合角公式及半角公式；輔助角公式；三角形面積；正弦定理、餘弦定理；反三角函數的定義，含一個未知數的三角方程的求解。	15. 方位角和余弦定理。	4. 三角函數求值，三角方程求解。
14. 解析幾何：(A) 直角坐標系，兩點的距離，線段的定比分點；直線的斜率及截距，直線方程的不同表達式；兩線平行與垂直。解不多於三個未知數的線性方程組。(B) 圓的標準方程、一般方程、圖形的性質；橢圓、雙曲線、拋物線的定義和標準方程、圖形和性質。直線與圓錐曲線的相交。	10. 求直線的垂線，以及與另一直線的交點。	3. 橢圓方程，直線與橢圓相交。
15. 函數圖形：一次、二次及三次函數，有理函數、對數及指數函數，正弦、餘弦及正切函數的描繪；對稱、平移、伸展、收縮及反射等技巧的運用；用圖解法求解含一個未知數的方程組。		
16. 概率和統計：隨機試驗，結果和事件；概率加法規則和乘法規則；中心傾向的度量 --- 算術平均數，眾數及中位數；離散度的度量 --- 極差，方差及標準差。	8. 獨立重複試驗的概率。 12. 韋達定理與算術平均數。 13. 數字排列和概率。	

第一部分 選擇題。請選出每題之最佳答案。

1. 在下列集合中,表示空集的是

$A.\ \{0\}$ $B.\ \{x:sinx + cosx = 3\}$ $C.\ \{x:x^2 - 1 = 0, x \in R\}$

$D.\ \{\emptyset\}$ $E.\ \{(x,y):x^2 + y^2 = 0, x \in R, y \in R\}$

分析:本題考查空集的概念,是集合部分最基本的知識能力要求。

解法 1(直接求解):由 $sinx + cosx = \sqrt{2}sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$,

而 $3 \notin [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$,

從而 $\{x:sinx + cosx = 3\} = \emptyset$. 選 B。

解法 2(間接排除):顯然,A,D 都不是空集,可以排除;

C 中,$x^2 - 1 = 0$,解得 $x = \pm 1$,即 $\{x:x^2 - 1 = 0, x \in R\} = \{-1,1\} \neq \emptyset$,可以排除 C;

E 中,$x^2 + y^2 = 0$,解得 $x = y = 0$,即 $\{(x,y):x^2 + y^2 = 0, x \in R, y \in R\} = \{(0,0)\} \neq \emptyset$,可以排除 E;

綜上所述,得 B 為所求。

2. 若 $a > b > 0$ 及 $m > 0$,下列哪一個不等式是正確的?

$A.\ \frac{b}{a} > \frac{b+m}{a+m}$ $B.\ \frac{a}{b} < \frac{a-m}{b-m}$ $C.\ \frac{b}{a} < \frac{b+m}{a+m}$ $D.\ \frac{a}{b} > \frac{a-m}{b-m}$ $E.$ 以上皆非

分析:本題考查不等式的運算性質,側重於乘法和除法方面的應用。

解法 1(綜合推導法):由 $a > b > 0$ 及 $m > 0$,得 $am > bm > 0$,

得 $am + ab > bm + ab > 0$,得 $a(m + b) > b(m + a) > 0$,

全式除以 $a(m + a)$,得 $\frac{b+m}{a+m} > \frac{b}{a}$,故而選 C。

解法 2(賦值排除法):由 $a > b > 0$ 及 $m > 0$,不妨取由 $a = 2$,$b = 1$ 及 $m = 3$,

對於 A,$\frac{b}{a} = \frac{1}{2} > \frac{b+m}{a+m} = \frac{4}{5}$,不成立;

對於 B,$\frac{b}{a} = \frac{1}{2} < \frac{a-m}{b-m} = \frac{1}{2}$,不成立;

對於 C,$\frac{b}{a} = \frac{1}{2} < \frac{b+m}{a+m} = \frac{4}{5}$,成立,從而 E 不成立;

對於 D,$\frac{b}{a} = \frac{1}{2} > \frac{a-m}{b-m} = \frac{4}{5}$,不成立;

綜上所述,得 C 為所求。

3. 若多項式 $x^3 + 3x^2 + ax + b$ 分別被 $x - 2$ 及 $x + 1$ 除,餘數相等。求 a 之值。

$A.\ 4$ $B.\ -3$ $C.\ -4$ $D.\ 9$ $E.\ -6$

分析:本題考查一元高次多項式的余式定理,一般把兩個式子聯立成方程組求解即可。

解:設$f(x)=x^3+3x^2+ax+b$,

得$f(2)=8+12+2a+b$,

及$f(-1)=-1+3-a+b$,

相減得$18+3a=0$,得$a=-6$,選E。

4. $\sqrt{7-4\sqrt{3}}=$

$A.\sqrt{3}-\sqrt{2}$　　$B.2-\sqrt{3}$　　$C.\sqrt{3}-2$　　$D.2-\sqrt{6}$　　$E.2-2\sqrt{3}$

分析:本題考查二重根式的化簡,一般的解題方法是配方去絕對值化簡即可,但是要注意正負。

解法1(配方化簡法):$\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{2^2-2\cdot 2\cdot\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}=2-\sqrt{3}$,選$B$。

解法2(平方排除法):由$\sqrt{7-4\sqrt{3}}>0$,

而$\sqrt{3}-2<0$,$2-\sqrt{6}<0$,$2-2\sqrt{3}<0$,可以排除C、D、E,

又$(\sqrt{7-4\sqrt{3}})^2=7-4\sqrt{3}$,

對於A,$(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2=5-2\sqrt{6}\neq 7-4\sqrt{3}$,可以排除$A$,

故而選B。

5. 若方程$px^2-2(p+3)x+p-1=0$有實根,求p的取值範圍。

$A.0\le p\le\frac{5}{7}$　　$B.p\ge-\frac{5}{7}$　　$C.-\frac{5}{7}\le p\le 1$　　$D.p\ge-\frac{9}{7}$　　$E.$以上皆非

分析:本題考查方程的實數根的個數,要注意看清是一元一次方程還是一元二次方程。

解:(1) 若$P=0$,得$0-2(0+3)x+0-1=0$,原方程是一元一次方程,

解得$x=-\frac{1}{6}$,方程有實根,滿足條件;

(2) 若$p\neq 0$,原方程是一元二次方程,

由$\triangle\ge 0$,得$[-2(p+3)]^2-4p(p-1)\ge 0$,

整理得$7p+9\ge 0$,得$p\ge-\frac{9}{7}$,從而$p\ge-\frac{9}{7}$且$p\neq 0$;

綜合(1)(2),得$p\ge-\frac{9}{7}$,故而選D。

6. 已知$2^a=5^b=\sqrt{10}$,則$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$之值是多少?

$A.\ 2$　　$B.\ 1$　　$C.\ \sqrt{2}$　　$D.\ \frac{\sqrt{2}}{2}$　　$E.\ \frac{1}{2}$

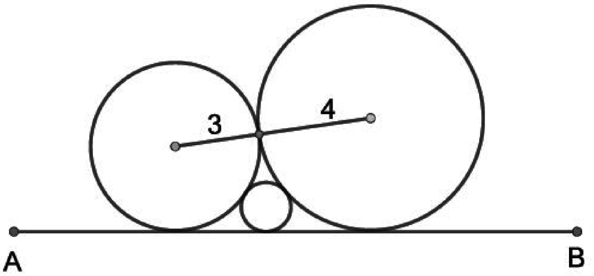
分析:本題表面上看是指數問題,實則考查指數問題對數化,需要熟悉對數的運算法則。

解(化對數法):由$2^a=\sqrt{10}$,得$log_2\sqrt{10}=a$,得$a=\frac{lg\sqrt{10}}{lg2}=\frac{\frac{1}{2}}{lg2}=\frac{1}{2lg2}$,得$\frac{1}{a}=2lg2$,

由$5^b=\sqrt{10}$,得$log_5\sqrt{10}=b$,得$b=\frac{lg\sqrt{10}}{lg5}=\frac{\frac{1}{2}}{lg5}=\frac{1}{2lg5}$,得$\frac{1}{b}=2lg5$,

從而$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2lg2+2lg5=2(lg2+lg5)=2$,故而選$A$。

7. 圖中三個圓及線段AB互切。兩個大圓半徑分別為3單位及4單位。求小圓的半徑。



$A.\ 84-48\sqrt{3}$　　$B.\ \sqrt{2}-1$　　$C.\ 2\sqrt{2}-2$　　$D.\ 6-4\sqrt{2}$　　$E.\ 42-24\sqrt{3}$

分析:本題純粹是初中平面幾何勾股定理的應用問題,但是涉及代數的方程組求解,運算量相當龐大,且不易計算,運算結果也比較偏頗,不夠正路。

解:可以把以下的結論結合解題。

(1)如圖所示,圓O_1和圓O_2外切於點P,它們的半徑分別為r_1、r_2,

AB是它們的外公切線,A、B分別是切點,求AB。

解析:連接AO_1和BO_2,作$O_2D\perp AO_1$於D;

易知ABO_2D是矩形,

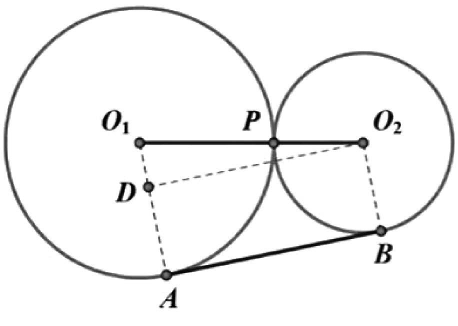
所以$O_2D=AB$,$O_2B=AD$;

由於兩圓半徑分別為r_1、r_2,

於是$O_1O_2=r_1+r_2$,$O_1D=r_1-r_2$;

由於$\triangle O_1O_2D$是直角三角形,

所以$O_2D^2+O_1D^2=O_1O_2{}^2$,



即$O_2D^2+(r_1-r_2)^2=(r_1+r_2)^2$,解得$O_2D=2\sqrt{r_1r_2}$,得$AB=2\sqrt{r_1r_2}$;

(2)如圖所示,已知圓O_1、圓O_2和圓O_3兩兩相切,且與同一直線相切。

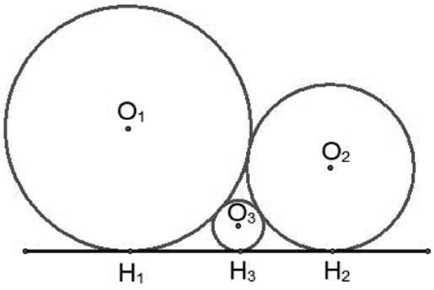
它們的半徑分別為r_1、r_2、r_3,求證:$\frac{1}{\sqrt{r_1}}+\frac{1}{\sqrt{r_2}}=\frac{1}{\sqrt{r_3}}$。

解析:設這三個圓與直線的切點分別為 H_1、H_2、H_3,

由(1)的結論,可以知道 $H_1H_2 = 2\sqrt{r_1r_2}$,

$H_2H_3 = 2\sqrt{r_2r_3}$,

$H_1H_3 = 2\sqrt{r_1r_3}$。



由圖可知,$H_1H_3 + H_2H_3 = H_1H_2$,

於是 $2\sqrt{r_1r_3} + 2\sqrt{r_2r_3} = 2\sqrt{r_1r_2}$,

即 $\dfrac{1}{\sqrt{r_1}} + \dfrac{1}{\sqrt{r_2}} = \dfrac{1}{\sqrt{r_3}}$。

由上述(1)(2)的結論,設所求小圓的半徑為 ,得 $\dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{4}} = \dfrac{1}{\sqrt{r}}$。,

解得 $r = 84 - 48\sqrt{3}$,從而選 A。

另解:如圖,設半徑分別為 3 單位及 4 單位的兩個大圓圓心分別為 C、D,

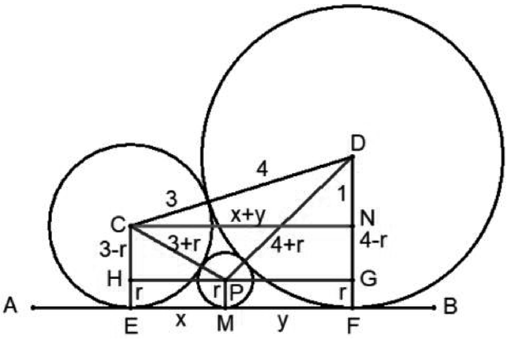
設所求小圓圓心為 P,半徑為 r。

分別作 $CE \perp AB$ 於點 E,作 $DF \perp AB$ 於點 F,作 $PH \perp CE$ 於點 H,

作 $PG \perp DF$ 於點 G,作 $CN \perp DF$ 於點 N,作 $PM \perp AB$ 於點 M,

連結 CD、CP、DP。

設 $EM = x$,$MF = y$。



則在 $Rt\triangle CND$ 中,$CN = EF = x + y$,

$CD = 3 + 4 = 7$,$DN = 4 - 3 = 1$,

得 $(x + y)^2 = 7^2 - 1^2 = 48$, ①

在 $Rt\triangle CHP$ 中,$HE = PM = r$,$CH = 3 - r$,

$HP = EM = x$,$CP = 3 + r$,

得 $(3 + r)^2 = (3 - r)^2 + x^2$,得 $12r = x^2$, ②

在 $Rt\triangle DGP$ 中,$GF = PM = r$,$DG = 4 - r$,$GP = FM = y$,$DP = 4 + r$,

得 $(4 + r)^2 = (4 - r)^2 + y^2$,得 $16r = y^2$, ③

③ ÷ ② 得 $\dfrac{y^2}{x^2} = \dfrac{16r}{12r} = \dfrac{4}{3}$,從而 $\dfrac{y}{x} = \sqrt{\dfrac{4}{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$,得 $y = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}x$, ④

④ 代入 ① 得 $\left(x + \dfrac{2\sqrt{3}}{3}x\right)^2 = 48$,得 $\left(\dfrac{3 + 2\sqrt{3}}{3}\right)^2 x^2 = 48$,得 $\left(\dfrac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)^2 x^2 = 48$,

得 $\dfrac{(2 + \sqrt{3})^2}{3}(2 - \sqrt{3})^2 x^2 = 48(2 - \sqrt{3})^2$,得 $x^2 = 3 \times 48(2 - \sqrt{3})^2$, ⑤

⑤ 代入 ②,得 $12r = 3 \times 48(2 - \sqrt{3})^2$,

得 $r = 12(2 - \sqrt{3})^2 = 12(7 - 4\sqrt{3}) = 84 - 48\sqrt{3}$,從而選 A。

8.　約翰在一次遊戲中勝出的概率是$\frac{1}{4}$。他在連續三次遊戲中勝出至少一次的概率是多少?

A. $\frac{1}{64}$　　*B.* $\frac{27}{64}$　　*C.* $\frac{35}{64}$　　*D.* $\frac{37}{64}$　　*E.* $\frac{43}{64}$

分析:本題考查n次獨立重複試驗事件的概率,可以考慮直接分類相加或者間接排除相減,用相應公式求解。

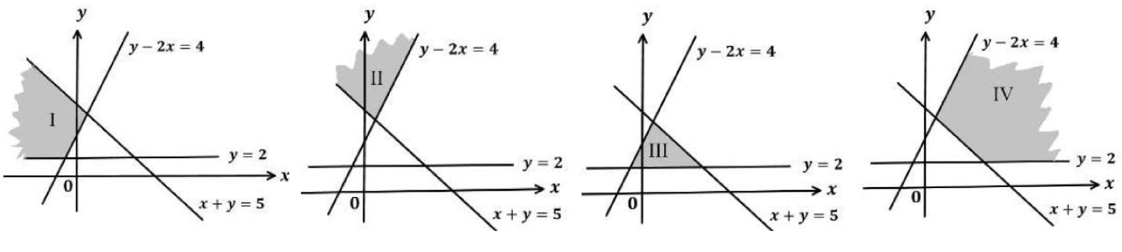
解法 1(直接分類相加求解):

$$
\begin{aligned}
P(\text{勝出至少一次}) &= P(\text{勝出一次}) + P(\text{勝出兩次}) + P(\text{勝出三次}) \\
&= P_3(1) + P_3(2) + P_3(3) \\
&= C_3^1\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(1-\frac{1}{4}\right)^2 + C_3^2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(1-\frac{1}{4}\right)^1 + C_3^3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(1-\frac{1}{4}\right)^0 \\
&= 3\times\frac{1}{4}\times\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 3\times\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^3 \\
&= \frac{37}{64}\text{,從而選 } D\text{。}
\end{aligned}
$$

解法 2(間接排除相減求解):

$P(\text{勝出至少一次}) = 1 - P(0\text{ 次勝出}) = 1 - P_3(0) = 1 - \left(1-\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{37}{64}$,從而選 D。

9.　下圖中,哪一區域是不等式組$\begin{cases} y-2x \le 4 \\ x+y \ge 5 \\ y-2 \ge 0 \end{cases}$的解集?



A. Ⅰ　　*B.* Ⅱ　　*C.* Ⅲ　　*D.* Ⅳ　　*E.* 以上皆非

分析:本題是線性規劃問題,考查約束條件不等式組的可行域。

解:排除法,

對於點(0,0),滿足$y-2x\le 4$,從而$y-2x\le 4$的區域在$y-2x=4$的右下方,可排除*I*、*II*;

對於點(0,0),不滿足$x+y\ge 5$,從而$x+y\ge 5$的區域在$x+y=5$的右上方,可排除*III*;

對於點(0,0),不滿足$y-2\ge 0$,從而$y-2\ge 0$的區域在$y-2=0$的上方,故而選D。

10. 已知直線 L 穿過點$(1,2)$,並與直線 $2x-3y=4$ 垂直。直線 L 和 y 軸相交於

A. $(0,\frac{7}{2})$　　*B.* $(0,\frac{5}{2})$　　*C.* $(0,3)$　　*D.* $(0,-\frac{1}{2})$　　*E.* $(0,\frac{3}{2})$

分析:本題考查兩條直線垂直的位置關係,以及求兩條直線的交點坐標。

解:由直線 $2x-3y=4$,得斜率為$\frac{2}{3}$,從而直線 L 的 $k=-\frac{3}{2}$,

得直線 L 為 $y-2=-\frac{3}{2}(x-1)$,令 $x=0$(y 軸),得 $y=\frac{7}{2}$,選 A。

11. 已知某室內表演場所觀眾席有 6400 張座椅,場內每行都有座椅 32 張。為了配合現行防疫社交距離措施,同一行最多可有連續 4 張座椅被佔用。根據以上要求,每場表演的入座人數最多為

A. 5000　　*B.* 5200　　*C.* 5400　　*D.* 5600　　*E.* 5800

分析:本題結合當前的疫情環境,考查入座位置的最多即利潤最大化問題。

解:由題設,得每行最多可坐 4□4□4□4□4□4□2,共 26 人,

有 $6400\div 32=20$ 行,得每場表演的入座人數最多為 $20\times 26=5200$ 人,選 B。

12. 若方程 $3x^2-8x+m=0$ 的兩個實根為 x_1 和 x_2。若$\frac{1}{x_1}$和$\frac{1}{x_2}$的算術平均數為 2,則 m 之值是多少?

A. -2　　*B.* -1　　*C.* 4　　*D.* 1　　*E.* 2

分析:本題結合了一元二次方程的根與係數的關係,考查了最基本的算術平均數的統計問題。

解:由方程 $3x^2-8x+m=0$ 的兩個實根為 x_1 和 x_2,

根據韋達定理,得 $x_1+x_2=\frac{8}{3}$,$x_1x_2=\frac{m}{3}$,

由$\frac{1}{x_1}$和$\frac{1}{x_2}$的算術平均數為 2,得$\dfrac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}}{2}=2$,

得$\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=4$,得$\dfrac{-\frac{-8}{3}}{\frac{m}{3}}=4$,得$\frac{8}{m}=4$,得 $m=2$,選 E。

13. 從 1,2,3,4,5 中先後選取兩個不同數,分別作為一個兩位數的十位和個位,此兩位數小於 40 的概率為

A. $\frac{1}{5}$　　*B.* $\frac{2}{5}$　　*C.* $\frac{3}{5}$　　*D.* $\frac{4}{5}$　　*E.* 1

分析:本題考查了數字排列和概率問題,不偏不倚,中規中矩,會較受學生歡迎。

解:由$\frac{C_3^1C_4^1}{C_5^1C_4^1}=\frac{3}{5}$,選 C。

14. 方程 $6^x-2^x=2^{x+1}-6^{x+1}+2^{x+2}$ 的解為

$A.\ x=-1$　　$B.\ x=-\frac{1}{2}$　　$C.\ x=0$　　$D.\ x=\frac{1}{2}$　　$E.\ 1$

分析:本題是純粹的指數方程問題,難度不大。

解法 1(賦值排除法):不妨取 $x=0$,方程成立,其他數值不成立,選 C。

解法 2(直接解方程):由原方程得 $6^x+6^{x+1}=2^x+2^{x+1}+2^{x+2}$,

得 $6^x(1+6)=2^x(1+2+4)$,得 $6^x=2^x$,

得 $3^x\times2^x=2^x$,得 $3^x=1$,得 $x=0$,選 C。

15. 彼得先面向正東方走了 n 公里,然後他向右轉了 150 度並走了 3 公里,結果他離出發點恰好為$\sqrt{3}$ 公里。求 n 之值。

$A.\ 3\sqrt{3}$　　$B.\ \frac{\sqrt{3}}{3}$　　$C.\ \frac{1}{3}$　　$D.\ 3$　　$E.\ 2\sqrt{3}$ 或$\sqrt{3}$

分析:本題明面上是考查地理位置方位角問題,實則巧妙結合了三角函數的余弦定理,運用一元二次方程求根(也可因式分解),還要檢驗兩個實根的可行性,有一定的難度。

解:由余弦定理,得$\cos30°=\frac{n^2+3^2-(\sqrt{3})^2}{2\times3\times n}$,得 $n^2-3\sqrt{3}n+6=0$,解得 $n=2\sqrt{3}$ 或$\sqrt{3}$,

如圖,選 E。

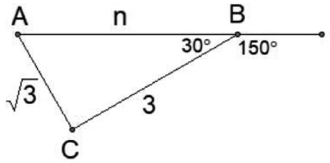


圖1

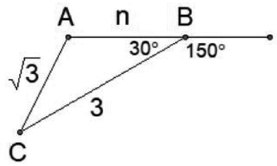


圖2

第二部分 解答題。

1. 已知二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的圖像 C 通過點$(5,0)$,對稱軸為 $x=2$,且$f(x)$ 有最小值 -9。

(a) 求 a、b 和 c 之值。(3 分)

(b) 將圖像 C 向左平移 3 個單位,再向上平移 3 個單位,求所得圖像的函數表達式。(2 分)

(c) 設函數 $g(x)=f(3sinx)$,求函數 $g(x)$ 的最大值和最小值。(3 分)

解:(a) 由對稱軸 $x=2$,$f(x)$ 最小值為 -9,

設二次函數頂點式 $f(x)=a(x-2)^2-9$,

由 $f(5)=0$,得 $a(5-2)^2-9=0$,得 $a=1$,

則 $f(x)=(x-2)^2-9=x^2-4x-5$,

故 $a=1$,$b=-4$,$c=-5$。

(b) 把 C 向左平移 3 個單位,

得 $h(x)=f(x+3)=(x+3)^2-4(x+3)-5=x^2+2x-8$,

再把圖像向上平移 3 個單位,得 $H(x)=h(x)+3=x^2+2x-5$。

(c) $g(x)=(3sinx)^2-4(3sinx)-5=9\left(sinx-\frac{2}{3}\right)^2-9$,

因為 $-1\leq sinx\leq 1$,

當 $sinx$ 與 $-\frac{2}{3}$ 同號取 $sinx=-1$ 時,$g(x)_{max}=9\left(-1-\frac{2}{3}\right)^2-9=16$,

當 $sinx$ 與 $-\frac{2}{3}$ 異號取 $sinx=1$ 時,$g(x)_{max}=9\left(1-\frac{2}{3}\right)^2-9=-9$,

故函數 $g(x)$ 的最大值和最小值分別為 16 和 -9。

注:原卷所附參考答案如下:

(a) 由題意知

$$\begin{cases}25a+5b+c=0\\ b=-4a\\ 4a+2b+c=-9\end{cases},$$

解得

$$a=1,b=-4,c=-5。$$

因此所求函數解析式為

$$f(x)=x^2-4x-5。$$

(b) $y=(x+1)^2-6=x^2+2x-5$;

(c) $g(x)=(3sinx)^2-4(3sinx)-5=(3sinx-2)^2-9$。

由於 $-3\leq 3sinx\leq 3$,$2\in[-3,3]$,函數 $g(x)$ 在 $3sinx=-3$ 處取得最大值,即

$$Maxg(x)=f(-3)=16\ 。$$

函數 $g(x)$ 在 $3sinx=2$ 處取得最小值,即

$$Ming(x)=f(2)=-9。$$

2. 設 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 是首項為 1 的等比數列。數列 $\{b_n\}_{n\geq 1}$ 滿足 $b_n=\frac{na_n}{4}$。已知 $a_1,4a_2,16a_3$ 成等差數列。

（a）求$\{a_n\}_{n\geq 1}$和$\{b_n\}_{n\geq 1}$的通項公式。（3 分）

（b）求$\{a_n\}_{n\geq 1}$的前 n 項和 S_n 及$\{b_n\}_{n\geq 1}$的前 n 項和 T_n。（5 分）

解：（a）$2\times 4a_2 = a_1 + 16a_3$，得 $8a_1q = a_1 + 16a_1q^2$，解得 $q = \dfrac{1}{4}$，

故 $a_n = 1\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1} = \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$，即 $b_n = \dfrac{n}{4}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1} = n\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n}$；

（b）$S_n = \dfrac{1\left(1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^n\right)}{1-\dfrac{1}{4}} = \dfrac{4}{3} - \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$，

$$T_n = 1\left(\frac{1}{4}\right) + 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{4}\right)^3 + \cdots + n\left(\frac{1}{4}\right)^n \qquad (1)$$

$$\frac{1}{4}T_n = 1\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{4}\right)^3 + \cdots + (n-1)\left(\frac{1}{4}\right)^n + n\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \qquad (2)$$

（1）－（2），得 $\dfrac{3}{4}T_n = \dfrac{1}{4} + \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{4}\right)^3 + \cdots + \left(\dfrac{1}{4}\right)^n - n\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}$，

$$\frac{3}{4}T_n = \frac{\frac{1}{4}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{4}} - n\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1},$$

$$T_n = \frac{4}{9} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} - \frac{n}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n}。$$

注：原卷所附參考答案如下：

（a）設 $a_n = a_1q^{q-1}$，由 $a_1, 4a_2, 16a_3$ 成等差數列知 $16a_3 + a_1 = 8a_2$，

即 $16a_1q^2 + a_1 = 8a_1q$。由於 $a_1 = 1$，可得 $q = \dfrac{1}{4}$。因此

$$a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}, b_n = \frac{n}{4^n}。$$

（b）由等比數列前 n 項和公式得，

$$S_n = \frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)。$$

由

$$T_n = \frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \frac{4}{4^4} + \cdots + \frac{n-1}{4^{n-1}} + \frac{n}{4^n} \qquad (1)$$

我們有

$$4T_n = 1 + \frac{2}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{4}{4^3} + \cdots + \frac{n}{4^{n-1}} \qquad (2)$$

（2）式減去（1）式得

$$3T_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \cdots + \frac{1}{4^{n-1}} - \frac{n}{4^n}。$$

因此

$$T_n = \frac{4}{9}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right) - \frac{n}{3 \cdot 4^n}。$$

3. 已知橢圓 $C: \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 (a > b > 0)$ 的離心率為$\frac{\sqrt{2}}{2}$,且點$(2\sqrt{2},4)$在 C 上,

（a）求 C 的方程;(3 分)

（b）設直線 $L: y = k_1 x + b$ 不通過原點 O 且不平行於坐標軸。直線 L 與 C 有兩個交點 A, B,線段 AB 的中點為 M,直線 OM 的斜率為 k_2,證明:$k_1 k_2 = -2$;(5 分)

解:（a）$\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,則 $c^2 = \frac{1}{2}a^2$。

因為 $a^2 = b^2 + c^2$,即 $a^2 = b^2 + \frac{1}{2}a^2$,

得 $a^2 = 2b^2$,則 C 的解析式為$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{2b^2} = 1$,

圖像過$(2\sqrt{2},4)$,即$\frac{8}{b^2} + \frac{16}{2b^2} = 1$,

解得 $b^2 = 16$,故解析式為$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{32} = 1$;

（b）C 的解析式為 $2x^2 + y^2 = 32$,設 A,B 的中點 M 的坐標為(x_0, y_0),

$$\begin{cases} 2x_1^2 + y_1^2 = 32 & (1) \\ 2x_2^2 + y_2^2 = 32 & (2) \end{cases}$$

(1) − (2) 得,$2(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) + (y_1 + y_2)(y_1 - y_2) = 0$,

由 $x_1 \neq x_2$,$2(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = 0$,

$2 \cdot 2x_0 + 2y_0 \cdot k_1 = 0$,即 $k_1 = -\frac{2x_0}{y_0}$,

而 $k_2 = k_{OM} = \frac{y_0 - 0}{x_0 - 0} = \frac{y_0}{x_0}$,故 $k_1 k_2 = -\frac{2x_0}{y_0} \cdot \frac{y_0}{x_0} = -2$;

注:原卷所附參考答案如下:

（a）由題意知 a 和 b 滿足

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{8}{b^2} + \frac{16}{a^2} = 1 \end{cases}$$

解得 $a^2 = 32$ 及 $b^2 = 16$。因此所求橢圓方程為

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{32} = 1。$$

(b) 聯立直線 $y = k_1 x + b$ 及橢圓$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{32} = 1$ 得

$$\frac{x^2}{16} + \frac{(k_1 x + b)^2}{32} = 1。$$

整理得

$$(2 + k_1^2)x^2 + 2k_1 bx + b^2 - 32 = 0。$$

線段 AB 的中點 $M(x_0, y_0)$ 的坐標為

$$x_0 = \frac{-k_1 b}{2 + k_1^2}, y_0 = \frac{2b}{2 + k_1^2}。$$

於是我們得到直線 OM 的斜率為

$$k_2 = \frac{-2}{k_1}。$$

因此,$k_1 k_2 = -2$ 。

4. (a) 把$\sqrt{3}cos\theta - sin\theta$ 以 $rcos(\theta + \beta)$ 的形式表示,並求$\sqrt{3}cos\theta - sin\theta$ 的取值範圍;(2 分)

(b) 求$\sqrt{3}cos\theta - sin\theta = -1$ 在 $0 \le \theta \le 2\pi$ 的解,答案要以弧度表示。(3 分)

(c) 如果$\sqrt{3}cos\theta - sin\theta = -\frac{1}{2}$,且 $0 \le \theta \le \pi$,求 $sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{12}\right)$;(3 分)

解:(a) $\sqrt{3}cos\theta - sin\theta = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}cos\theta - \frac{1}{2}sin\theta\right) = 2sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) = 2cos\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) \in [-2, 2]$;

(b) 由$\sqrt{3}cos\theta - sin\theta = 2sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) = -1$,得 $sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$,

得 $\theta - \frac{\pi}{3} = k\pi + (-1)^k \cdot arcsin\frac{1}{2} = k\pi + (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6}$,

得 $\theta = k\pi + (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}, k \in Z$,

又 $0 \le \theta \le 2\pi$,得 $k = 0$ 時,$\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$;得 $k = 1$ 時,$\theta = \pi - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{6}$;

(c) 由$\sqrt{3}cos\theta - sin\theta = -\frac{1}{2}$,得 $2sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) = -\frac{1}{2}$,得 $sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) = -\frac{1}{4}$

得 $sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{12}\right) = sin\,\dfrac{\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)}{2}$

$$= \pm\sqrt{\frac{1 - cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)\right]}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1 - sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)}{2}} = \pm\frac{\sqrt{10}}{4};$$

因為 $0 \leq \theta \leq \pi$，得 $\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{12} \in \left[\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{12}\right]$，得 $sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{10}}{4}$。

注：原卷所附參考答案如下：

（a）$\sqrt{3}cos\theta - sin\theta = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}cos\theta - \frac{1}{2}sin\theta\right) = 2\left(cos\,\frac{\pi}{6}cos\theta - sin\,\frac{\pi}{6}sin\theta\right)$

$= 2cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$。

由此知 $-2 \leq \sqrt{3}cos\theta - sin\theta \leq 2$。

（b）由（a）可知 $\sqrt{3}cos\theta - sin\theta = 2cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$。

由 $\sqrt{3}cos\theta - sin\theta = -1$，得 $cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$。

因為 $0 \leq \theta \leq 2\pi$，我們有 $\theta+\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}$ 或 $\frac{4\pi}{3}$，即 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{7\pi}{6}$。

（c）因為 $\sqrt{3}cos\theta - sin\theta = -\frac{1}{2}$，所以 $2cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$，即 $cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{4}$。

由二倍角公式得 $1-2sin^2\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{12}\right)=-\frac{1}{4}$，因此 $sin^2\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{12}\right)=\frac{5}{8}$。由於 $0 \leq \theta \leq \pi$，從而有 $0 \leq \frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{12} < \pi$，因此 $sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{12}\right)=\sqrt{\frac{5}{8}}=\frac{\sqrt{10}}{4}$。

5. 用數學歸納法證明對任意正整數 n，$3^{4n+2}+5^{2n+1}$ 能被 14 整除。（8 分）

證明：（1）當 $n=1$ 時，$3^{4+2}+5^{2+1}=854=14\times 61$，能被 14 整除，命題成立。

（2）假設當 $n=k$（k 為任意正整數）時，命題成立，即有 $3^{4k+2}+5^{2k+1}=14A$（$A \in Z$），

則當 $n=k+1$ 時，原式 $= 3^{4(k+1)+2}+5^{2(k+1)+1}$

$= 3^{4k+2+4}+5^{2k+1+2}$

$= 81\times 3^{4k+2}+25\times 5^{2k+1}$

$= 25\times 14A+15\times 3^{4k+2}$

$= 14(25A+4\times 3^{4k+2})$ 能被 14 整除

這說明當 $n=k+1$ 時，命題也成立，

由（1）（2）及數學歸納法得，當 $n \in N^*$ 時，，$3^{4n+2}+5^{2n+1}$ 能被 14 整除。

注：原卷所附參考答案如下：

證明：設 $S(n)$ 表示命題“$3^{4n+2}+5^{2n+1}$ 能被 14 整除”。

（1）當 $n=1$ 時，原式 $=3^{4+2}+5^{2+1}=3^6+5^3=729+125=854$，$854\div 14=61$，$S(1)$ 成立。

（2）假設 $n=k$（$k \in Z^+$）時，$S(n)$ 成立，即 $3^{4k+2}+5^{2k+1}$ 能被 14 整除。

當 $n=k+1(k\in Z^{+})$ 時,

$$\begin{aligned}&3^{4(k+1)+2}+5^{2(k+1)+1}\\&=3^{4k+4+2}+5^{2k+2+1}=3^{4}\cdot3^{4k+2}+5^{2}\cdot5^{2k+1}\\&=81\cdot3^{4k+2}+25\cdot5^{2k+1}=56\cdot3^{4k+2}+25\cdot3^{4k+2}+25\cdot5^{2k+1}\\&=56\cdot3^{4k+2}+25\cdot(3^{4k+2}+5^{2k+1})\end{aligned}$$

上式中 $56\cdot3^{4k+2}$ 可以被 14 整除,

且 $25\cdot(3^{4k+2}+5^{2k+1})$ 根據假設也可以被 14 整除,$S(k+1)$ 也成立。

由(1),(2)及數學歸納法,對任意正整數 n,$3^{4n+2}+5^{2n+1}$ 能被 14 整除。

四校聯考,對沒有參加保送(成功)的澳門數以千計的高三學子而言,挑戰與機遇并存,是又恨又愛同在,苦樂與共,痛並快樂著。安得廣廈千萬間,大庇天下寒士俱歡顏,風雨不動安如山!借用杜甫的感慨期待,送上我的誠摯祝福,希望諸多同學經歷風雨、終有所成、得償心願、鵬程萬里。

參考資料:

https://www.gaes.gov.mo/admission/unification

高等教育輔助辦公室“四校聯考”專頁。

作者簡介:

鄧海棠老師,2005 屆湖南師大數學教育碩士、2013 屆華東師大數學教育博士(獲優秀博士生獎學金)。中國奧林匹克數學二級、一級教練員,屢次獲得數學競賽優秀輔導員、優秀教練榮譽。多次獲澳門教育暨青年局邀請擔任教師公開示範課評審委員。多年來一直為澳門“匯業杯”年度知識競賽、“三維杯”、“環亞太杯”、“金蓮花杯”、“數學大王”等等國際數學邀請賽命題。個人專著有:《北楓曉雨》、《南嶺知春》、《薪火相傳育英才——數學教育研思集》、《“數學的研究性學習”之典型範例選講》。合著有:《兩岸三地十年高考數學試題詳解》(上下冊)、《升大數學教程》(上下冊)、《澳門基力數學探知》(初中共 6 冊)。參與澳門“初中數學基力”立法、澳門“高中數學基力”立法、澳門“初中教育階段數學課程指引”的顧問工作。澳門數學教育研究學會、澳門數學奧林匹克學會兩會秘書長。澳門中華教育會會員,澳門教師志願者協會永久會員。國家教育部舉辦的第 28 屆華夏園丁大聯歡(2023)活動論文徵集中,經專家評審,獲得優秀論文獎。

注重書本和試題研究,提高複習效率

—— 以課本和 2023 年廣州市普通高中畢業班綜合測試(一)的一道概率題為例

廣東省清遠市清新區第一中學　譚麗君

(本文獲清遠市清新區優秀論文評選一等獎)

摘要:數學是高考成功的關鍵,教師在數學教育中應該運用怎樣的方式提高學生複習效率呢?近年來,已經越來越多的一線數學教師認識到題海戰術不是解決問題的最好方法. 研究教材和試題是提高學生複習成效的有效途徑、是教師水準提升的最佳方法. 教師要注重課本和試題研究,尤其是高三教師,還要學會將題型歸類.

關鍵字:教材研究 試題研究 一題多解 試題推廣 瑪律可夫鏈

教師通過研究課本和經典試題,提升個人的選題、命題能力,從而引導學生從命題人角度分析思考問題,提高學生高考複習效率. 本文以課本和2023 年高考一道概率解答題為例,從題目立意、課本原題、一題多變、推廣等方面做較全面的研究.

一、試題與立意

(2023 年普通高等學校招生全國統一考試,新課標 Ⅰ 卷數學)21. 甲、乙兩人投籃,每次由其中一人投籃,規則如下:若命中則此人繼續投籃,若未命中則換為對方投籃. 無論之前投籃情況如何,甲每次投籃的命中率均為0. 6,乙每次投籃的命中率均為0. 8. 由抽籤確定第 1 次投籃的人選,第 1 次投籃的人是甲、乙的概率各為 0. 5.

(1) 求第 2 次投籃的人是乙的概率;

(2) 求第 i 次投籃的人是甲的概率;

(3) 已知:若隨機變數 X_i 服從兩點分佈,且 $P(X_i = 1) = 1 - P(X_i = 0) = q_i, i = 1,2,\cdots n$,則$E(\sum_{n}^{i=1} X_i) = \sum_{n}^{i=1} q_i$. 記前 n 次(即從第1 次到第 n 次投籃) 中甲投籃的次數為 Y,求 $E(Y)$.

分析:本題第一問直接考查全概率公式的應用,後兩問的解題關鍵是根據題意找到遞推式,然後根據數列的基本知識求解. 詳細解答如下:

【小問 1 詳解】

記“第 i 次投籃的人是甲”為事件 A_i,“第 i 次投籃的人是乙”為事件 B_i,

所以,$P(B_2)=P(A_1B_2)+P(B_1B_2)=P(A_1)P(B_2|A_1)+P(B_1)P(B_2|B_1)$

$=0.5\times(1-0.6)+0.5\times0.8=0.6$.

【小問 2 詳解】

設 $P(A_i)=p_i$,依題可知,$P(B_i)=1-p_i$,則

$P(A_{i+1})=P(A_iA_{i+1})=P(A_i)P(A_{i+1}|A_i)+P(B_i)P(A_{i+1}|B_i)$,

即 $p_{i+1}=0.6p_i+(1-0.8)\times(1-p_i)=0.4p_i+0.2$,

構造等比數列$\{p_i+\lambda\}$,設 $p_{i+1}+\lambda=\frac{2}{5}(p_i+\lambda)$,解得 $\lambda=-\frac{1}{3}$,

則 $p_{i+1}-\frac{1}{3}=\frac{2}{5}\left(p_i-\frac{1}{3}\right)$,

又 $p_1=\frac{1}{2}$,$p_1-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$,所以$\left\{p_i-\frac{1}{3}\right\}$是首項為$\frac{1}{6}$,公比為$\frac{2}{5}$的等比數列,

即 $p_i-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\times\left(\frac{2}{5}\right)^{i-1}$,$p_i=\frac{1}{6}\times\left(\frac{2}{5}\right)^{i-1}+\frac{1}{3}$.

【小問 3 詳解】

因為 $p_i=\frac{1}{6}\times\left(\frac{2}{5}\right)^{i-1}+\frac{1}{3}$,$i=1,2,\cdots,n$,所以當 $n\in N^*$ 時,

$$E(Y)=p_1+p_2+\cdots+p_n=\frac{1}{6}\times\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1-\frac{2}{5}}+\frac{n}{3}=\frac{5}{18}\left[1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right]+\frac{n}{3},$$

故 $E(Y)=\frac{5}{18}\left[1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right]+\frac{n}{3}$.

評注:本題第一問直接考查全概率公式的應用,後兩問的解題關鍵是根據題意找到遞推式,然後根據數列的基本知識求解.

二、課本原題

人教 A 版《選擇性必修第三冊》的第 91 頁第 10 題:

10. 甲、乙、丙三人相互做傳球訓練,第 1 次由甲將球傳出,每次傳球時,傳球者都等可能地將球傳給另外兩個人中的任何一人,求 n 次傳球後球在甲手中的概率.

分析:記 A_n 表示事件“經過 n 次傳球後,球在甲的手中”,設 n 次傳球後球在甲手中的概率為 p_n,得到 $p_1=0$,$A_{n+1}=\overline{A_n}\cdot A_{n+1}+A_n\cdot A_{n+1}$,化簡整理得 $p_{n+1}=-\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{2}$,$n=1,2,3,\cdots$,即 $p_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}(p_n-\frac{1}{3})$,結合等比數列的通項公式,即可求解.

【詳解】記 A_n 表示事件"經過 n 次傳球後,球在甲的手中",

設 n 次傳球後球在甲手中的概率為 $p_n, n = 1,2,3,\cdots,n$,

則有 $p_1 = 0, A_{n+1} = \overline{A_n} \cdot A_{n+1} + A_n \cdot A_{n+1}$,

所以 $p_{n+1} = P(\overline{A_n} \cdot A_{n+1} + A_n \cdot A_{n+1}) = P(\overline{A_n} \cdot A_{n+1}) + P(A_n \cdot A_{n+1})$

$P(\overline{A_n}) \cdot P(A_{n+1} \mid \overline{A_n}) + P(A_n) \cdot P(A_{n+1} \mid A_n) = (1 - p_n) \cdot \frac{1}{2} + p_n \cdot 0 = \frac{1}{2}(1 - p_n)$,即 $p_{n+1} = -\frac{1}{2}p_n + \frac{1}{2}, n = 1,2,3,\cdots$,所以 $p_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}(p_n - \frac{1}{3})$,且 $p_1 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$,所以數列 $\{p_n - \frac{1}{3}\}$ 表示以 $-\frac{1}{3}$ 為首項,$-\frac{1}{2}$ 為公比的等比數列,所以 $p_n - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3} \times (-\frac{1}{2})^{n-1}$,所以 $p_n = -\frac{1}{3} \times (-\frac{1}{2})^{n-1} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\left[1 - (-1)^n \cdot \frac{1}{2^{n-1}}\right]$.

即 n 次傳球後球在甲手中的概率是 $\frac{1}{3}\left[1 - (-1)^n \cdot \frac{1}{2^{n-1}}\right]$.

評注:本題可以先直接應用全概率公式,解題關鍵是根據題意找到遞推式,然後根據數列的基本知識求解,需要有較強的題型觀察力.

三、一題多變

以上概率題也可以從以下試卷看到類似的變式:

變式1:2023年廣州市普通高中畢業班綜合測試(一)第20.(12分)為了拓展學生的知識面,提高學生對航空航太科技的興趣,培養學生良好的科學素養.某校組織學生參加航空航太科普知識答題競賽,每位參賽學生答題若干次.答題賦分方法如下:第1次答題,答對得20分,答錯得10分;從第2次答題開始,答對則獲得上一次答題得分的兩倍,答錯得10分.學生甲參加答題競賽,每次答對的概率為 $\frac{3}{4}$,各次答題結果互不影響.(1)求甲前3次答題得分之和為40分的概率;(2)記甲第 i 次答題所得分數 $X_i(i \in N^*)$ 的數學期望為 $E(X_i)$.

① 寫出 $E(X_{i+1})$ 與 $E(X_i)$ 滿足的等量關係式(直接寫出結果,不必證明);

② 若 $E(X_i) > 100$,求 i 的最小值.

分析:(1)由甲前3次答題得分之和為40分的事件是甲前3次答題中恰答對一次的事件,再利用相互獨立事件概率的乘法公式計算作答.

(2)① 求出 $E(X_1)$,再分析、寫出 $E(X_{i-1})$ 與 $E(X_i)$ 滿足的等量關係式作答;② 利用構造法求出 $E(X_i)$ 的通項,列出不等式並結合單調性作答.

【小問1詳解】

甲前3次答題得分之和為40分的事件是:甲前3次答題中僅只答對一次的事件,所以甲前3次答題得分之和為40分的概率 $P(A) = C_3^1 \times \frac{3}{4} \times (1 - \frac{3}{4})^2 = \frac{9}{64}$.

【小問 2 詳解】

① 甲第1次答題得20分、10分的概率分別為$\frac{3}{4}$,$\frac{1}{4}$,則$E(X_1)=20\times\frac{3}{4}+10\times\frac{1}{4}=\frac{35}{2}$,

甲第2次答題得40分、20分、10分的概率分別為$\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}$,$\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}$,$\frac{1}{4}$,

則$E(X_2)=40\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}+20\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}+10\times\frac{1}{4}=\frac{115}{4}$,顯然$E(X_2)=2(20\times\frac{3}{4}+10\times\frac{1}{4})\times\frac{3}{4}+10\times\frac{1}{4}=\frac{3}{2}E(X_1)+\frac{5}{2}$,

$i\in N^*$,$i\geq 2$,甲第$i-1$次答題所得分數X_{i-1}的數學期望為$E(X_{i-1})$,

因此第i次答對題所得分數為$2E(X_{i-1})$,答錯題所得分數為10分,其概率分別為$\frac{3}{4}$,$\frac{1}{4}$,於是甲第i次答題所得分數X_i的數學期望為$E(X_i)=2E(X_{i-1})\times\frac{3}{4}+10\times\frac{1}{4}=\frac{3}{2}E(X_{i-1})+\frac{5}{2}$,所以$E(X_{i-1})$與滿足$E(X_i)$的等量關係式是:$E(X_i)=\frac{3}{2}E(X_{i-1})+\frac{5}{2}$,$i\in N^*$,$i\geq 2$,且$E(X_1)=\frac{35}{2}$;② 由 ① 知,$E(X_1)=\frac{35}{2}$,當時$i\in N^*$,$i\geq 2$時,$E(X_i)+5=\frac{3}{2}[E(X_{i-1})+5]$,而$E(X_1)+5=\frac{45}{2}$,因此數列$\{E(X_1)+5\}$以$\frac{45}{2}$為首項,$\frac{3}{2}$為公比的等比數列,$E(X_i)+5=\frac{45}{2}\times(\frac{3}{2})^{i-1}=15\times(\frac{3}{2})^i$,於是$E(X_i)=15\times(\frac{3}{2})^i-5$,由$15\times(\frac{3}{2})^i-5>100$得:$(\frac{3}{2})^i>7$,顯然數列$\{(\frac{3}{2})^i\}$是遞增數列,而$(\frac{3}{2})^4=\frac{81}{16}<7$,$(\frac{3}{2})^5=\frac{243}{32}>7$,則有正整數$i_{min}$,所以$i$的最小值是5.

變式 2:衡水高二級期中考試的20. 某超市開展購物抽獎送積分活動,每位顧客可以參加$n(n\in N^*$,且$n\geq 2)$次抽獎,每次中獎的概率為$\frac{1}{3}$,不中獎的概率為$\frac{2}{3}$,且各次抽獎相互獨立. 規定第1次抽獎時,若中獎則得10分,否則得5分. 第2次抽獎,從以下兩個方案中任選一個;

方案 ① :若中獎則得30分,否則得0分;

方案 ② :若中獎則獲得上一次抽獎得分的兩倍,否則得5分.

第3次開始執行第2次抽獎所選方案,直到抽獎結束.

(1) 如果$n=2$,以抽獎的累計積分的期望值為決策依據,顧客甲應該選擇哪一個方案?並說明理由;

(2) 記顧客甲第i次獲得的分數為$X_i(i=1,2,\cdots,n)$,並且選擇方案 ②. 請直接寫出$E(X_{i+1})$與$E(X_i)$的遞推關係式,並求$E(X_8)$的值.(精確到0.1,參考資料:$\left(\frac{2}{3}\right)^7\approx 0.059$.)

【詳解】解:若甲第2次抽獎選方案 ①,兩次抽獎累計積分為ξ,則ξ的可能取值為40,

35,10,5. $P(\xi=40)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$,$P(\xi=35)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$,$P(\xi=10)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$,$P(\xi=5)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$, 所以 $E(\xi)=\frac{40}{9}+\frac{70}{9}+\frac{20}{9}+\frac{20}{9}=\frac{150}{9}$.

若甲第2次抽獎選方案②,兩次抽獎累計積分為 η,則 η 的可能取值為30,15,10,則 $P(\eta=30)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$,$P(\eta=15)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$,$P(\eta=10)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$,$E(\eta)=\frac{30}{9}+\frac{60}{9}+\frac{40}{9}=\frac{130}{9}$,因為 $E(\xi)>E(\eta)$,所以應選擇方案①.

【小問2詳解】依題意得 $E(X_{i+1})=\frac{2}{3}E(X_i)+\frac{10}{3}$,$X_1$ 的可能取值為10,5 其分佈列為

X_1	10	5
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

所以 $E(X_1)=\frac{20}{3}$,則 $E(X_1)-10=-\frac{10}{3}$,

由 $E(X_{i+1})=\frac{2}{3}E(X_i)+\frac{10}{3}$ 得 $E(X_{i+1})-10=\frac{2}{3}[E(X_i)-10]$,

所以 $\{E(X_i)-10\}$ 為等比數列. 其中首項為 $-\frac{10}{3}$,公比為$\frac{2}{3}$.

所 $E(X_8)-10=-\frac{10}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^7$ 以,故 $E(X_8)=-\frac{10}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^7+10\approx 9.8$.

四、試題推廣

推廣1:衡水卷高二三調的16. 杜牧《羊欄浦夜陪安會》的詩句中“球來香袖依稀暖,酒凸觥心泛豔光” 描述的是唐代酒宴上的助興遊戲“擊鼓傳花”,也稱傳彩球. 遊戲規則為:鼓響時,眾人開始依次傳花,至鼓停為止,此時花在誰手中,誰就上臺表演節目. 甲、乙、丙三人玩擊鼓傳花,鼓響時,第1次由甲將花傳出,每次傳花時,傳花者都等可能地將花傳給另外兩人中的任何一人,經過8次傳遞後,花又在甲手中的概率為________.

【答案】$\frac{43}{128}$

【解析】設第 n 次傳球後球在甲手中的概率為 P_n,$n\in N^*$,

則 $P_{n+1}=P_n\times 0+(1-P_n)\times\frac{1}{2}$,得 $P_{n+1}=-\frac{1}{2}P_n+\frac{1}{2}$,$P_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(P_n-\frac{1}{3}\right)$,

所以數列$\left\{P_n-\frac{1}{3}\right\}$是以 $-\frac{1}{3}$ 為首項, 公比為 $-\frac{1}{2}$ 的等比數列, 所以 $P_n-\frac{1}{3}=-$

$\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,即 $P_n=-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}$,所以 $P_8=-\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{7}+\frac{1}{3}=\frac{43}{128}$. 故答案為:$\frac{43}{128}$

點評:增加了數學文化,實現了五育並舉.

推廣 2:2022 年卡達世界盃決賽於當地時間 12 月 18 日進行,最終阿根廷通過點球大戰總比分 7:5 戰勝法國,奪得冠軍. 根據比賽規則:淘汰賽階段常規比賽時間為 90 分鐘,若在 90 分鐘結束時進球數持平,需進行 30 分鐘的加時賽,若加時賽仍是平局,則採用"點球大戰"的方式決定勝負. "點球大戰"的規則如下:

① 兩隊各派 5 名隊員,雙方輪流踢點球,累計進球個數多者勝;

② 如果在踢滿 5 輪前,一隊的進球數已多於另一隊踢滿 5 輪最多可能射中的球數,則不需要再踢(例如:第 4 輪結束時,雙方"點球大戰"的進球數比為 2:0,則不需要再踢第 5 輪);

③ 若前 5 輪"點球大戰"中雙方進球數持平,則從第 6 輪起,雙方每輪各派 1 人踢點球,若均進球或均不進球,則繼續下一輪,直到出現一方進球另一方不進球的情況,進球方勝出.

(1) 假設踢點球的球員等可能地隨機選擇球門的左、中、右三個方向射門,門將也會等可能地選擇球門的左、中、右三個方向來撲點球,而且門將即使方向判斷正確也只有一的可能性將球撲出. 若球員射門均在門內,在一次"點球大戰"中,求門將在前 4 次撲出點球的個數 X 的分佈列及數學期望;

(2) 現有甲、乙兩隊在決賽中相遇,常規賽和加時賽後雙方 0:0 戰平,需要通過"點球大戰"來決定冠軍. 設甲隊每名隊員射進點球的概率均為 $\frac{3}{4}$,乙隊每名隊員射進點球的概率均為 $\frac{2}{3}$,假設每輪點球中進球與否互不影響,各輪結果也互不影響.

(i) 若甲隊先踢點球,求在第 3 輪結束時,甲隊踢進了 3 個球並獲得冠軍的概率;(ii) 求"點球大戰"在第 7 輪結束,且乙隊以 6:5 獲得冠軍的概率.

點評:增加了體育與勞動教育,實現了五育並舉.

以上題目可以總結出一個關鍵知識點:瑪律可夫鏈(瑪律可夫鏈是一種統計概率模型,常用於描述一個系統隨時間演變的概率分佈。它最早被用於描述天氣預報,但是現在已經廣泛應用於許多領域). 教師在複習的過程中需要高瞻遠矚,統領整個知識板塊,帶領學生以高觀點來學習數學. 可以給學生介紹瑪律可夫鏈,給學有餘地的學生一個上升的空間. 概率的題型還有以下幾種:瑪律科夫鏈基礎模型、瑪律科夫鏈之傳球模型、遊走模式、藥物試驗模式、商場促銷、證明概率、期望等不等式、模球與射擊模型. 高三教學過程中可以仿照以上模式進行.

結束語:

誠然試題研究的過程是艱辛的,但結果是喜人的. 通過試題研究,讓教師品嘗到教學的

樂趣,提升了教學的境界;讓學生進一步學會從命題人的角度思考問題的本質,提高了複習備考效率.

参考文獻:

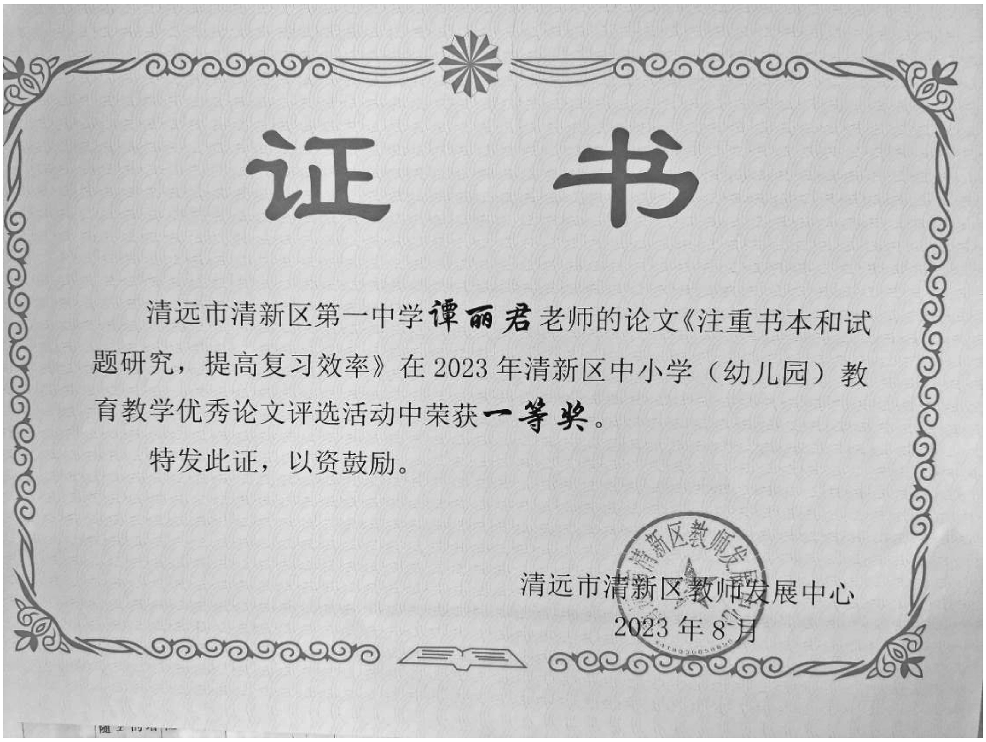
[1]武惠傑.基於社會資本整合的企業顧客獲取與維繫研究[D].青島:中國海洋大學,2009:1－2.

[2]張進智,胡正明.顧客獲取驅動要素實證研究[J].山東社會科學.2008,(10).

[3]梁靜國.基於粗集理論的顧客購買行為預測[J].統計與決策.2006,(1).

[4]魏薇 趙思林 .2020 年全國卷Ⅲ數列試題的思路分析與推廣[J].教學參謀,2020(12):60.

附:



澳門四校聯考數學科附加卷

——考試沿革及試題評析(上)

華東師範大學【數學科學學院】 劉泓智

(本文於2022年榮獲廣東省初等數學學會2021年度初等數學研究優秀成果一等獎)

【摘要】本文介紹了澳門地區的大學數學科入學考試—澳門四高校聯合入學考試(語言科及數學科)(簡稱“四校聯考”)數學附加卷的由來以及分析了試卷整體的內容與結構,再通過近六年的這些試卷,剖析當中部分的試題及作進一步的探討和歸納.

【關鍵詞】澳門四校聯考、數學附加卷、試題分析、升學考試

【作者簡介】劉泓智,男,2002年生,澳門人,現就讀於華東師範大學數學與應用數學專業四年級,主要研究數學教育,對關於澳門數學教育及數學建模教育的課題感興趣. 電子郵箱:lauwangchi.edu@gmail.com

1 歷史沿革

澳門四校聯考作為澳門高中畢業生的一個升學考試,自2017年開始,以“澳門大學”、“澳門理工學院”、“澳門科技大學”、“澳門旅遊學院”等四間大學的一個聯合入學考試.[1]

透過報考科系所對應的考試科目要求進行考核. 其中,數學附加卷(JM02)為理工科系要求考核的科目[1],其試卷題目的前身可追溯於聯考前,“澳門大學”入學試數學卷A(M101)的部份題目,當時其數學卷A是為報考科技類、數理類的考生而設,目的是評核考生的數學能力[2],現時的數學附加卷也同理. 但實際上,四校聯考中,也有一門考核科目稱為數學正卷(JM01)[1],其對象是報考工商管理、社會與人文、經濟學等對課程數學要求較低的考生而設的.

由此可見,數學附加卷被稱為“附加卷”的原因,也離不開它考查數學的能力要求是較高的.

2 試題規格

考試時間會安排時限為 1 小時，題型會是五道解答題、每題 20 分，可任選三題作答，全卷滿分為 60 分[3]. 特別要注意的是，這五道題是以結構式問題，或稱傳統題(conventional questions)的形式呈現. 這類問題的特色是，題目綜合性較強，考核內容知識點較多較廣，因此也有一定難度。為降低難度，命題者在構題時，會提供很多個小問，這些子問題又有著緊密的聯繫，逐步誘導學生解題，而且，對於數學演繹要求高，難度大的問題也會提供提示(見 4)，以降低難度.

實際上，通過文本分析，這種結構式問題是很類似於香港公開考試的試題形式，其考核內容與難度可推測大約是舊制會考(HKCEE)附加數學(Additional Mathematics)的試題，且應為 2001 年以前的題目，因當時香港教育署在 2000 年時對附加數學科的課程文件進行了修訂，新課程文件的內容範圍有刪除或減少其中一些課題如圓錐曲線(Conic Section)及複數(Complex Number)等這些澳門地區仍需考核的內容[4]，有興趣的讀者可以搜尋有關資料進行比對。但就數學科而言，香港公開考試的題目架構可追溯於英國高級程度會考(GCE A－level)考試的題目形式. 在以前香港是英國的殖民地時，香港教育司署建立了自己當地的公開考試體系，建立公開試體系的緣由也確實與當地升學及赴英升學有關[5]。其次，澳門較多的學校在七、八年代起採用了香港出版的教科書，所以其後 90 年代初澳門大學入學試作為澳門首個本地的升學考試[6]，也有仿效了鄰埠香港地區的試卷，其中每道解答題的考點和知識點，都主要圍繞一個大課題，每個小問也是根據前述課題的知識點作考查. 對於具體數學附加卷的考試大綱可見文獻[7].

3 試題分佈

至 2017 年開始，四校聯考已舉辦了七年，我們將前六年中每一年的試題，按考試大綱[7-8]的知識點作分佈.

表 1　數學附加卷的試題內容分佈[9-14]

	2017	2018	2019	2020	2021	2022
立體幾何	√	√	√	√	√	√
基本微積分、曲線的描繪	√	√	√	√	√	√
解析幾何	√	√	√	√	√	√
複數與三角	√		√	√		√
線性方程組	√	√	√	√	√	√
數列、不等式、多項式(正卷推廣)		√				
三角函數(正卷推廣)					√	

不難看見，立體幾何、微積分及作圖、解析幾何、線性方程組四個課題，從不缺席，每一年都有所考核，其次是複數的內容．較少出現的也就是 2018 年的數列、不等式、多項式的解答題及 2021 年的三角解答題，這兩題都是數學正卷的範圍稍作推廣的題目，雖然這類題目較不常見，但別忘了本試卷是採用五選三的形式，這樣可以讓學生自行選擇要做的題，相對較個性化，而且也是降低試卷難度的一種方式.

4　試題評析

現在，我們來看看幾道附加卷上的試題.

4.1　立體幾何

4.1.1　試題舉例

1. (四校附加卷 2017/2018 第 1 題)

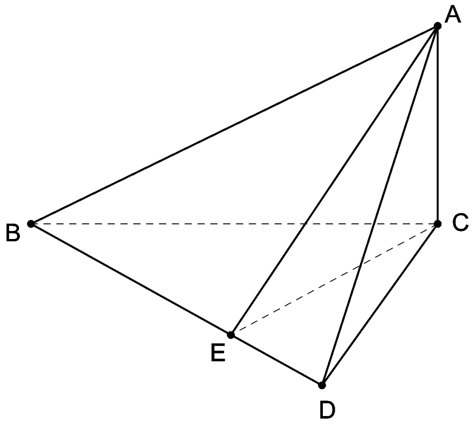


圖4.1

如上圖所示，$A-BCD$ 為一三棱錐，AC 垂直平面 BCD，$\angle BCD=\dfrac{\pi}{2}$，

$|AC|=|CD|=1$，$|BC|=2$．設 E 為直線 BD 上的一點，使得 AE 垂直 BD.

(a)(i) 求點 B 至直線 AD 的距離．［提示：先證明 $|BA|=|BD|$.］（7 分）

(ii) 求點 C 至平面 ABD 的距離．（5 分）

(b)(i) 證明 CE 垂直 BD．（2 分）

(ii) 求二面角 $A-BD-C$，答案以 tan^{-1} 表示．［提示：求 $|EC|$.］（6 分）

命題者有根據試題提供了解答，題目來源及具體解答可參見文獻[9-14]，本文就不詳細列出解題步驟了，但會分析解答的過程思路(下文同).

［**解答分析**］

(a)(i) 分析 ΔABC、ΔBCD 可得長度 $|AB|$、$|BD|$，再分析 ΔBAD 可得為等腰三角形，運用等腰三角形「三線合一」的性質，取 F 為 AD 的中點，通過計算 $|AF|$ 繼而求

得點 B 至直線 AD 的距離 $|BF|$；

(ii) 通過題目的已知條件及$(a)(i)$部的結論，考慮三棱錐不同底面的表示形式 $A-BCD$ 及 $C-ABD$，因為是同一個三棱錐，故其體積相等，即 $V_{A-BCD}=V_{C-ABD}$. 由棱錐的體積公式 $V_{棱錐}=\frac{1}{3}S_{底}\cdot h$，代入相關數值計算即可求得點 C 至平面 ABD 的距離.

$(b)(i)$ 由線面垂直的性質，結合題設與前述所得出的線段垂直關係，利用三垂線定理即得 $CE\perp BD$；

(ii) 根據二面角的平面角的定義，結合$(b)(i)$部的結論，可知 $\angle AEC$ 為所求，要注意其答案以 tan^{-1} 表示，另由求 $|EC|$ 的提示即可分析 $Rt\Delta AEC$ 的正切值，繼而求得 $\angle AEC=tan^{-1}\frac{|AC|}{|CE|}=tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$.

［點評］

比對近年內地高考的關於立體幾何的解答題，四校聯考的立體幾何題側重於計算，相對於抽象的空間幾何關係之證明較少，大多以通過分析每個平面的幾何圖形，計算當中的幾何量並加以與其他平面的圖形作聯繫. 當中也有用到立體圖形體積“等積變換”的計算方法來求出一些較難計算的線面距離. 比較其他鄰近地區例如香港、臺灣關於立體幾何的試題，附加卷上的立體幾何題目也能突顯澳門特有的命題風格.

實際上，本題也可以使用空間向量法建立空間直角坐標系處理，筆者在此提供這個方法的解答.

［另解］

$\because AC$ 垂直平面 BCD，$\angle BCD=\frac{\pi}{2}$（已知）

$\therefore AC\perp BC, AC\perp CD, BC\perp CD$（垂直平面的性質、垂直定義）

故取點 C 為原點，以 $\overrightarrow{CD}$ 為 x 軸、$\overrightarrow{CB}$ 為 y 軸、$\overrightarrow{CA}$ 為 z 軸建立空間直角坐標系（圖 4.2）.

又 $\because |AC|=|CD|=1$，$|BC|=2$（已知）

$\therefore$ 有坐標 $C(0,0,0), D(1,0,0), B(0,2,0), A(0,0,1)$.

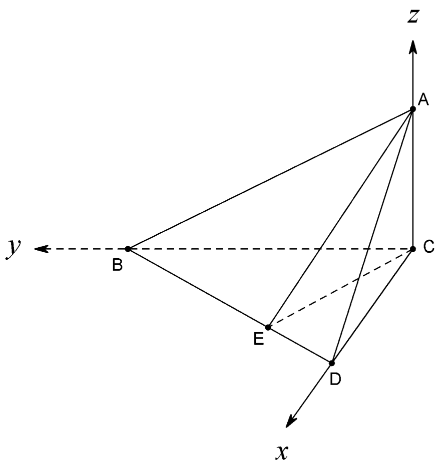


圖4.2

$(a)(i)$ 故有 $\overrightarrow{AD}=(1,0,-1)$，$\overrightarrow{BD}=(1,-2,0)$（空間向量的坐標表示）

作 $BF\perp AD$ 於 F，則有 $d(B,AD)=|BF|=\sqrt{|BD|^2-|FD|^2}$（勾股定理）

$$=\sqrt{|\overrightarrow{BD}|^2-|Prj_{\overrightarrow{AD}}\overrightarrow{BD}|^2}=\sqrt{|\overrightarrow{BD}|^2-|\overrightarrow{BC}|^2\cdot|cos<\overrightarrow{BC},\overrightarrow{n}>|^2}$$

$$=\sqrt{|\overrightarrow{BD}|^2-\frac{|\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DB}|}{|\overrightarrow{AD}|^2}}=\sqrt{(\sqrt{5})^2-\frac{1^2}{(\sqrt{2})^2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2};$$

（空間中的點線距離、空間向量的數量積與模）

(ii) 另有$\overrightarrow{AB}=(0,2,-1)$，$\overrightarrow{AD}=(1,0,-1)$（空間向量的坐標表示）

設平面 ABD 的法向量為$\overrightarrow{n}=(x,y,z)$，$x,y,z\in R$，則有$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AB}=2y-z=0$、$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AD}=x-z=0$（法向量的定義、空間向量的坐標數量積），取 $y=1$，則 $z=2$，$x=2$，故$\overrightarrow{n}=(2,1,2)$. 又$\overrightarrow{BC}=(0,-2,0)$，

此時 $d(C,ABD)=|Prj_{\overrightarrow{n}}\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{BC}|\cdot|\cos<\overrightarrow{BC},\overrightarrow{n}>|=|\overrightarrow{BC}|\cdot\dfrac{|\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{BC}|\cdot|\overrightarrow{n}|}=\dfrac{|\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{n}|}=\dfrac{|-2|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\dfrac{2}{3}$.（空間中的線面距離、空間向量的數量積與模）

(b) (i) 設點 E 的坐標為 $E(x,y,z)$，則有$\overrightarrow{CE}=(x,y,z)$、$\overrightarrow{AE}=(x,y,z-1)$（空間向量的坐標表示）. 而 $AE\perp BD$（已知），則有$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}=x-2y=0$（兩向量垂直時數量積為 0）.

因此$\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{BD}=x-2y=0$，這說明 $CE\perp BD$.

(ii) 由$(a)(ii)$部可知，$\overrightarrow{n}=(2,1,2)$為平面$ABD$的法向量，另易知平面$BCD$的法向量為$\overrightarrow{e_z}=(0,0,1)$（平面 BCD 為 xy 平面），故二面角 $A-BD-C$ 的大小為 $<\overrightarrow{n},\overrightarrow{e_z}>$，而$|\cos<\overrightarrow{n},\overrightarrow{e_z}>|=\dfrac{|\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{e_z}|}{|\overrightarrow{n}|\cdot|\overrightarrow{e_z}|}=\dfrac{2}{(\sqrt{3})^2\cdot 1}=\dfrac{2}{3}$（兩空間平面的法向量與二面角）. 因此由直角三角形法則，可得$\tan<\overrightarrow{n},\overrightarrow{e_z}>=\dfrac{\sqrt{3^2-2^2}}{2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，故$<\overrightarrow{n},\overrightarrow{e_z}>=\tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)$為所求.

［**說明**］

建立坐標系結合向量去求解空間中各幾何量顯然有一定的優越性，它可以一個知識體系獨力完成而不需用到繁複的幾何證明. 但鑒於附加卷或是以前的澳門大學入學試數學卷 A 都沒有對向量這部分作太大的要求，而且基於早年頒佈的基本學歷要求[15] 的框架下，澳門大部分中學都未必教授空間向量的內容. 因此從題目角度出發，更應該的是針對於考核考生對空間中點、線、面的關係以及空間幾何體的理解.

4.1.2 **變式思考與歸納**

接下來，我們再參考其他年份的附加卷上關於立體幾何的試題.

2.（四校附加卷 2019/2020 第 1 題）

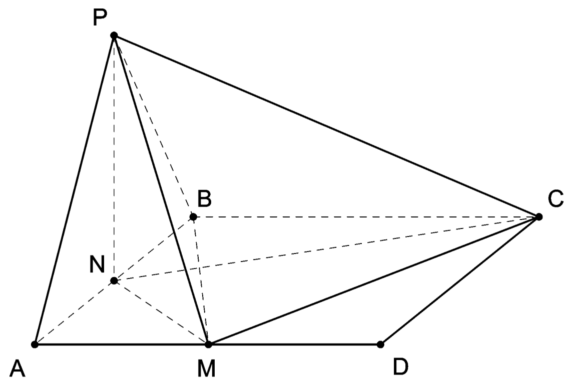


圖4.3

如上圖所示，PAB 是邊長為1的等邊三角形，$ABCD$ 是一長方形，$|BC| = \sqrt{2}$，平面 PAB 與平面 ABC 垂直，M 和 N 分別為 AD 和 AB 的中點.

（a）（i）證明 PN 垂直平面 ABC，從而求三棱錐 $P-BCM$ 的體積. （5 分）

（ii）求三角形 PBM 的面積，從而求點 C 至平面 PBM 的距離. （6 分）

（b）（i）證明 $\angle NMC$ 是一直角.［提示：考慮三角形 NMC 的邊長.］（4 分）

（ii）求二面角 $N-MC-P$.［提示：證明 $PM \perp MC$.］（5 分）

3.（四校附加卷 2021/2022 第 1 題）

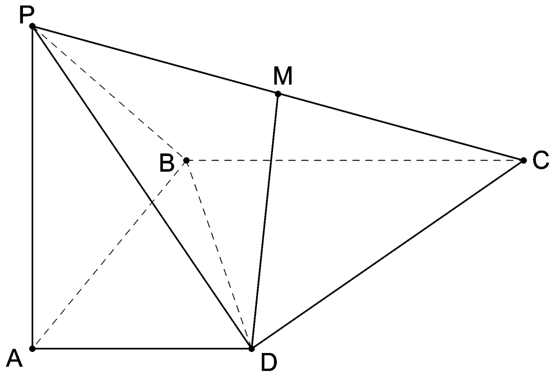


圖4.4

如上圖所示，$ABCD$ 為梯形，PC 垂直 $ABCD$，$\angle DAB = \angle ABC = \frac{\pi}{2}\pi$，$|AD| = 1$，$|PA| = |AB| = |BC| = 2$. 設 M 為線段 PC 的中點.

（a）（i）求三角形 PBD 的面積. （6 分）

（ii）求三棱錐 $P-ABD$ 的體積，從而求點 A 至平面 PBD 的距離. （4 分）

（b）證明

（i）CB 垂直平面 PAB. （3 分）

（ii）DM 與平面 PAB 平行.

［提示：設 N 為 PB 的中點. 證明 $ADMN$ 是一長方形.］（7 分）

結合這兩題連同上題，不難發掘出試題上的共性，考卷內容常考核學生對：

（1）題設所給的已知量分析對應的平面之圖形並轉化為平面幾何的計算並結合其他平面之圖形作溝通；

（2）對於求點到平面的距離將慣常以等積變換的技巧求出而非作參考線處理等繁瑣方法；

（3）對於證明線面垂直需運用題設的各種線段或平面之間垂直關係，按判定定理證得命題；

（4）對二面角的求法主以利用三垂線定理推導出其對應的平面角，利用反三角函數結合線段長度求得.

另一方面，筆者注意到，這五年的立體幾何題，全部都可以建立空間直角坐標系求解（以題 2、3 為例，題 2 可取點 N 為原點，以 $\overrightarrow{NA}$ 為 x 軸、過點 N 與 $\overrightarrow{CB}$ 平行的軸為 y 軸、$\overrightarrow{NP}$ 為 z 軸，題 3 可取點 A 為原點，以 $\overrightarrow{AD}$ 為 x 軸、$\overrightarrow{AB}$ 為 y 軸、$\overrightarrow{AP}$ 為 z 軸），有理由相信命題人想保留從空間向量角度出發的解題方法，讓學生能夠多一個解題的思路和方向.

4.2　基本微積分及曲線的描繪

4.2.1　試題舉例

4.（四校附加卷 2020/2021 第 2 題）

（a）已知函數 $f(x) = x^4 - 4x^3 + 16$.

（i）求 $f'(x)$ 及 $f''(x)$.　（2 分）

（ii）求 $f(x)$ 的局部極大值和局部極小值.　（4 分）

（iii）求曲線 $y = f(x)$ 的拐點.　（2 分）

（iv）繪出曲線 $y = f(x)$，$-2 \leq x \leq 4$.　（3 分）

（v）繪出曲線 $y = f(2x)$，$-1 \leq x \leq 2$.　（1 分）

（b）求由曲線 $y = x^4 - 4x^3 + 16$ 及 $y = 16$ 所包圍的區域的面積.　（8 分）

［解答分析］

（a）（i）由多項式的微分法[7]及求導公式 $(x^n)' = nx^{n-1}$ 可得 $f'(x)$，對 $f'(x)$ 再進行一次求導即得 $f''(x)$；

（ii）應用函數極值的判別法，先計算 $f'(x) = 0$ 求出駐點的 x 坐標 x_0，再利用一階導數判別法，判斷 $f'(x)$ 在 x_0 左右兩側（$x < x_0, x > x_0$）的正負，也即判斷 $f(x)$ 的單調性. 對於兩側有變號的駐點，即為極值點，此時可得 $x = 0$ 之點不是極值點而 $x = 3$ 之點是極值點，由 $f'(x)$ 的正負（$f(x)$ 的單調性）趨向可得 $f(3) = -11$ 為局部極小值，$f(x)$ 沒有局部極大值.

（iii）利用二階導數判別法，先計算 $f''(x) = 0$ 求出 x_0 的值，其後考察 $f''(x)$ 在 x_0 左右兩側（$x < x_0, x > x_0$）的正負，若左右兩側之符號相反，即得其對應點為

拐點，分析每個區間的正負即得曲線 $y=f(x)$ 的兩個拐點$(0,f(0))=(0,16)$及$(2,f(2))=(2,0)$.

(iv) 由(ii)及(iii)可以瞭解曲線$y=f(x)$的圖像情況，比如單調性、局部極小值、拐點，另可嘗試求出函數在區間上的零點(由(iii)得零點$(2,0)$)，以及求出區間兩點的坐標$(-2,f(-2))$及$(4,f(4))$來衡量圖像的具體性態.

(v) 利用函數曲線伸縮的變換關係，其所求的函數圖像上每點的横坐標為(iv)部所得的圖像對應的横坐目標$\frac{1}{2}$，也即比對於(iv)部所得的圖像，所求的圖像變窄了一半，例如在 $y=f(2x)$ 的零點為$\left(\frac{2}{2},0\right)=(1,0)$，極小值點變為$\left(\frac{3}{2},-11\right)$等，故根據變化後的坐描標繪曲線 $y=f(2x)$.

(b) 對於圍成的封閉圖形面積，可先求出 $y=x^4-4x^3+16$ 及 $y=16$ 的交點，繼而運用定積分求解. 其中，由$(a)(iv)$部可見$y=x^4-4x^3+16$在直線$y=16$之下，故可對 x 作定積分，取交點的 x 坐標計算$\int_0^4[16-(x^4-4x^3+16)]dx$即得.

［點評］

在現行的内地高中數學課程標準以及高考數學科的考試範圍，微積分部分暫只教授至導數的部分，而且試題著重於導數所反映函數的整體性質，並沒有對其他概念以致其性態作更一步的探討，本題方向更對應於高校中高等數學課程的題目，對初等微積分的内容更綜合的應用出來，而在港臺地區也有教授初等微積分的部分，比較對應的試題考點也略同，唯本題的解題思路較為保守，只需掌握具體的方法即可迎刃而解，題目的設置不太需要考慮一些較難的情況，只要順著子問題的方向逐步求解即可順利完成整道題目.

4.2.2 變式思考與歸納

5. (四校附加卷 2017/2018 第 2 題)

(a) 一體積為$72cm^3$的長方體，其長、闊、高分别為$2xcm$、xcm及hcm，其中$1\le x\le 6$.

(i) 把長方體的表面面積表示成 x 的函數 $S(x)$.　(3 分)

(ii) 求$\frac{dS}{dx}$及$\frac{d^2S}{dx^2}$, $1<x<6$.　(2 分)

(iii) 繪出曲線 $y=S(x)$. 圖中標示出局部極大點、局部極小點和拐點.　(6 分)

(iv) 求 $S(x)$ 的最大及最小值.　(2 分)

(b) 求 a 的值，使得由曲線 $y=ax(a-x)$ 和 x 軸所包圍的區域的面積為$\frac{8}{3}$.　(7 分)

6.（四校附加卷 2018/2019 第 2 題）

（a）已知函數 $f(x)=x^3-3x^2-9x+2$.

（i）求 $f'(x)$ 及 $f''(x)$.　（2 分）

（ii）求 $f(x)$ 的局部極大點、局部極小點和拐點.　（6 分）

（iii）繪出曲線 $y=f(x)$.　（2 分）

（iv）繪出曲線 $y=f(|x|)-2$.　（2 分）

（b）求由曲線 $y=x^3-3x^2-9x+2$ 和直線 $y=x+2$ 所包圍的區域的面積.　（8 分）

7.（四校附加卷 2019/2020 第 2 題）

（a）設曲線 $y=f(x)$ 通過點 $(0,3)$ 及 $f'(x)=x^2-2x-3$.

（i）求 $f(x)$ 及 $f''(x)$.　（3 分）

（ii）求 $f(x)$ 的局部極大點、局部極小點和拐點.　（5 分）

（iii）繪出曲線 $f=f(x)$，$-2\le x\le 4$．　（3 分）

（iv）繪出曲線 $y=|f(-x)|$，$-4\le x\le 2$．　（1 分）

（b）求由曲線 $y=-x^2+4x+3$ 及 $y=3|x-1|$ 所包圍的區域的面積.　（8 分）

［說明］

第 5 題採用了應用題的形式呈現，具體解題的情況與題 4 類同，但這裡要注意（a）（iv）部，由於題設所限了區間範圍，再由題目編排可知其判定最值的方法是需要結合圖像而得，學生常犯的錯誤是誤以為極植就是最值的情況，而本題正是其最大值是取端點的情況，因此需要小心. 其次（b）部求面積的情況轉化為解對應未知數的情形，這種解法要小心常量與變量的關係，運用積分求式建立方程求解出未知數 a，當中要注意積分中的被積函數需要加上絕對值，使其值為封閉圖形的面積.

第 6 題中，特別提醒（a）（iv）部涉及加入絕對值後的函數與原函數在圖像上的幾何意義，其具體表現為函數在 y 軸右側的圖像關於 y 軸作對稱變換，以及圖像的上下平移關係.

第 7 題中，（a）部給出了函數的導數表達式，需通過不定積分求出原函數族，再結合已知函數圖像通過的點確定函數的解析式. 和題 6 一樣，特別提點當中（a）（iv）部關於函數圖像變換的問題，要注意圖像關於 y 軸作對稱變換並關於 x 軸作反射變換（翻折）. 另外是（b）部關於利用定積分求面積的問題，這題的封閉區域所對應包圍的曲線有一個為絕對值函數，欲要瞭解它與另一曲線的大小（圖像上的上下）關係，我們需要分段討論，把每種情況的面積作加總才得其區域的面積.

［歸納］

結合上述各題，不難發掘出試題內容要求學生：

（1）掌握多項式的微分法及求導公式 $(x^n)'=nx^{n-1}$，以對題目所給的多項式作一階導數及二階導數；

（2）根據上述結果，利用一階導數判別法求出函數的極值點，以及利用二階導數判別

法求出函數的拐點，這部分是整道題目的重點，因為接下來的題目需要運用這部分的結論. 當中需要考生判定其極值是局部最大值還是局部最小值，以及對不符合極值點或拐點所對應的 x 值捨去；

（3）根據極值點、拐點、以及從導函數的正負與原來函數的單調性的關係描繪函數圖像，當中也可能需要求出所給區間的函數值，函數的零點等，需全面分析函數圖像的性態，是這類題的難點. 再者需根據題設的函數圖運用對稱、平移、伸展、收縮及反射等技巧［8］作出新函數的圖像（關於這類知識點在其他初等數學研究均有相關內容，如有需要可再另文探討）；

（4）最後要求考生利用定積分計算平面圖形的面積，當中常以涉及此結論作解題的軸心：

> 由曲線 $y = f(x)$，$y = \varphi(x)$ 與直線 $x = a$，$x = b$ 所圍成的平面圖形，當 $x \in [a,b]$ 時
>
> 有 $f(x) > \varphi(x)$，其面積 $S = \int_a^b [f(x) - \varphi(x)]dx$.

其難點在於判別兩曲線的大小關係，其次是運用定積分的運算性質及公式

$$\int_a^b x^n dx = \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_a^b \text{（其中 } n \neq -1\text{）}$$ 求得面積.

（未完待續 …）

参考文献：

［1］澳門大學、澳門理工學院、旅遊學院及澳門科技大學. 澳門四高校聯合入學考試（語言科及數學科）方案［EB/OL］.（2016－09－17）［2023－08－07］. <https://www.mpu.edu.mo/cntfiles/event/event_file_2_11895.pdf>

［2］澳門大學. 數學 A 及 B：1999/2000 年度入學考試考試指引及 1997/98 和 1998/99 年度試題［M］. 澳門：澳門大學，1999.

［3］香港課程發展委員會. 數學教育學習領域－附加數學課程指引（中四至中五）［EB/OL］.（2000）［2023－08－07］. <https://www.edb.gov.hk/attachment/tc/curriculum-development/kla/ma/curr/PAST%20Curr/42%20Sec%202001%20Addmath%20Syll_CES_comp.zip>

［4］澳門大學、澳門理工學院、旅遊學院及澳門科技大學. 澳門四高校聯合入學考試（語言科及數學科）簡章及考試規條（2023/2024 學年）［EB/OL］.（2022－09）［2023－08－07］. <https://portal.dsedj.gov.mo/webdsejspace/addon/allmain/msgfunc/Msg_url_page.jsp?msg_id=87218>

[5]梁操雅，羅天佑. 香港考評文化的承與變:從強調篩選到反映能力[M]. 香港:商務印書館，2017.

[6]鄧國俊，貝磊(Mark Bray). 多元化課程及進口教科書的影響－中學數學科的類型及發展[C]//古鼎儀，馬慶堂.《澳門教育－抉擇與自由》. 澳門:澳門基金會，1994：70－86.

[7]澳門大學、澳門理工學院、旅遊學院及澳門科技大學. 澳門四高校聯合入學考試(語言科及數學科)2023 學年數學附加卷考試大綱[EB/OL].(2022－09)[2023－08－07]. <https://portal.dsedj.gov.mo/webdsejspace/addon/upload/Upload_viewfile_page.jsp? id=83443&sid=&>

[8]澳門大學、澳門理工學院、旅遊學院及澳門科技大學. 澳門四高校聯合入學考試(語言科及數學科)2023 學年數學正卷考試大綱[EB/OL].(2022－09)[2023－08－07]. <https://portal.dsedj.gov.mo/webdsejspace/addon/upload/Upload_viewfile_page.jsp? id=83443&sid=&>

[9]澳門大學、澳門理工學院、旅遊學院及澳門科技大學. 澳門四高校聯合入學考試(語言科及數學科)2017/2018 學年數學附加卷試題及參考答案[EB/OL].(2017－09)[2023－08－07]. <http://aecm.org.mo/wp-content/uploads/20172018-%E8%A9%A6%E9%A1%8C%E5%8F%8A%E5%BB%BA%E8%AD%B0%E7%AD%94%E6%A1%88_%E6%95%B8%E5%AD%B8%E7%A7%91-%E9%99%84%E5%8A%A0%E5%8D%B7.pdf>

[10]澳門大學、澳門理工學院、旅遊學院及澳門科技大學. 澳門四高校聯合入學考試(語言科及數學科)2018 學年數學附加卷試題及參考答案[EB/OL].(2018－09)[2023－08－07]. <https://www.iftm.edu.mo/Content/Uploads/Admission/JAE/JM02/JM02_2018_exam_paper_and_suggested_answer_final.pdf>

[11]澳門大學、澳門理工學院、旅遊學院及澳門科技大學. 澳門四高校聯合入學考試(語言科及數學科)2019 學年數學附加卷試題及參考答案[EB/OL].(2019－09)[2023－08－07]. <https://www.iftm.edu.mo/Content/Uploads/Admission/JAE/JM02/JM02_2019_exam_paper_and_suggested_answer_final.pdf>

[12]澳門大學、澳門理工學院、旅遊學院及澳門科技大學. 澳門四高校聯合入學考試(語言科及數學科)2020 學年數學附加卷試題及參考答案[EB/OL].(2020－09)[2023－08－07]. <https://www.iftm.edu.mo/admission/filemanager/en/share/jae_past_papers/2021/JM02%20-%202020%20past%20paper.pdf>

[13]澳門大學、澳門理工學院、旅遊學院及澳門科技大學. 澳門四高校聯合入學考試(語言科及數學科)2021 學年數學附加卷試題及參考答案[EB/OL].(2021－09)[2023－08－07]. <https://www.iftm.edu.mo/admission/filemanager/en/share/jae_past_papers/2021/JM02%20past%20paper%202021.pdf>

[14]澳門大學、澳門理工學院、旅遊學院及澳門科技大學. 澳門四高校聯合入學考試(語言科及數學科)2022 學年數學附加卷試題及參考答案[EB/OL].(2022－09)[2023－08－07]. <https://www.iftm.edu.mo/admission/filemanager/en/share/jae_past_papers/2022/JM02%20%E6%95%B8%E5%AD%B8%E9%99%84%E5%8A%A0%E5%8D%B7%20-%202022%E8%80%83%E8%A9%A6%E9%A1%8C%E7%9B%AE%E5%8F%8A%E5%8F%83%E8%80%83%E7%AD%94%E6%A1%88.pdf>
[15]教育暨青年局. 高中數學科課程指引[EB/OL].(2016－02－04)[2023－08－07]. <https://www.dsedj.gov.mo/crdc/guide/data/senior/Math_guide_c.pdf>

(本論文曾於 2022 年榮獲廣東省初等數學學會 2021 年度初等數學研究優秀成果一等獎，本文為筆者對原文進行調整修訂而成，以保留文章內容的時效性。)

看似簡單卻十分不簡單的數學課:因式分解

澳門廣大中學　何漢秋　梁翠瓊老師
澳門大學教育學院　　　江春蓮教授

(本文已提交澳門特別行政區教育及青年發展局作教研交流)

因式分解是整式乘法的逆運算,它是解多項式方程和不等式以及分式運算的基礎。有了因式分解,我們就可以對多項式方程和不等式進行降次,實現從高次到低次、化繁為簡的目的;有了因式分解,以多項式為分母的分式的四則運算才得以順利進行,所以因式分解的學習很重要。

儘管因式分解是整式乘法的逆運算,但對學生而言,兩者的難度卻不可相提並論。整數乘法可類比數的運算,學生有比較好的基礎,乘法法則包括單項式乘以單項式、單項式乘以多項式到多項式乘以多項式,層次遞進,環環相扣。但因為因式分解的方法比較多,也比較靈活,技巧性強,其在一定程度上造成了學生的學習困難。雖說因式分解也可類比因數分解,但在因式分解中,分解出的因式卻比因數(主要是質因數)要複雜得多。

基於上述原因,我們將在本文中討論因式分解第一節課的不同設計及其優缺點。因式分解第一節的內容主要包括:(1)因式分解的概念;(2)因式分解的第一個方法,即提取公因式法的學習和初步訓練。提取公因式法涉及兩個技巧,一是最大公因式的確定,這是例(1)的情形;二是將某個因式當作公因式提取出來,這是例(2)的情形,其中蘊涵換元的思想。這節課看起來很簡單,希望通過下文的討論,可以讓教育同仁看到學生的學習困難,明白有些看起來很簡單的東西,對學生來說,卻是很難的內容。也希望老師們能在日後的教學中注意教學細節,充分發揮好老師的講解作用。

一、概念引入

關於因式分解,人民教育出版社(後面簡稱人教社)的教材上出現過兩種不同的引入方式。一是類比因數分解,具體地說,從"把630分解成幾個質數的乘積形式"類比將 x^2+x 和 x^2-1 寫成整式的乘積的形式,進而定義"因式分解為將一個多項式化成幾個整式的積的形式的變形"(人教社,2008,*p*. 165);二是單刀直入,直接從整式乘法的逆運算角度在討論了 x^2+x 和 x^2-1 後給出定義(人教社,2013,*p*. 114)。

本文作者認為,可以從 $999 \times 999 + 999$ 的簡便計算引入。這個計算稍複雜,除了求助於計算器,應該沒有學生願意直接算,怎麼辦呢?有學生可能想到乘法對加法的分配律,把兩個式子中的 999 提出來,得到 $999 \times (999 + 1) = 999000$,計算一下變得簡單了!這就是做數學的“啊哈” 狀態!進而,我們可設 $x = 999$,討論這裡的變形過程,即 $x^2 + x = x(x + 1)$,將“一個多項式化成幾個整式乘積的形式”!

多年前,本文作者曾跟我國數學教育家張奠宙先生討論時,張先生認為還可以從討論方程 $x^2 + x = 0$ 的解引入。學生不難觀察到,這個方程有一個解 $x_1 = 0$,也可以通過進一步的嘗試,得到方程的另一解 $x_2 = -1$。接下來是討論方程是否還有別的解。可能有學生會注意到,該方程可變形為 $x(x + 1) = 0$,進而可以得到只有 $x = 0$ 和 $x + 1 = 0$ 兩種情況。

比較這四種引入方法,我們認為從 $999 \times 999 + 999$ 的計算引入最合適,提取公因式的過程迫切而自然,而且起點較低,可以激發數學能力較低的學生的學習興趣。人教社的兩種處理方式沒能說明為什麼要做因式分解。從方程 $x^2 + x = 0$ 的解的個數的討論引入對一般學生來說,挑戰性太大。

二、提取公因式法

人教社(2008, 2013) 的教材,直接從 $ma + mb + mc$(或 $pa + pb + pc$) 入手,各項都有個公共的因式(即公因式)m,然後基於 $m(a + b + c) = ma + mb + mc$ 得到 $ma + mb + mc = m(a + b + c)$,並說另一個因式是 $ma + mb + mc$ 除以 m 得到的商。將 $a + b + c$ 說成是 $ma + mb + mc$ 除以 m 得到的商沒錯,但不如將其表述為 $ma + mb + mc$ 的各項除以 m 得到的商的和更具操作性。

如果在概念引入的時候採用 $999 \times 999 + 999$ 的簡便計算引入,現在就可以設 $x = 999$,其中的變形就是:$x^2 + x = x(x + 1)$。右邊的單因式 x 是 x^2 和 x 的公因式,把 x^2 和 x 中的 x 提出去後,分別得到 x 和 1,所以第二項是 $x + 1$。當發現有公因式的時候,把公因式提出去就可以很快將多項式變成乘積的形式,所以提取公因式是因式分解最基本的方法。

三、例題講解

在人教社(2008, 2013) 的教材上,用了如下兩個例子:(1)$8a^3b^2 + 12ab^3c$; (2)$2a(b + c) - 3(b + c)$. 對例(1),教材直接分數位部分(8 和 12) 和字母部分(a^3b^2 和 ab^3c) 討論得到它的公因式 $4ab^2$,但沒有引入最大公因式的概念。對例 2,指出 $b + c$ 是公因式後很快得到了結果。

對例 1,我們可以把它改編成如下的沒有正確答案的選擇題,讓學生來討論。

下面是 4 名同學給出的例(1) 的因式分解的答案,請問其中哪些是正確的?

(A) $4(2a^3b^2 + 3ab^3c)$	(B) $ab^2(8a^2 + 12bc)$
(C) $4a(2a^2b^2 + 3b^3c)$	(D) $4ab(2a^2b + 3ab^2c)$

這四個選項中,按照提取公因式法的定義,前面的三個都沒有錯誤。第一個只提了係數的公因數,第二個只提了字母部分的公因式,第三個既提了係數的公因數,也提了字母部分的公因式,但沒有把所有的公因式都提取出來,什麼是"所有"的公因式呢?我們可以仿照小學中學過的"最大公約數"的概念提出"最大公因式"的概念,把它提出來後,得到的式子 $2a^2$ 和 $3bc$ 就不再有任何"交集"了!這就是數學對"最簡"的追求,對簡潔美的追求!

第四個選項有計算錯誤,通過對它的討論可以提醒學生如何檢驗因式分解結果的正確性。在這樣的討論過程中,有比較、分析、檢驗等數學思維蘊含其中,可極大地提升學生的思維水準和數學交流能力。

對例 2,教師在講解的過程中,需要邊講邊標示,講的時候要有意識地把 $b+c$ 單獨念出來,並用紅色的粉筆將 $b+c$ 圈示出來 $2a\boxed{(b+c)}-3\boxed{(b+c)}$,以顯示在這裡我們可以把他們看作一個整體,當作一個因式提出去。從數過渡到式,要將字母和字母組成的代數式作同樣的處理,對很多學生來說,這是非常難的事情。

四、課堂練習及講評

在課堂練習部分,人教社兩版的設計比較接近,2013 版的比 2008 版的多了 2 道,下面呈現的是 2013 版的。

1. 把下列各式分解因式:

(1) $ax+ay$	(2) $3mx-6my$
(3) $8m^2n+2mn$	(4) $12xyz-9x^2y^2$
(5) $2a(y-z)-3b(z-y)$	(6) $p(a^2+b^2)-q(a^2+b^2)$

2. 先分解因式,再求值:

$4a^2(x+7)-3(x+7)$,其中 $a=-5$,$x=3$。

3. 計算 $5\times3^4+4\times3^4+9\times3^2$。

第 1 題中的 6 道小題,第(1)題可換為 x^2+ax,這是之後要學習的一元二次方程中較簡單且常見的題型;第(3)題可換為 $8m^2n+20mn^2$,與(4)一起讓學生練習例(1)的方法。第(5)和第(6)題可互換,因為第(6)題的公因式能觀察出來,而第(5)題則需要把前後兩個式子中的一個的符號變換一下才能湊出公因式 $y-z$ 或 $z-y$,對符號運算不熟悉的同學容易出錯。

第 2 題意義不大,可舍去。第 3 題可改成兩個子問題:(1)計算 $88\times9999+12\times9999$;(2)給你自己和同學出 3 道可以用類似方法的計算題。這裡的第(1)題是仿照引入的例子,將 999 變成了 9999,$999+1$ 則換成了 $88+12$,學生注意到這樣的結構後,可以從結果出發,建構更多的問題,學會了自己出題,就融會貫通了。

代數常被看作是高等數學的門檻(Cai & Knuth, 2005),在中學如何說明學生打好基礎

需要深入分析,並在此基礎上設計出激發學生思考的問題,供學生討論、發揮和拓展,並為後續主題的學習做些鋪墊,日積月累,學生將會越來越喜歡數學。

參考文獻:

Cai, J. , & Knuth, E. J. (2005). Introduction: The development of students' algebraic thinking in earlier grades from curricular, instructional and learning perspectives. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*,37(1), 1–4. https://doi.org/10.1007/BF02655891

人民教育出版社(2008). 義務教育課程標準實驗教科書數學八年級上冊. 北京:人民教育出版社。

人民教育出版社(2013). 義務教育教科書數學八年級上冊. 北京:人民教育出版社。

高中數學分層作業設計

—— 基礎過關與適度拔高迭進設計的探究與思考

廣東省清遠市清新區第一中學　譚麗君

（本文獲清遠市清新區優秀論文評選二等獎）

摘　要:在新課標背景下,高中數學作業普遍實施分層作業,但是當前高中數學分層作業的設計如何設計出迭進的效果,讓學生一層一層迭進完成作業,學得更加輕鬆,掌握得更加牢固,對學習更有興趣,使教學效果最大化,一直是我們研究的重點. 鑒於此,本文結合教學實踐,闡述核心素養下高中數學作業如何分層設計出迭進的效果,以便教師通過改進分層設計模式,設計出迭進的效果,提升課堂的效率.

關鍵字:基礎過關 ;適度拔高 ;迭進;因材施教

新課標(2017 年版) 明確要求:高中數學課程面向全體學生,實現人人都能獲得良好的數學教育,不同的人在數學上得到不同的發展[1]. 心理學告訴我們,人的心理發展是受各種因素的影響,有先天性的原因也有後天性的因素,具有不平衡性、差異性和階段性. 因此要實現新課標的要求,提高數學教學效果,就必須一切從實際出發,因材施教,實行分層教學. 基於此,教師在課後作業的佈置也應該進行作業的分層佈置,根據學生能力水準有針對性地制定作業方案,所以課後作業設計應該有層次感,有挑戰性,難易科學搭配,緊扣知識點,重點突出"四基""四能" 的考查和數學核心素養的達成,讓班級學生朝著個人發展目標展開探究實踐,提升個人數學核心素養水準,提高學生數學學習的興趣. 下面從一小節分層作業設計來總結迭進設計的初步探究與思考.

集合運算作業設計及說明

(一) 基礎過關

1. 設集合 $A=\{x \mid -2 \le x \le 2\}$,Z 為整數集,則 $A \cap Z$ 中元素個數為________.

【注】考查交集,限制條件下集合的簡化,以清晰集合的屬性,重視限制條件或隱含條件對問題的影響,又如後續學習函數的一個法則:定義域優先.

2. 設集合 $U = \{1,2,3,4,5,6,7\}$,$A = \{2,3,4,5\}$,$B = \{2,3,6,7\}$,則 $B \cap C_U A =$ ______.

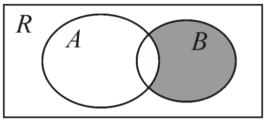
【注】考查交集、補集,運算順序的清晰化,韋恩圖應用,以及邏輯推理能力考查.

3.(單選)已知集合 $A = \{x \mid x < 0$ 或 $x > 2\}$,$B = \{x \mid -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}\}$,則(　　)

A. $A \cap B = \varphi$　　B. $A \cup B = R$　　C. $B \subseteq A$　　D. $A \subseteq B$

【注】設問開放,需要學生探索求解,數軸法應用,選項設計容量大,多元化. 需要學生對子、交、並、補運算熟悉,也考查了數形結合能力.

4. 已知集合 $U = R$,$A = \{x \mid |x| < 2\}$,$B = \{-2,0,1,2,3,4\}$,則如圖陰影區域所表示的集合為________.



【注】題幹呈現方式豐富,集合展示多樣化,列舉、描述法、圖像法皆有之,學生須明晰陰影區域與集合運算之間的對應關係. 可以是 $B \cap (C_R A)$,也可以是 $C_B(A \cap B)$,教師點評作業時應開拓學生視野,並可以變式重練,重新設置陰影區域.

(二)適度拔高

5. 設集合 $A = \{x \mid y = x\}$,$B = \{y \mid y = x^2\}$,$A \cap B =$ ________.

【思考】若 $A = \{(x,y) \mid y = x\}$,B 不變,$A \cap B =$ ________.

若 $A = \{(x,y) \mid y = x\}$,$B = \{(x,y) \mid y = x^2\}$,$A \cap B =$ ________.

【注】集合屬性認識下的集合運算,判定集合屬性,進行簡化或等價轉換,是集合運算的首要步驟.

6. 設集合 $A = \{1,2,3,4\}$,若 $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7\}$,則滿足條件的 B 有________個;

若 $C = \{y \mid y = 3x - 2, x \in A\}$,則 $A \cap C =$ ________.

【注】形式上一題兩空,較為新穎,第一空須對集合 B 的本質予以探索,探索之下為枚舉,本質歸納為 A 的子集;第二空也可以說是一種新定義,定義域就是集合 A,為後續函數學習埋下伏筆,題目設計中的新情境,新面貌,對學生的創新思維與應激訓練有一定幫助.

7. 設集合 $A = \{1,3,\sqrt{m}\}$,$B = \{1,m\}$,$A \cup B = A$,則 $m =$ ________.

【注】考查特殊並集關係的等價轉化,本題還可延伸:將條件改為“,$A \cap B = B$”,答案會改變嗎?對於此題的條件翻譯與簡化,也是韋恩圖的應用.

8. 設集合 M、N 為集合 I 的非空子集,且 M、N 不相等,$N \cap C_I M = \varphi$,$M \cup N =$ ________.

【注】抽象集合的運算,如何求解,抽象問題具體化,可以圖像化,即借助韋恩圖,也可

特殊化,借助具體函數代入求解.

9.(多選題)已知集合 $A=\{x \mid x<-1$ 或 $x>2\}$,$B=\{x \mid x \geq a-1\}$,若 $A \cup B=R$,則實數 a 的取值可為(　　)

$A.\ -1$　　$B.\ 0$　　$C.\ 1$　　$D.\ 2$

【變式一】求 a 的取值範圍;

【變式二】修改題幹中的 $A \cup B=R$,變為 $B \cap C_R A \neq \varphi$,求 a 的取值範圍.

【注】集合運算中的含參問題處理,本質與後續的恆成立、存在性問題關聯,含參問題既是高中數學的一個重點,也是難點,平時要多接觸,引導學生學習常見的處理策略,也重在考查學生的分析能力,分類討論思想、數形結合能力等.

從以上分層作業設計我發現一些我們應該注意的地方:(1)作業的設計本應多元化,但是應試教育的指揮棒下,高中生大多學業壓力重,時間安排緊密,教育環境滯後,學校評價指標相對單一,故而作業的設計一般以所教和學的知識訓練與強化為主,而幼稚園的學生因為沒有固定的學業壓力,故而其作業豐富多彩,高中生很難有空餘時間,也缺乏相應的機制與條件,現在資訊化時代,如網路查資料,當我們在教楊輝三角相關知識,可以讓學生上網查閱楊輝三角相關資料等,再如一些調查問卷,也都難以實行等,因此分層作業設計是重在"知識訓練與強化"這個角度。(2)分層作業設計最關鍵一點是因材施教,雖然高考要求都是一致,但是學生水準有差異,故而更應知,以人為本,應根據學生的實際能力與水準取選擇合適的題,數量適宜,盡可能通過合適的題去調度學生的參與性,積極性,刺激他們成功感.(3)選題上一般須參考高考題、經典考法,以及考查問題的學科整體性、延續性,集合的運算對後續解集、求範圍,厘清集合間的關係等都有基礎性的作用.一組題,須囊括一個知識體系,內容上要估計清晰,顧及到位,也不忘常規思維方法的考查、能力考查。比如此節集合運算,對學生關鍵能力,為基本概念理解能力、數形結合能力、集合簡化能力、求解運算能力。故而在選題時,教師應透析題目背後所滲透的核心素養,能力要求,選題分好層,循序漸進,具有一定階梯性,如先基礎過關,當然要一定的挑戰性,再適應拔高,甚至還應有一些變式,一些思考,這些變式可以安排在題目中,也可以在教師點評時,予以啟發,題型上盡可能豐富一點,基本型、探索型、開放型、新概念型等,但要新而不難,耐人尋味.外線圍著主題,內線凝聚思維與能力,即有血有肉,還要與高考接軌,比如此設計中就有,多選題,一題兩空,總之,關注學情,傾注智慧.

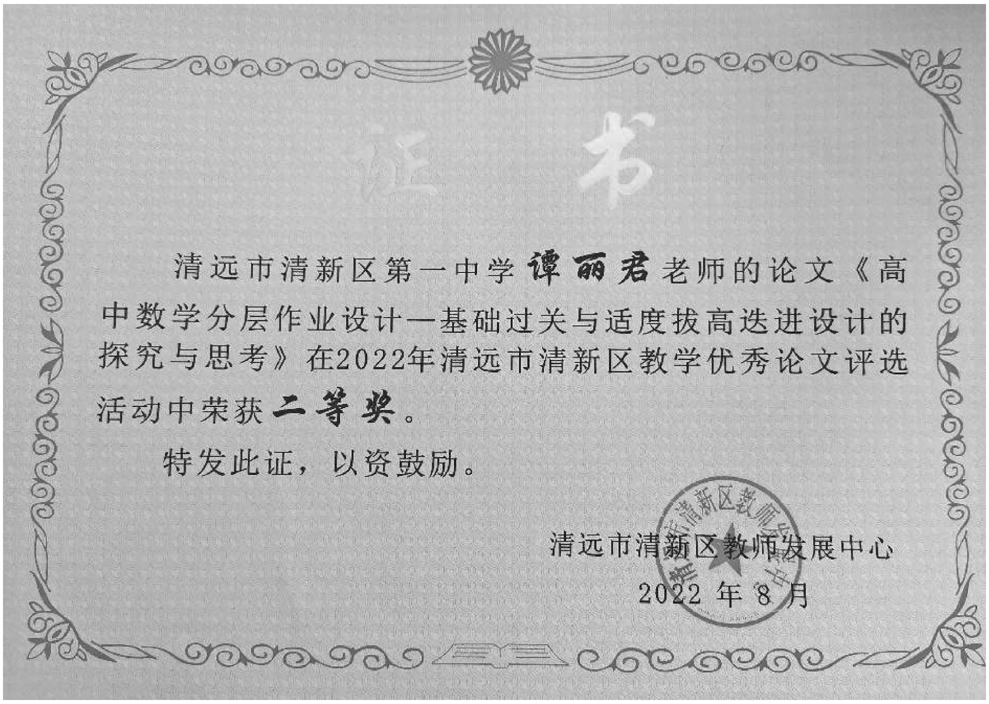
總而言之,分層作業設計應對不同學生要求不一樣,要把基礎過關與適度拔高做到層層迭進,相輔相成.

參考文獻:

[1]普通高中數學課程標準(2017年版)[M],人民教育出版社,2018

[2]肖永恆,任柏宇.核心素養視角下高中數學作業設計的有效性研究[J].高考,2021,(29):107-108.

附：



证书

清远市清新区第一中学**谭丽君**老师的论文《高中数学分层作业设计—基础过关与适度拔高迭进设计的探究与思考》在2022年清远市清新区教学优秀论文评选活动中荣获**二等奖**。

特发此证，以资鼓励。

清远市清新区教师发展中心

2022 年 8 月

如何提高低年級學生計算的準確性

江門市新會區會城紅衛小學　林穎葵

數學計算能力是一項基本的數學能力,包含了計算的準確率和正確率兩方面的計算能力是學習數學和其他學科的重要基礎。在小學數學教材中計算所占的比重很大,尤其是低年級,學生計算能力的高低直接影響著學生學習的品質,如:數學中有些概念的引入需要通過計算來進行;數學中解決實際問題的解題思路、步驟、結果也要通過計算來落實等,可見學生的計算能力是至關重要的。所以提高學生的計算能力,就要從低年級的學生入手,認眞、嚴格的訓練,這樣才有助於培養學生的數學素養,有助於培養學生解決問題的能力,有助於樹立學生認眞、細緻、耐心、不畏困難的品質。

多年的教學中,我深刻的體會到一個孩子如果計算能力不強,對這個孩子的整體數學成績都非常有影響,所以我在平時的教學中也非常重視對學生計算能力的培養。如何提高孩子的計算準確性呢？我認為重點從以下七個方面進行訓練:

一、要熟練的掌握“10 以內的加減法”、“20 以內的加減法”、“乘法口訣”。

低年級作為關鍵的起始階段,加、減、乘、除的入門學習對學生今後的繼續學習將會產生深遠的影響。教學實踐告訴我們,任何複雜的題都是由一個簡單的問題組合而成的。無論是兩位數乘除兩位還是兩位數乘除三位數,或其他更複雜的計算題,它們的基礎都是“10 以內的加減法”、“20 以內的加減法”“九九乘法口訣”這些基礎的知識不過關,達不到不假思索、脫口而出的程度造成的。如果“10 以內的加減法”、“20 以內的加減法”“乘法口訣”沒有熟練撐握,到了中高年級必然算不快、算不準。

二、激發學生的興趣 。

計算做得久,學生就會感覺到枯燥。要提高學生的計算能力,首先要讓學生對於計算有一定的興趣,讓學生在學中樂、樂中學。只有產生了一定的興趣,學生才會在興趣的激勵下嘗試各種各樣的計算策略畢業論文,提高自己的計算能力。比如,教師在培養學生對於計算的興趣時,可以讓學生在遊戲、競賽當中學習;在有限的時間內口算、自己編計算題等。多種形式訓練的展開,有助於學生對於計算產生興趣,並且還能夠在一定程度上培養起良

好的計算習慣.

三、重視對口算、估算能力的培養。

要讓學生的運算能力有所提高,首要任務就是要讓學生的口算、估算能力有所增長。口算、估算能力是學生進行簡便運算的基礎,也是構成計算能力的重要部分。只有口算、估算能力提高了,學生的筆算能力才會加強。因此,每名學生都要打好口算基礎,加強口算訓練,提高口算能力。教師除了教材中的口算題目外,還應該再精心編制一定數量的,涉及面廣的口算練習題,讓學生在課餘時間進行反復的練習,將口算作為一項經常化、長期化的訓練,使其處於整個數學的教學過程,循序漸進,逐步提高學生數學計算的快捷性。

培養學生的估算能力很重要,其中新課標中就把培養學生的估算能力列入到了教材中,從中就不難看出估算能力的重要性。估算在數學計算以及實際生活當中都有很重要的位置。在平常的課堂計算學習中,在計算前可進行估算,使學生合理靈活地運用多種策略畢業論文去深思不足。在計算後對結果也進行估算,可以使學生獲得有價值的檢驗。估算能力也是一個人計算能力中相當重要的一個方面,具備良好的估算能力,一能幫助我們預知計算結果,提高數學計算與淺析碩士論文能力;二可以解決實際生活中遇到的具體不足;三可以檢查計算的結果是否基本正確。口算不僅要計時,更重要的是要給孩子看出對、錯,對那些能在規定時間內考滿分的要及時給予一定的獎勵,引起學生對口算的重視,另外要注意口算是家庭作業中必做的一項,平時把這樣一項工作堅持下來。這樣才把口算這項能力提高起來。

四、使學生熟練掌握運算法則 。

熟練掌握必要的運算法則,對於學生計算能力的提高有顯要的幫助,熟練掌握各類運算法則是學生提高數學計算能力的基礎,是其立足點和出發點。有些計算學習對於學生來說其實很簡單,就算教師不教,大部分學生也會進行正確計算。

但是作為教師,決不只滿足於學生會算,而是讓學生從解決不足的過程中明白為什麼這麼算,理解算理,總結出法則,體驗知識形成的整個過程。小學階段計算的學習都要進行四則運算——加、減、乘、除,而不論是整數、小數還是分數,每一類數的每一種運算都有自己特定的計算策略。正所謂“知其然,知其所以然”,計算教學要在領悟算理的基礎上掌握演算法,最後形成計算技能,不明白算理的演算法是機械的演算法,對計算技能的形成是不牢固的。尋求算理演算法的和諧統一是正確計算的前提條件。

五、重視錯題的分析。

學生的學習是一個反復認識和實踐的過程,出錯總是難免的。特別是低年級學生由於

年齡特徵剛剛學習的知識比較容易遺忘。例如,退位減,前一位退了 1,可計算時忘了減 1。同樣,做進位加時,又忘了進位。特別是連續進位的加法,連續退位的減法,忘加或漏寫的錯誤較多,這些都與兒童記憶不完整有關係。因此,教師要及時瞭解學生計算中存在的問題,深入分析其計算錯誤的原因,有針對性地進行教學。為了更好地瞭解學生學習的情況,可借鑒語文教師批改作文的方法——寫評語。在學生出錯處加上評語匯出錯因,讓學生知道錯的原因,是由於自己馬虎大意,還是哪方面的知識掌握得不夠好,知錯的基礎一把錯題重做一遍,對正確的知識再次加深認識鞏固。教師要因人、因題地重點分析錯題原因,大部分學生都做錯了的題,教師就要集中進行了講解,分析錯誤的原因;對基礎較差、常做錯題的學生,教師要多花時間在課後進行輔導。學生對自己作業中出現的錯誤要進行了自我反思,每個學生準備一個本子,把每天作業中出現的錯誤記在本子上,並寫出錯誤和改正方法。

另外,要有針對性地把學生經常錯的題目類似的題目作為學生的課堂作業,再次回饋瞭解學生改錯後的作業效果。改錯題型的練習對學生是有要求:判斷對錯→找出錯誤處→分析錯誤原因→改正。課堂採取小醫生找病因比賽的形式,讓學生在比賽中獲取知識。“改錯”不能僅滿足于學生分清了錯誤原因,改正了錯誤,而且達到預防效果,教育學生對這些錯誤有則改之,無則加勉。

六、幫助學生弄清算理,揭示規律。

在計算教學時,要讓學生弄清算理,不但知其然還知其所以然,這樣,計算教學就會變得生動活潑、多姿多彩。低年級學生直觀思維占主導,逐漸向抽象思維過渡,心理學家認為:思維是從動作開始的。要使學生掌握數學知識,促進思維發展,就需要在形象思維和數學抽象之間架一座橋樑,充分發揮學具操作的作用。在進行 9 加幾教學時就可以讓學生請出小棒一起來學習,在學生自主動手操作中優化得出湊十法,為後面繼續學習進位加、退位減打下基礎。還可以利用學生已有的知識經驗去理解新知識,構建教學知識結構的主要方式,教學中恰當地運用舊知識,通過類比同化新知,實現知識的正遷移,有利於學生對新知的理解和對新的認識結構的認同。比如,想加算減、口訣求商等都是學生通過知識間的聯繫來進行繼續學習的。再如進位加和退位減的方法要講清楚,讓學生理解透徹,他們才能正確熟練地運用方法計算。

七、培養低年級學生養成良好的計算習慣。

良好的計算習慣,直接影響學生計算能力的形成和提高。許多學生計算法則都能理解和掌握,但常常會發生錯誤,主要是缺乏嚴格的訓練,沒有養成良好的學習習慣。

要提高學生的計算能力,必須重視良好計算習慣的培養。1. 使學生養成認真校對的習

慣。要求學生對所抄寫下來的題目都進行認真校對,細到數位、符號,做到不錯不漏。2. 使學生養成審題的習慣。要求學生看清題目中的每一個資料和運算子號,確定運算順序,選擇合理的運算方法。3. 使學生養成仔細計算、規範書寫的習慣。要求學生書寫工整,書寫格式要規範。同時,能口算的要口算,不能口算的要認真筆算,強化學生規範打草稿的習慣。列豎式計算時,數位要對齊,數字間要有適當的間隔,進位元的確數位要寫在適當的位置上,退位點不能少。4. 使學生養成估算和自覺驗算的習慣。教師要教給學生驗算和估算的方法,並將驗算作為計算過程的一個重要環節進行嚴格要求,提倡用估算進行檢驗答案的正確性。

計算教學是一個長期複雜的教學過程,要提高學生的計算能力也不是一朝一夕的事。俗話說,要想練就一身過硬的本領,就必須得拳不離手,曲不離口,口算能力的培養也是如此。它是一個日積月累的過程,只有教師和學生的共同努力才有可能見到成效。

從“數學園地”到“數學天地”

澳門聖若瑟教區中學第六校　鄧海棠

本文題目的擬定，仿照被收入《朝花夕拾》的魯迅先生于 1926 年寫的一篇童年妙趣生活的回憶性散文《從百草園到三味書屋》。

魯迅先生寫百草園，以“樂”為中心，以簡約生動的文字，描繪了一個奇趣無窮的兒童樂園，其間穿插“美女蛇”的傳說和冬天雪地捕鳥的故事，動靜結合，詳略得當，趣味無窮。

而三味書屋則是一個完全不同的世界，作者寫出了三味書屋的陳腐味，說它是“全城中稱為最嚴厲的書塾”，兒童在那裡受到規矩的束縛。但作者並未將三味書屋寫得死氣沉沉，而是通過課間學生溜到後園嬉耍，老私塾先生在課堂上入神讀書學生乘機偷樂兩個小故事的敘述，使三味書屋充滿了諧趣，表現了兒童不可壓抑的快樂天性。

回憶入職聖中六校之後,得盧浩然主任指示和朱潔貞科組長指引,在 2020 年 10 月組建了高中數學拔尖班,10 月 20 日開始了第一節課。當時全員都是中文部的同學,如今已經發展成為中英文兩個校部的全部高中三個年級的同學了。

天若有情天亦老,人間正道是滄桑。高三理甲的陳塱鋒同學,自從加入拔尖班後,對數學科學高度熱誠,學習積極主動、鉆研刻苦耐勞。他在《畢業心語》中說道:“自律永遠是辛苦的,這是我接受十多年教育所體會到的,但怕辛苦就永遠不能成功。我認為想做一件事並不難,真正難的是堅持做下去。既然我當初選擇了數學競賽,就不能抱著玩耍的心態,敷衍了事;既然選擇了,就要對自己的選擇負責,要對得起老師,更要對得起自己。”

天道酬勤,終不負人。經過 51 個小時、長達大半年的辛勤培訓,刻苦鉆研,陳塱鋒同學獲得 20/21 學年度澳門校際數學比賽二等獎第一名,2021 港澳數學奧林匹克公開賽(港澳盃 HKMO Open)暨亞洲國際數學奧林匹克公開賽初賽(AIMO Open)銀獎,2021 年第四屆分角尺作圖國際決賽第二名的出色佳績。陳同學感慨萬端:“能夠在強手如林的數學學霸的夾縫中奪得一席之地,終於能夠趕得及在畢業前為校爭光、作為離校前留給母校的一份獻禮,我知足了。感恩天父。”

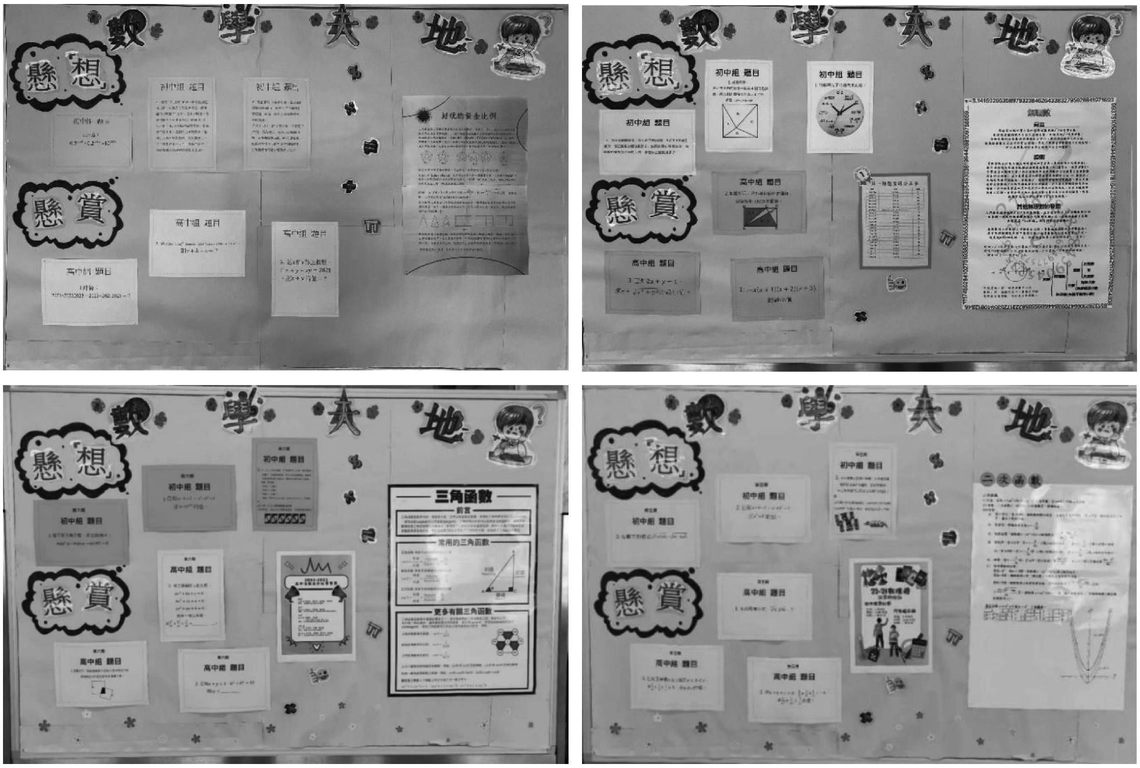
以夢為馬，不負韶華。陳同學實現了“從百草園到三味書屋”的華麗升級和變身。對於很多同學而言，“三味書屋”的數學拔尖班的學習，遠遠沒有其他活動的“百草園”那麼吸引。建基於此，“數學園地”在黃惠玲副校長的關愛下應運而生。

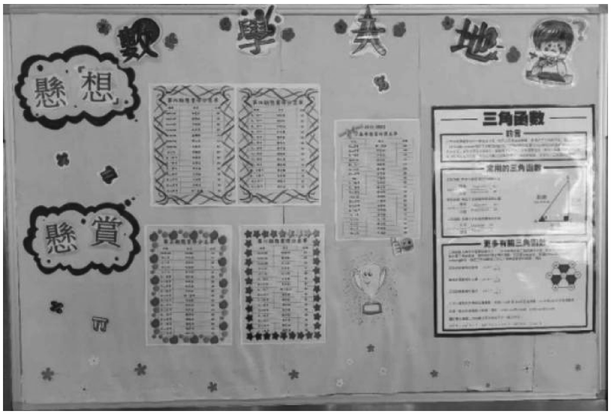
記得那時在與黃副校長的談話中，她提到了廣大學子學習數學的一個普遍現象，就是對數學學習出現了一些恐懼、害怕的情緒，對數學學習不感興趣，帶有避之則吉的心態。她問我能否從數學拔尖班著手搞些活動，以吸引同學們對數學加深瞭解，加強理解，提高興趣。

帶著副校的期望，在盧浩然主任的幫助下，我讓林浩源同學出任高中數學拔尖班的班長，計劃把全部成員分成 2 人一組，從 2022 年的 4 月下旬到 6 月上旬，每週一期編輯排版了“數學園地”，為以後的“數學天地”打造了雛形、奠定了基礎。內容上涵蓋了中學階段的六個年級，並留下了負責出版的同學的班級姓名，以便於有興趣參加的同學可以聯繫負責同學參考對照解答。記得當時第一個找上門的就是 F3A 的胡友裕 Jacko 同學，並對負責出題排版的內容給予了高度正面的評價。這同時也極大地鼓舞了高中數學拔尖班的成員。

當時被委任為“數學園地”組長的林浩源同學也不負眾望,不負韶華,歷經三載拔尖培訓,趕在高三畢業前夕,如陳塱鋒同學那般,為校爭光,獲得世界數學邀請賽(WMI2023)銅獎,成為又一個“己立立人”的聖中模範生,為學弟學妹們樹立了好榜樣,意義深遠。

今學年(22/23)開學伊始,結合數學科組的實際情況,貫徹學校行政的指示精神,我們全體數學老師組建了“數學天地”壁報欄目,打造了一個吸引同學對數學加深瞭解、提高興趣的平臺,同時也為學有餘力的同學構建了“跳一跳,摘得到”的培養數學思維的舞臺。





一個學年行將結束，回顧總結情況如下。“數學天地”由整個科組全部老師傾力打造，“懸想懸賞”項目的學生解答繳交由全部任教老師收取任教班級加以整合上傳，再由陳永強和鄧海棠老師分別負責初中、高中的相關題目的擬定、解答以及批改、計分。相關事務得以順利進行，全賴各位老師分工明確、團結協作、齊心合作。

	參與人次			獲獎人次	
	中文部	英文部	參與合計	中文部	英文部
初一（含 F1）		4	4		
初二（含 F2）	6	2	8	2	
初三（含 F3）	12	3	15	3	
高一（含 F4）	12	19	31	1	2
高二（含 F5）	50	23	73	9	2
高三（含 F6）	6		6	1	
合計	86	51		16	4

整合數學科組全力，挖掘中英同學潛力，加強數學科吸引力，星月伴行任重道遠。

從托勒密定理到開世定理

勞校中學　高二　莊俊鋒　　指導老師　魏均僑

在平面幾何中，托勒密定理是中學數學中與圓內接四邊形性質有關的重要定理，本文將對它進行研究並推廣到另一個全新的定理 —— 開世定理。

一. 托勒密定理

托勒密定理：當四邊形為圓內接四邊形時，四邊形的兩組對邊乘積之和等於兩條對角線的乘積。

證明：如圖 1 所示，$ABCD$ 是圓內接四邊形，過點 A 作 AF 交 BD 於點 F，使 $\angle 1 = \angle 2$.

又 $\because \angle 3 = \angle 4$，$\therefore \triangle ABC \sim \triangle AFD$.

$\therefore \dfrac{BC}{FD} = \dfrac{AC}{AD}$，即 $AD \cdot BC = AC \cdot FD$.　　①

$\because \angle 1 = \angle 2$，$\therefore \angle BAF = \angle CAD$.

又 $\because \angle 5 = \angle 6$，$\therefore \triangle ACD \sim \triangle ABF$.

$\therefore \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{CD}{BF}$，即 $AB \cdot CD = AC \cdot BF$.　　②

① + ②，得：$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot (BF + FD) = AC \cdot BD$，命題得證.

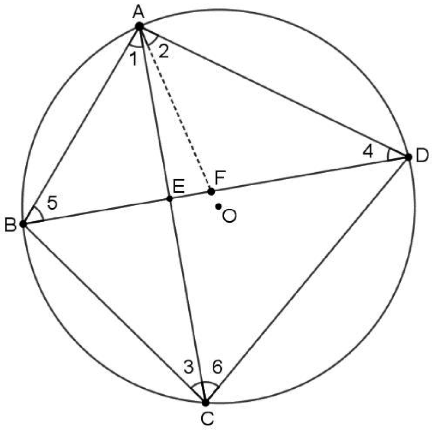


圖1

托勒密定理在解決線段比例問題上，常有出其不意的本領。

下面來看一個應用此定理的例子。

［**例子** 1］如圖 2，已知 $\triangle ABC$ 的內切圓 $\odot I$ 分別與邊 AB、BC 相切於點 F、D，AD、CF 分別與 $\odot I$ 相交於另外兩點 H、K。

求證：$\dfrac{FD \cdot HK}{FH \cdot DK} = 3$。

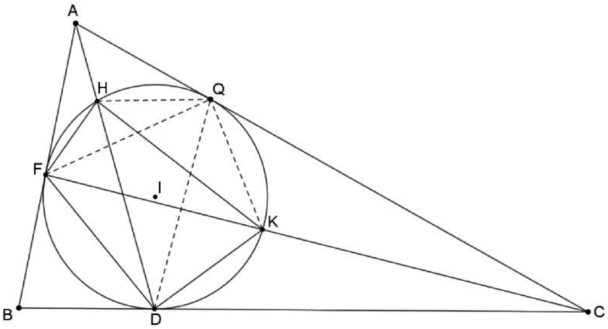


圖2

分析： 注意到所證等式的分子和分

母都是圓內接四邊形的對邊之積,因此可以考慮利用托勒密定理來找出當中的比例關係。

證明: 設 $\odot I$ 與邊 AC 相切於 Q,依次連接 QH、QF、QD、QK,由 CQ 為 $\odot I$ 的切線知 $\triangle CQK \sim \triangle CFQ$.

$\therefore \dfrac{QK}{QF} = \dfrac{CQ}{CF} = \dfrac{CK}{CQ}, \therefore \left(\dfrac{QK}{QF}\right)^2 = \dfrac{CQ}{CF} \cdot \dfrac{CK}{CQ} = \dfrac{CK}{CF}.$

同理 $\because \Delta CDK \sim \Delta CFD$, $\therefore \left(\dfrac{DK}{DF}\right)^2 = \dfrac{CK}{CD} \cdot \dfrac{CD}{CF} = \dfrac{CK}{CF}.$

$\therefore \left(\dfrac{QK}{QF}\right)^2 = \left(\dfrac{DK}{DF}\right)^2$, 即 $QK \cdot DF = DK \cdot QF$.

在圓內接四邊形 $DKQF$ 中, 由托勒密定理知:$DK \cdot QF + QK \cdot DF = KF \cdot QD.$

$\therefore KF \cdot QD = 2DK \cdot QF$.

同理,在圓內接四邊形 $DQHF$ 中有 $HD \cdot QF = 2FH \cdot QD$.

兩式相乘得:$KF \cdot QD \cdot HD \cdot QF = 4DK \cdot QF \cdot FH \cdot QD$.

$\therefore KF \cdot HD = 4FH \cdot DK$.

在圓內接四邊形 $FDKH$ 中, 由托勒密定理知:$FH \cdot DK + HK \cdot FD = KF \cdot HD$.

$\therefore FH \cdot DK + FD \cdot HK = 4FH \cdot DK$, 即$\dfrac{FD \cdot HK}{FH \cdot DK} = 3$.

下面,我們再看一個複雜一點的例子。

[**例子** 2] 如圖 3,已知 $ABCD$ 是圓內接四邊形,$\angle BAD$、$\angle BCD$ 的角平分線的交點 K 在對角線 BD 上。M 是 BD 的中點,過點 C 作 $CP \parallel AD$ 交 AM 延長線於點 P,

求證: ΔDPC 是等腰三角形。(2014 年摩爾多瓦數學奧林匹克幾何題)

證明:連結 MC, DP, AC .

$\because AK$ 平分 $\angle BAD$, CK 平分 $\angle BCD$.

$\therefore \dfrac{AB}{AD} = \dfrac{BK}{DK} = \dfrac{BC}{CD}$. $\therefore AB \cdot CD = AD \cdot BC$.

在圓內接四邊形 $ABCD$ 中, 由托勒密定理知:
$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$.

又 $\because M$ 是 BD 的中點, $\therefore 2AD \cdot BC = AC \cdot BD = AC \cdot 2BM = AC \cdot 2DM$.

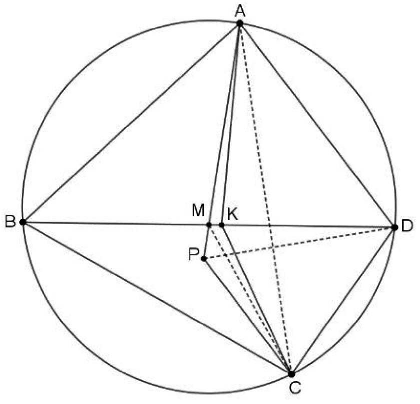


圖3

由 $AD \cdot BC = AC \cdot BM$ 得:$\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{BM}{AD}$.

$\because \angle MBC = \angle DAC$, $\therefore \triangle BMC \sim \triangle ADC$, $\therefore \angle BMC = \angle ADC.$

又 $CP \parallel AD$, $\therefore \angle ADC + \angle DCP = 180°$.

$\because \angle BMC + \angle CMD = 180°$, $\therefore \angle CMD = \angle DCP$. ①

由 $AD \cdot BC = AC \cdot DM$ 得:$\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{DM}{BC}$.

又 $\because \angle ACB = \angle ADM$, $\therefore \triangle ABC \sim \triangle AMD$.

$\therefore \angle ABC = \angle AMD$.

$\because \angle ABC + \angle ADC = \angle AMD + \angle ADC = 180°$,且 $\angle ADC + \angle DCP = 180°$.

$\therefore \angle AMD = \angle DCP$. $\therefore C$、D、M、P 四點共圓.

$\therefore \angle CMD = \angle DPC$.　　②

由 ① 和 ② 得:$\angle DCP = \angle DPC$, $\therefore \triangle DPC$ 是等腰三角形.

［**例子** 3］如圖 4,已知 $\triangle ABC$ 為 $\angle C = 90°$ 的直角三角形。$CD \perp AB$,垂足為 D。圓 O 是 ΔBCD 的外接圓,圓 O' 是位於 ΔACD 中的圓,它與線段 AB 和 AC 相切於點 M 和 N 點,並與圓 O 相切於點 P。

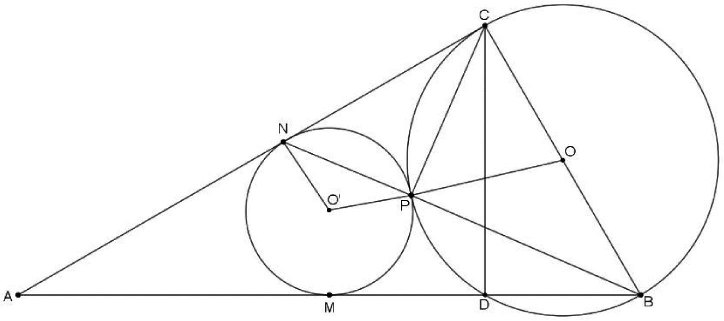


圖4

求證: $BD \cdot CN + BC \cdot DM = CD \cdot BM$.

這是一道較困難的題目。爲證明此題,我們需要把托勒密定理推廣爲開世定理。

二. 開世定理

開世定理: 已知 $\odot O_1$、$\odot O_2$、$\odot O_3$ 和 $\odot O_4$ 分別與 $\odot O$ 內切,並在 $\odot O$ 內按順時針方向排列,t_{ij} 是 $\odot O_i$ 和 $\odot O_j$ 之間的外公切線 ($i,j \in \{1,2,3,4$ 且 $i \neq j\}$),則 $t_{12}t_{34} + t_{23}t_{14} = t_{13}t_{24}$

證明: 如圖 5 所示,設 $\odot O_i$ 的半徑是 R_i, $\odot O_i$ 與 $\odot O$ 的切點為 K_i,點 C 是 $\odot O$ 上任意一點且與 K_i 不重合. 由外公切線長定理得:

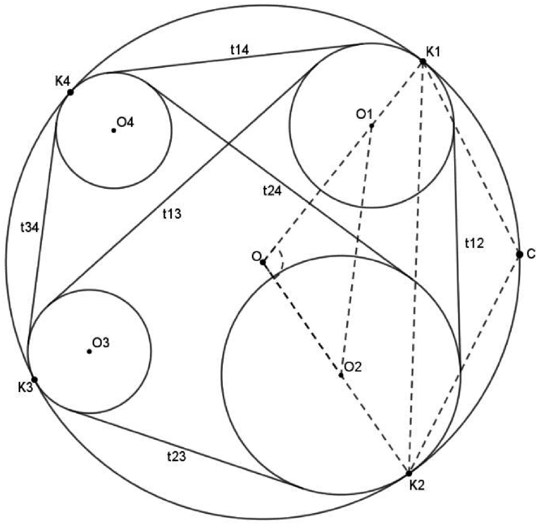


圖5

$t_{ij} = \sqrt{O_iO_j^2 - (R_i - R_j)^2}$.　　①

在 ΔO_iOO_j 中,由餘弦定理知:

$O_iO_j^2 = OO_i^2 + OO_j^2 - 2OO_i \cdot OO_j \cdot \cos\angle O_iOO_j$.　　②

$\because \odot O_i$ 與 $\odot O$ 相切.

$\therefore OO_i = R - R_i$, $\angle O_iOO_j = \angle K_iOK_j$.　③

在 $\angle K_iCK_j$ 中,

$\because \angle K_iOK_j = 2(180° - \angle K_iCK_j)$

$\therefore$ 由正弦定理知:$K_iK_j = 2R \cdot sin\angle K_iCK_j = 2R \cdot sin\dfrac{\angle K_iOK_j}{2}$,即 $sin\dfrac{\angle K_iOK_j}{2} = \dfrac{K_iK_j}{2R}$.

$\therefore cos\angle K_iOK_j = 1 - 2sin^2\dfrac{\angle K_iOK_j}{2} = 1 - 2\cdot\left(\dfrac{K_iK_j}{2R}\right)^2 = 1 - \dfrac{K_iK_j^{\,2}}{2R^2}$.　　④

把 ③ 和 ④ 代入式子 ②:

$$O_iO_j^{\,2} = (R - R_i)^2 + (R - R_j)^2 - 2(R - R_i)(R - R_j)\left(1 - \frac{K_iK_j^{\,2}}{2R^2}\right)$$

$$= (R - R_i)^2 + (R - R_j)^2 - 2(R - R_i)(R - R_j) + (R - R_i)(R - R_j)\cdot\frac{K_iK_j^{\,2}}{R^2} \qquad ⑤$$

$$= [(R - R_i) - (R - R_j)]^2 + (R - R_i)(R - R_j)\cdot\frac{K_iK_j^{\,2}}{R^2}$$

$$= (R_i - r_j)^2 + (R - R_i)(R - R_j)\cdot\frac{K_iK_j^{\,2}}{R^2}. \qquad ⑤$$

$\therefore$ 把 ⑤ 代入式子 ① 得:$t_{ij} = \sqrt{O_iO_j^{\,2} - (R_i - R_j)^2} = \dfrac{\sqrt{R - R_i}\cdot\sqrt{R - R_j}\cdot K_iK_j}{R}$.

$\therefore t_{12}t_{34} + t_{23}t_{14} = \dfrac{1}{R^2}\cdot\sqrt{R - R_1}\cdot\sqrt{R - R_2}\cdot\sqrt{R - R_3}\cdot\sqrt{R - R_4}\cdot(K_1K_2\cdot K_3K_4 + K_2K_3\cdot K_1K_4)$.

$t_{13}t_{24} = \dfrac{1}{R^2}\cdot\sqrt{R - R_1}\cdot\sqrt{R - R_2}\cdot\sqrt{R - R_3}\cdot\sqrt{R - R_4}\cdot K_1K_3\cdot K_2K_4$.

$\because K_i$ 是小圓與大圓的切點,

$\therefore$ 由托勒密定理知:$K_1K_2\cdot K_3K_4 + K_2K_3\cdot K_1K_4 = K_1K_3\cdot K_2K_4$.

$\therefore t_{12}t_{34} + t_{23}t_{14} = t_{13}t_{24}$.

以上描述的是開世定理的標準形式,下面我們嘗試把開世定理進一步拓展。

若將圓中的4 個內切圓逐一改為外切圓,那麼它們的外公切線是否也存在相同的等量關係呢?

問題 1:如圖 6,若 $\odot O_4$ 與 $\odot O$ 外切,$\odot O_1$、$\odot O_2$、$\odot O_3$ 分別與 $\odot O$ 內切,其他條件保持不變,則 $t_{12}t_{34} + t_{23}t_{14} = t_{13}t_{24}$ 是否成立?

由外公切線長定理,得:

$t_{ij} = \sqrt{O_iO_j^{\,2} - (R_i - R_j)^2}$.　　①

在 ΔO_iOO_j 中,由餘弦定理知,

$O_iO_j^{\,2} = OO_i^{\,2} + OO_j^{\,2} - 2OO_i\cdot OO_j\cdot cos\angle O_iOO_j$.　　②

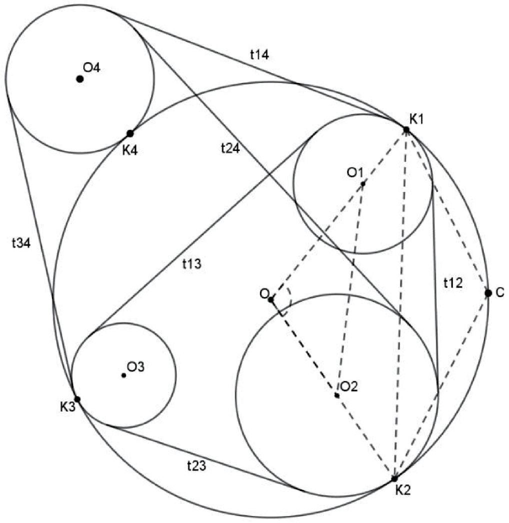


圖6

$\because \odot O_i$ 與 $\odot O$ 相切$(i \in \{1,2,3,4\})$，

$\therefore OO_i = R - R_i, OO_4 = R + R_4 (i \in \{1,2,3\})$，　　③

$\therefore \cos\angle K_iOK_j = 1 - \dfrac{{K_iK_j}^2}{2R^2}(i,j \in \{1,2,3,4\}$ 且 $i \neq j)$，　　④

對於 $i,j \in \{1,2,3\}$ 且 $i \neq j$，把 ③ 和 ④ 代入式子 ②：

$$O_iO_j^{\,2} = (R_i - R_j)^2 + (R - R_i)(R - R_j) \cdot \frac{{K_iK_j}^2}{R^2}$$

$$\begin{aligned} O_iO_4^{\,2} &= (R - R_i)^2 + (R + R_4)^2 - 2(R - R_i)(R + R_4)\left(1 - \frac{{K_iK_4}^2}{2R^2}\right) \\ &= (R - R_i)^2 + (R + R_4)^2 - 2(R - R_i)(R + R_4) + (R - R_i)(R + R_4) \cdot \frac{{K_iK_4}^2}{R^2} \\ &= [(R - R_i) - (R + R_4)]^2 + (R - R_i)(R + R_4) \cdot \frac{{K_iK_4}^2}{R^2} \\ &= (R_i + R_4)^2 + (R - R_i)(R + R_4) \cdot \frac{{K_iK_4}^2}{R^2} \qquad ⑥ \end{aligned}$$

$$\therefore\ t_{ij} = \sqrt{O_iO_j^{\,2} - (R_i - R_j)^2} = \frac{\sqrt{R - R_i} \cdot \sqrt{R - R_j} \cdot K_iK_j}{R}$$

$$t_{i4} = \sqrt{O_iO_4^{\,2} - (R_i - R_4)^2} = \sqrt{4R_iR_4 + (R - R_i)(R + R_4) \cdot \frac{{K_iK_4}^2}{R^2}}$$

我們發現 t_{i4} 中的 $(R_i - R_4)^2$ 與 $O_iO_4^{\,2}$ 中的 $(R_i + R_4)^2$ 不能完全互相抵消，導致最後 $t_{12}t_{34} + t_{23}t_{14} = t_{13}t_{24}$ 不成立。爲了改善這個問題，如果我們能夠把 t_{i4} 中的 $(R_i - R_4)^2$ 變成 $(R_i + R_4)^2$，這時 t_{i4} 也就能化成形如 t_{ij} 的形式。那麼，把 t_{i4} 改爲 $\odot O_i$ 與 $\odot O_4$ 的內公切線，情況又如何呢？

問題2:若$t_{ij}(i,j\in\{1,2,3\}$且$i\neq j)$爲$\odot O_i$與$\odot O_j$的外公切線,t_{i4}為$\odot O_i$與$\odot O_4$的內公切線,則$t_{12}t_{34}+t_{23}t_{14}=t_{13}t_{24}$是否成立?

這時$t_{i4}=\sqrt{O_iO_4^{\ 2}-(R_i+R_4)^2}=\sqrt{(R-R_i)(R+R_4)\cdot\dfrac{K_iK_4^{\ 2}}{R^2}}$

$=\dfrac{\sqrt{R-R_i}\cdot\sqrt{R+R_4}\cdot K_iK_4}{R}$, t_{ij}的値同上。

$\therefore$ 則$t_{12}t_{34}+t_{23}t_{14}=\dfrac{1}{R^2}\cdot\sqrt{R-R_1}\cdot\sqrt{R-R_2}\cdot\sqrt{R-R_3}\cdot\sqrt{R+R_4}\cdot(K_1K_2\cdot K_3K_4$

$+K_2K_3\cdot K_1K_4)$.

$t_{13}t_{24}=\dfrac{1}{R^2}\cdot\sqrt{R-R_1}\cdot\sqrt{R-R_3}\cdot\sqrt{R-R_2}\cdot\sqrt{R+R_4}\cdot K_1K_3\cdot K_2K_4$.

$\therefore t_{12}t_{34}+t_{23}t_{14}=t_{13}t_{24}$成立.

接下來,我們試著討論更多$\odot O_i$與$\odot O$外切和內切的情況,看看是否也有相同的關係?

問題3:如圖7,若$\odot O_4$和$\odot O_3$分別與$\odot O$外切,$\odot O_1$和$\odot O_2$分別與$\odot O$內切,t_{12},t_{34}爲對應兩圓的外公切線,$t_{13},t_{14},t_{23},t_{24}$分別爲對應兩圓的內公切線,$\odot O_1$、$\odot O_2$、$\odot O_3$和$\odot O_4$按順時針排列,則$t_{12}t_{34}+t_{23}t_{14}=t_{13}t_{24}$是否成立?

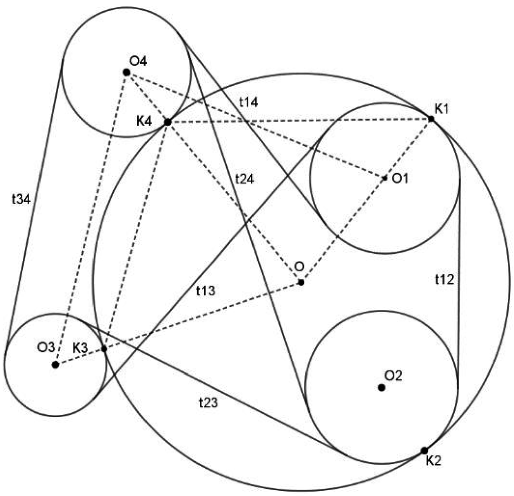


圖7

設$\odot O_i$的半徑是R_i,$\odot O_i$與$\odot O$的切點分別為K_i。

由外公切線長及內公切線長定理,得:

$t_{12}=\sqrt{O_1O_2^{\ 2}-(R_1-R_2)^2}$,

$t_{34}=\sqrt{O_3O_4^{\ 2}-(R_3-R_4)^2}$.

$t_{ij}=\sqrt{O_iO_j^{\ 2}-(R_i-R_j)^2}(i\in\{1,2\},j\in\{3,4\})$. ①

由問題1及問題2的結論,同理可得:

$$O_1O_2^{\ 2}=(R-R_1)^2+(R-R_2)^2-2(R-R_1)(R-R_2)\left(1-\frac{K_1K_2^{\ 2}}{2R^2}\right)$$

$$=(R_1-R_2)^2+(R-R_1)(R-R_2)\cdot\frac{K_1K_2^{\ 2}}{R^2}, \quad ②$$

$$O_iO_j^{\ 2}=(R-R_i)^2+(R+R_j)^2-2(R-R_j)(R+R_j)\left(1-\frac{K_iK_j^{\ 2}}{2R^2}\right)$$

$$=(R_i+R_j)^2+(R-R_i)(R+R_j)\cdot\frac{K_iK_j^{\ 2}}{R^2}(i\in\{1,2\},j\in\{3,4\}), \quad ③$$

$$O_3O_4^{\ 2} = (R - R_3)^2 + (R + R_4)^2 - 2(R - R_3)(R + R_4)\left(1 - \frac{K_3K_4^{\ 2}}{2R^2}\right)$$

$$= (R_3 + R_4)^2 + (R - R_3)(R + R_4) \cdot \frac{K_3K_4^{\ 2}}{R^2} \qquad ④$$

∴ 把 ②、③ 和 ④ 代入式子 ①，得：

$$t_{12} = \sqrt{O_1O_2^{\ 2} - (R_1 - R_2)^2} = \frac{\sqrt{R - R_1} \cdot \sqrt{R - R_2} \cdot K_1K_2}{R}$$

$$t_{ij} = \sqrt{O_iO_j^{\ 2} - (R_i - R_j)^2} = \frac{\sqrt{R - R_i} \cdot \sqrt{R + R_j} \cdot K_iK_j}{R}$$

$$t_{34} = \sqrt{O_3O_4^{\ 2} - (R_3 - R_4)^2} = \frac{\sqrt{R + R_3} \cdot \sqrt{R + R_4} \cdot K_3K_4}{R}$$

其中 $i \in \{1,2\}, j \in \{3,4\}$.

$\therefore t_{12}t_{34} + t_{23}t_{14} = \frac{1}{R_2} \cdot \sqrt{R - R_1} \cdot \sqrt{R - R_2} \cdot \sqrt{R + R_3} \cdot \sqrt{R + R_4} \cdot (K_1K_2 \cdot K_3K_4 + K_2K_3 \cdot K_1K_4)$.

$t_{13}t_{24} = \frac{1}{R^2} \cdot \sqrt{R - R_1} \cdot \sqrt{R + R_3} \cdot \sqrt{R - R_2} \cdot \sqrt{R + R_4} \cdot K_1K_3 \cdot K_2K_4$.

$\therefore t_{12}t_{34} + t_{23}t_{14} = t_{13}t_{24}$ 成立.

問題4：如圖 8，若有 $\odot O_2$、$\odot O_3$ 和 $\odot O_4$ 分別與 $\odot O$ 外切，$\odot O_1$ 與 $\odot O$ 內切，t_{23}, t_{24}, t_{34} 爲對應兩圓的外公切線，t_{12}, t_{13}, t_{14} 分別爲對應兩圓的內公切線，$\odot O_1$、$\odot O_2$、$\odot O$ 和 $\odot O_4$ 按順時針排列，則 $t_{12}t_{34} + t_{23}t_{14} = t_{13}t_{24}$ 是否成立?

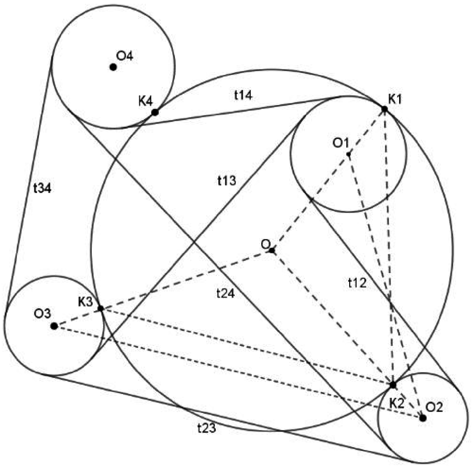


圖8

設 $\odot O_i$ 的半徑是 R_i，$\odot O_i$ 與 $\odot O$ 的切點分別為 K_i. 由前面的結論，對於 $i, j \in \{2,3,4\}$ 且 $i \neq j$，同理可得：

$$O_iO_j^{\ 2} = (R + R_i)^2 + (R + R_j)^2 - 2(R + R_i)(R + R_j)\left(1 - \frac{K_iK_j^{\ 2}}{2R^2}\right)$$

$$= (R_i - R_j)^2 + (R + R_i)(R + R_j) \cdot \frac{K_iK_j^{\ 2}}{R^2}$$

$$O_1O_j^{\ 2} = (R - R_1)^2 + (R + R_j)^2 - 2(R - R_1)(R + R_j)\left(1 - \frac{K_1K_j^{\ 2}}{2R^2}\right)$$

$$= (R_1 - R_j)^2 + (R - R_1)(R + R_j) \cdot \frac{K_1K_j^{\ 2}}{R^2}$$

於是

$$t_{ij} = \sqrt{O_iO_j^{\ 2} - (R_i - R_j)^2} = \frac{\sqrt{R - R_i}\cdot\sqrt{R - R_j}\cdot K_iK_j}{R}$$

$$t_{1j} = \sqrt{O_iO_j^{\ 2} - (R_1 + R_j)^2} = \frac{\sqrt{R - R_1}\cdot\sqrt{R + R_j}\cdot K_iK_j}{R}$$

$\therefore t_{12}t_{34} + t_{23}t_{14} = \frac{1}{R_2}\cdot\sqrt{R - R_1}\cdot\sqrt{R + R_2}\cdot\sqrt{R + R_3}\cdot\sqrt{R + R_4}\cdot(K_1K_2\cdot K_3K_4 + K_2K_3\cdot K_1K_4)$.

$t_{13}t_{24} = \frac{1}{R^2}\cdot\sqrt{R - R_1}\cdot\sqrt{R + R_3}\cdot\sqrt{R + R_2}\cdot\sqrt{R + R_4}\cdot K_1K_3\cdot K_2K_4$.

$\therefore t_{12}t_{34} + t_{23}t_{14} = t_{13}t_{24}$ 成立.

最後,我們考慮四個圓均與 $\odot O$ 外切的情況。

問題5:如圖 9,若有 $\odot O_1$、$\odot O_2$、$\odot O_3$ 和 $\odot O_4$ 分別與 $\odot O$ 外切,t_{ij} 是 $\odot O_i$ 和 $\odot O_j$ 的外公切線($i, j \in \{1,2,3,4$ 且 $i \neq j\}$),$\odot O_1$、$\odot O_2$、$\odot O_3$ 和 $\odot O_4$ 按順時針排列,則 $t_{12}t_{34} + t_{23}t_{14} = t_{13}t_{24}$ 是否成立?

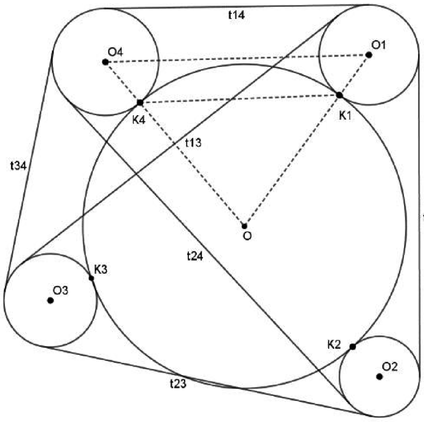


圖9

設 $\odot O_i$ 的半徑是 R_i, $\odot O_i$ 與 $\odot O$ 的切點分別為 K_i.

$$O_iO_j^{\ 2} = (R + R_i)^2 + (R + R_j)^2 - 2(R + R_i)(R + R_j)\left(1 - \frac{K_iK_j^{\ 2}}{2R^2}\right)$$

$$= (R_i - R_j)^2 + (R + R_i)(R + R_j)\cdot\frac{K_iK_1^{\ 2}}{R^2}$$

於是

$$t_{ij} = \sqrt{O_iO_j^{\ 2} - (R_i - R_j)^2} = \frac{\sqrt{R + R_i}\cdot\sqrt{R + R_j}\cdot K_iK_j}{R}$$

$\therefore t_{12}t_{34} + t_{23}t_{14} = \frac{1}{R_2}\cdot\sqrt{R + R_1}\cdot\sqrt{R + R_2}\cdot\sqrt{R + R_3}\cdot\sqrt{R + R_4}\cdot(K_1K_2\cdot K_3K_4 + K_2K_3\cdot K_1K_4)$.

$t_{13}t_{24} = \frac{1}{R^2}\cdot\sqrt{R + R_1}\cdot\sqrt{R + R_2}\cdot\sqrt{R + R_3}\cdot\sqrt{R + R_4}\cdot K_1K_3\cdot K_2K_4$.

$\therefore t_{12}t_{34} + t_{23}t_{14} = t_{13}t_{24}$ 成立.

爲綜合開世定理的以上四種情況,我們用下面五個表格描述四個圓之間取捨外公切線或內公切線的情況。當 $\odot O_1$、$\odot O_2$、$\odot O_3$、$\odot O_4$ 為內切圓時,有

	⊙ O_1	⊙ O_2	⊙ O_3	⊙ O_4
⊙ O_1		外公切線	外公切線	外公切線
⊙ O_2	外公切線		外公切線	外公切線
⊙ O_3	外公切線	外公切線		外公切線
⊙ O_4	外公切線	外公切線	外公切線	

當 ⊙O_1、⊙O_2、⊙O_3 內切，⊙O_4 為外切圓時，有

	⊙ O_1	⊙ O_2	⊙ O_3	⊙ O_4
⊙ O_1		外公切線	外公切線	內公切線
⊙ O_2	外公切線		外公切線	內公切線
⊙ O_3	外公切線	外公切線		內公切線
⊙ O_4	內公切線	內公切線	內公切線	

當 ⊙O_1、⊙O_2 內切圓，⊙O_3、⊙O_4 為外切圓時，有

	⊙ O_1	⊙ O_2	⊙ O_3	⊙ O_4
⊙ O_1		外公切線	內公切線	內公切線
⊙ O_2	外公切線		內公切線	內公切線
⊙ O_3	內公切線	內公切線		外公切線
⊙ O_4	內公切線	內公切線	外公切線	

當 ⊙O_1 內切圓，⊙O_2、⊙O_3、⊙O_4 為外切圓時，有

	⊙ O_1	⊙ O_2	⊙ O_3	⊙ O_4
⊙ O_1		內公切線	內公切線	內公切線
⊙ O_2	內公切線		外公切線	外公切線
⊙ O_3	內公切線	外公切線		外公切線
⊙ O_4	內公切線	外公切線	外公切線	

當 ⊙O_1、⊙O_2、⊙O_3、⊙O_4 為外切圓時，有

	⊙ O_1	⊙ O_2	⊙ O_3	⊙ O_4
⊙ O_1		外公切線	外公切線	外公切線
⊙ O_2	外公切線		外公切線	外公切線
⊙ O_3	外公切線	外公切線		外公切線
⊙ O_4	外公切線	外公切線	外公切線	

不難看出，當 $\odot O_i$ 和 $\odot O_j$ 都同為外切圓或內切圓時，t_{ij} 表示 $\odot O_i$ 和 $\odot O_j$ 的外公切線；當 $\odot O_i$ 和 $\odot O_j$ 中的一個爲外切圓、另一個爲內切圓時，t_{ij} 表示 $\odot O_i$ 和 $\odot O_j$ 的內公切線。下面我們證明前面的**例子** 3。

分析：題目中似乎符合開世定理的幾何條件，我們可以考慮把點 B、C、D 退化成三個半徑為 0 且與 $\odot O$ 相切的圓。

證明：把點 B、C、D 看成三個半徑為 0 的退化圓，按順時針排列的 $\odot B$、$\odot D$、$\odot O'$ 和 $\odot C$ 都分別與 $\odot O$ 外切。每兩個圓之間的外公切線爲 $t_{BD} = BD$，$t_{O'C} = CN$，$t_{BC} = BC$，$t_{DO'} = DM$，$t_{DC} = CD$ 和 $t_{BO'} = BM$。

由開世定理可得：$t_{BD} \cdot t_{O'C} + t_{BC} \cdot t_{DO'} = t_{DC} \cdot t_{BO'}$，即 $BD \cdot CN + BC \cdot DM = CD \cdot BM$。

［**例子** 4］如圖 10，已知圓 O 的直徑為 AB，點 P 和點 Q 是圓 O 上的兩點，且分別在 AB 的兩側。$QT \perp AB$，垂足為 T。設直徑為 TA 和 TB 的兩圓 O_1 和 O_2 內切於圓 O。PC 和 PD 分別是 P 到圓 O_1 和圓 O_2 的切線。

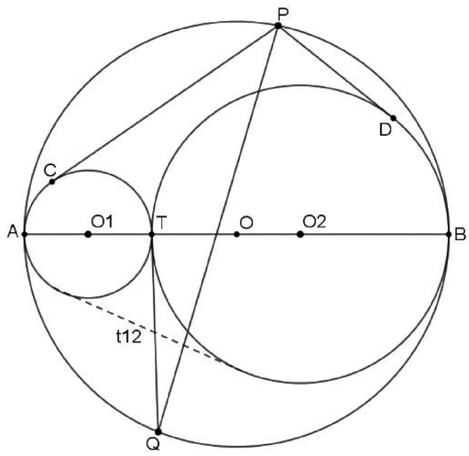


圖10

求證：$PC + PD = PQ$。

分析：仿照上題，把點 P 和點 Q 看成是退化圓，不難發現點 Q 與圓 O_1 和 O_2 的切線都是 QT。

證明：把點 P，Q 看成是與 $\odot O$ 相切且半徑為 0 的退化圓。設圓 O_1 和 O_2 的外公切線為 t_{12}，那麼 $\odot O_1$、$\odot O_2$、$\odot P$ 和 $\odot Q$ 都內切於 $\odot O$。

由開世定理，可得：

$PC \cdot QT + PD \cdot QT = PQ \cdot t_{12}$，則 $PC \cdot PD = PQ \cdot \dfrac{t_{12}}{QT}$.

而 $t_{12} = \sqrt{(TO_1 + TO_2)^2 - (TO_2 - TO_1)^2} = \sqrt{4TO_1 \cdot TO_2} = \sqrt{TA \cdot TB}$.

$\because QT \perp AB$，$\angle AQB = 90°$，$\therefore$ 由射影定理知 $QT^2 = TA \cdot TB$，即 $QT = \sqrt{TA \cdot TB}$.

$\therefore PC + PD = PQ \cdot \dfrac{QT}{QT} = PQ$.

三. 總結

本文把托勒密定理推廣到開世定理，讓托勒密定理的等式得以在內外公切線中重新展現。圓是一個美麗對稱的幾何圖形，讓圓退化成一點，不但不會影響開世定理的幾何證題，更讓證明過程妙趣橫生。在平面幾何問題中，當遇到圓內接四邊形時，利用托勒密定理可以

更快地找出其中的等量關係,甚至可轉變為比例關係。而當遇到兩個以上的圓時,我們可以把圓上的點退化成半徑為 0 的圓以補充不足四個圓的情況,這樣就可以使用開世定理找出四個圓的內外公切線長的等量關係。本文給出了開世定理的證明及其一些優雅的應用,當中更多有趣的應用則有待讀者自行發掘。

正四棱錐的外接球和內切球的探究

勞校中學高二　劉源，易正欣　　指導老師　魏均僑

棱錐的外接球和內接球是高考和數學競賽中立體幾何方向的熱門考點,使用一些常用結論可以有效縮短解題的時間。本文將探討正四棱錐外接球和內切球的重要性質和在高考眞題中的應用。

一、正四棱錐的外接球球心和內切球球心作法

1. 1 正四棱錐的外接球球心作法

如圖1所示，在正四棱錐$P-ABCD$中的ΔPBD，分別作PB,PD,BD的垂直平分綫TO，QO,RO，三綫共點於點O,則O是ΔPBD的外心，同理可得O是ΔPAC的外心，故O為正四棱錐$P-ABCD$的外接球球心.

1. 2 正四棱錐的內切球球心作法

如圖2所示，在正四棱錐$P-ABCD$中，分別作ΔPAB和ΔPCD在AB,CD上的高PR，PQ，再作ΔPRQ的三條角平分綫，三綫共點於I，則I是ΔPRQ的內心. 由對稱性,同理可得I是AD中點、BC中點與點P三頂點所構成三角形的內心，則點I是四棱錐$P-ABCD$的內切球球心.

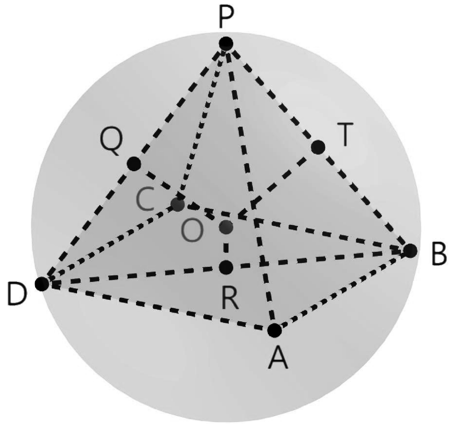


圖1

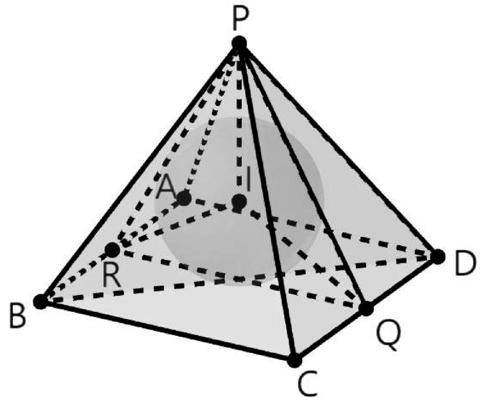


圖2

現在我們確定了正四棱錐外接球球心和內切球球心的位置，只需再找出外接球半徑和內切球半徑就可以確定外接球和內切球的大小，因此我們接下來探索正四棱錐外接球半徑和內切球半徑.

二、正四棱錐的外接球半徑和內切球半徑

2.1 正四棱錐的外接球半徑

問題1:如圖3所示，在正四棱錐$P-ABCD$中，點O為外接球球心，點N為BD中點，點H為BP中點，設$AB=a,PA=b$求外接球半徑r的長.

解:$\because$ 點O為外接球球心,$\therefore r=OP$.

由勾股定理可得，

$$BN=\frac{1}{2}BD=\frac{\sqrt{2}}{2}a,$$

$$PN=\sqrt{BP^2-BN^2}=\sqrt{b^2-\frac{1}{2}a^2}.$$

$\because$ 點H為BP中點,$OB=OP$, $\therefore OH\perp BP$.

因此，外接球半徑長爲

$$r=OP=\frac{PH}{\cos\angle BPN}=\frac{PH\cdot BP}{PN}=\frac{\frac{1}{2}b\cdot b}{\sqrt{b^2-\frac{1}{2}a^2}}=\frac{b^2}{\sqrt{4b^2-2a^2}}. \qquad (1.1)$$

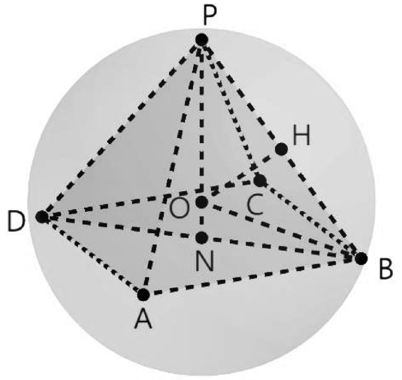


圖3

2.2 正四棱錐的內切球半徑

問題2:如圖4所示，在正四棱錐$P-ABCD$中，點I為內切球球心，點O為BD中點，點H為AB中點，在PH取一點G使得$IG\perp PH$於點G，設$AB=a,PA=b$，求外接球半徑r的長.

解:$\because IG\perp PH,HO\perp PO,\angle HPO=\angle IPG,$

$\therefore \triangle HPO\sim\triangle IPG,$

$$\therefore \frac{PI}{PH}=\frac{IG}{HO}. \qquad (1.2)$$

$\because H$為AB中點,$PA=PB$,$\therefore PH\perp AB.$

由勾股定理可得，

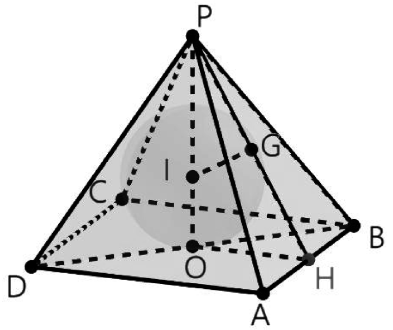


圖4

$$PH = \sqrt{b^2 - \frac{1}{4}a^2}, PO = \sqrt{PH^2 - HO^2} = \sqrt{b^2 - \frac{1}{2}a^2}$$

注意到 $r = IO$ 且 $PI = PO - r$，代入(1.2) 中得，

$$\frac{\sqrt{b^2 - \frac{1}{2}a^2} - r}{\sqrt{b^2 - \frac{1}{4}a^2}} = \frac{r}{\frac{a}{2}},$$

解得外接球半徑長爲

$$r = \frac{a\sqrt{b^2 - \frac{1}{2}a^2}}{a + 2\sqrt{b^2 - \frac{1}{4}a^2}} = \frac{a\sqrt{4b^2 - 2a^2}}{2a + 2\sqrt{4b^2 - a^2}}. \qquad (1.3)$$

三、驗證

基於第二部分進行的証明，我們嘗試在 *Geogebra* 中驗証這兩個結論。

3.1 外接球

利用第一部分的作法，畫出正四棱錐 $P-ABCD$ 的外接球.（如圖 5）

經過測量可得 $a = 2.83$，$b = 3.2$，代入公式(1.1) 可得，

$$r = \frac{3.2^2}{\sqrt{4 \times 3.2^2 - 2 \times 2.83^2}} \approx 2.05.$$

可見我們用公式(1.1) 計算出的答案與圖中數值一致.

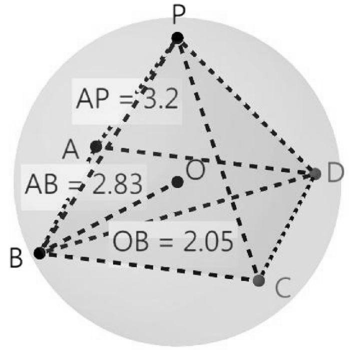


圖5

3.2 內切球

利用第一部分的作法，畫出正四棱錐 $P-ABCD$ 的內切球。(如圖 6)

經過測量可得 $a = 2.83$，$b = 3.2$，代入公式(1.3) 可得，

$$r = \frac{2.83 \times \sqrt{4 \times 3.2^2 - 2 \times 2.83^2}}{2 \times 2.83 + 2\sqrt{4 \times 3.2^2 - 2.83^2}} \approx 0.82$$

可見我們用公式(1.3) 計算出的答案與圖中數值一致.

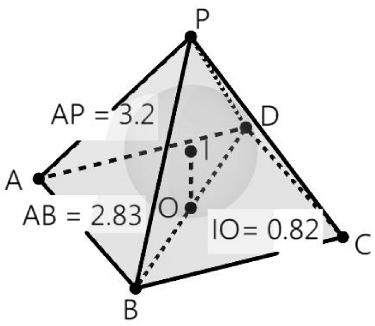


圖6

四、應用

問題 3：已知正四棱錐的側棱長為 l，其各頂點都在同一球面上. 若該球的體積為 36π，且 $3 \leq l \leq 3\sqrt{3}$，求該正四棱錐的體積的取值範圍.（2022 年新高考 Ⅰ 卷）

分析：下面給出兩種解法，解法1是使用三角函數的原始解法，解法2則使用我們推導的公式(1.1)，不難發現解法 2 相比解法 1 更爲簡潔易懂.

解法 1：設四棱錐 $P-ABCD$ 外接球半徑 OB 和側棱 PB 的夾角 $\angle PBO$ 為 θ，高為 h，底面的邊長為 a，外接球半徑爲 r，M 爲 BD 中點.（如圖 7）

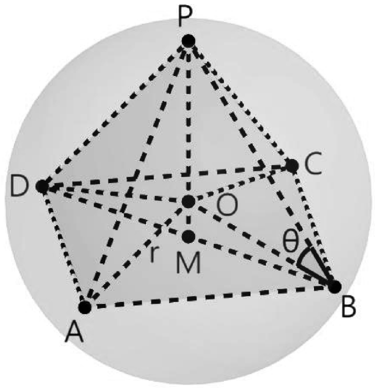


圖7

$\because$ 外接球的體積為 36π，$\therefore$ $\frac{4}{3}\pi r^3 = 36\pi$，解得 $r = 3$.

由餘弦定理及 $3 \leq l \leq 3\sqrt{3}$ 得，

$$cos\theta = \frac{3^2 + l^2 - 3^2}{2 \cdot 3 \cdot l} = \frac{l}{6} \in \left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right].$$

則 $l = 6cos\theta$. 而 $BM = BPsin\angle OPB = BPsin\theta$，則

$$BM = \frac{\sqrt{2}}{2}a = l \cdot sin\theta = 6sin\theta cos\theta,$$

也就是說 $a = 6\sqrt{2}sin\theta cos\theta$，又有

$$h = PM = \frac{BM}{tan\theta} = \frac{6sin\theta cos\theta}{tan\theta} = 6cos^2\theta,$$

故 $V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}a^2h = \frac{1}{3}(6\sqrt{2}sin\theta cos\theta)^2(6cos^2\theta) = 144(sin\theta cos^2\theta)^2$.

下面考察 $sin\theta cos^2\theta$ 的取值範圍. 設 $x = sin\theta \in \left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$，又設

$$f(x) = sin\theta cos^2\theta = sin\theta(1 - sin^2\theta) = -x^3 + x,$$

則 $f'(x) = -3x^2 + 1$.

當 $x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$時，$f'(x) \geq 0$；當 $x \in \left[\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$時，$f'(x) \leq 0$.

於是，$f(x)$ 最大值爲 $f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{9}$，$f(x)$ 最小值爲 $min\left\{f\left(\frac{1}{2}\right), f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\} = f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{8}$.

因此，$V_{max} = 144 \times \left(\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)^2 = \frac{64}{3}$，$V_{min} = 144 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{8}\right)^2 = \frac{27}{4}$.

綜上所述，$V \in \left[\frac{27}{4}, \frac{64}{3}\right]$.

解法 2：設高為 h，底面的邊長為 a.（如圖 7）

$\because$ 外接球的體積為 36π，$\therefore$ $\frac{4}{3}\pi r^3 = 36\pi$，解得 $r = 3$.

由公式(1.1) 得，

$$\frac{l^2}{\sqrt{4l^2-2a^2}}=3，即\ a^2=\frac{36l^2-l^4}{18}.$$

由勾股定理得，$h=\sqrt{l^2-\frac{1}{2}a^2}=\sqrt{\frac{l^4}{36}}=\frac{l^2}{6}$，因此

$$V=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}a^2h=\frac{36l^4-l^6}{324}.$$

設 $f(l)=\frac{36l^4-l^6}{324}$，其中 $l\in[3,3\sqrt{3}]$，則

$$f'(l)=\frac{144l^3-6l^5}{324}=\frac{l^3(24-l^2)}{54},$$

當 $l\in[3,2\sqrt{6}]$時，$f'(l)\geq 0$；當 $x\in[2\sqrt{6},3\sqrt{3}]$時，$f'(l)\leq 0$，則

$$V_{min}=f(3)=\frac{27}{4},V_{max}=f(2\sqrt{6})=\frac{64}{3}.$$

綜上所述，$V\in\left[\frac{27}{4},\frac{64}{3}\right]$.

五、總結

本文推導了正四棱錐外接球和內切球的作法及半徑的計算公式，倘若把公式運用於數學公開考試或競賽的選擇題或填空題中，不但可以加快解題的速度，也可能給出一個全新的解題思路。外接球和內切球半徑的計算公式可以把題設提供的條件轉化爲最多只含有兩個變量的函數，從而避免了立體幾何中繁瑣的三角函數的運算及轉化。因篇幅有限，本文僅給出了正四棱錐外接球半徑的一些應用，對於內切球及更多有趣的性質與應用則有待讀者自行發掘。

以《新思維數學一上》教材為教學設計的過程與反思

澳門大學教育學院四年級實習生　陳思桑
澳門大學教育學院實習視導導師　伍劍佐博士

教學單元:第十三課 立體圖形
教材來源:《澳門新思維數學》一上
教學年級:小學一年級
單元教學目標:

1. 學生能夠認識柱體、錐體和球體及其特徵。
2. 能把立體圖形分類。
3. 通過操作和觀察,初步認識柱體、錐體和球體,知道它們的名稱,會辨認這幾種物體和圖形。
4. 培養學生的動手操作能力及觀察能力。
5. 通過活動,激發學生的學習興趣,培養學生的合作、探究和創新意識。

教學活動設計				
行為目標	**教學活動**	**教學資源**	**時間分配**	**評量**
學生能結合具體的生活情境,認識數學與生活的聯繫。 學生能專心聆聽別人的分享。 學生能主動分享自己的看法。	**一. 引入活動** ● 溫故知新 【老師】老師先和學生複習一下簡單的平面圖形。(三角形、長方形、正方形、圓形) ● **師生互動分享** 【老師】老師展示日常可看見的立體圖形實物,引發學生觀察,並令學生說說有哪些形狀,引發好奇心。	教學簡報 日常可看見的立體圖形實物	5 分鐘	學生在課堂上的反應。

行為目標	教學活動	教學資源	時間分配	評量
	【老師】老師提問:你們在哪裡見過?是否認識這些形狀? 【學生】(預期學生回答:我在超市看到過。) 【老師】老師提問:你們知道平面圖形和立體圖形的分別嗎? 【學生】(預期學生回答:平面圖形是只能看一面,立體圖形是能摸到的。) 【老師】老師補充:平面圖形是只能看一面。能看到物件前、後、左、右、上、下,能看到每一面的便是立體圖形。(每一位同學都是立體的,我們能看到同學的前、後、左、右、上、下。)	教學簡報		
學生能接受他人的意見 學生能觀察立體圖形,初步嘗試把立體圖形進行分類。 學生能樂於參與數學學習活動,表現積極的態度。	**二. 發展活動** ● **活動一:立體圖形探索** 1. 兩至三人一組,將不同形狀的立體圖形模型分發給學生放在桌上,讓他們觸摸和觀察這些模型。 2. 引導學生問題:哪一個立體圖形能滾動? 3. 把能滾動的立體圖形舉起來(圓柱體、錐體、球體)。 4. 【老師】老師引導學生問題:哪個形狀有最多的面?(柱體 — 像薯片筒) 5. 【老師】老師引導學生問題:哪個形狀有最少的面?(球體 — 像球/橙)	立體圖形教具 *7 份 立體圖形實物	5 分鐘	老師觀察學生在學習過程中的學習表現,包括參與度、對概念的理解和回答問題的能力。

行為目標	教學活動	教學資源	時間分配	評量
	6.【老師】老師引導學生問題:哪個形狀是尖尖的?(錐體 — 像甜筒) 7. 鼓勵學生進行討論,並概括他們對不同形狀的觀察和比較。 8. 邀請學生分享並比較他們的模型。鼓勵他們提出問題和觀察,以幫助他們理解不同形狀之間的區別。			
	(能滾動的:圓柱體、錐體、球體。)	立體圖形的名稱卡		
	引導學生使用自己的話語來描述這些特徵。	立體圖形的圖卡		
	【老師】老師把圓柱體、球體、錐體貼在黑板上,並讓全班跟老師讀一次名稱。	寶貼	2 分鐘	
學生能區分出柱體、錐體和球體的特徵。	● **書本小習題** 【老師】老師:現在同學們可打開書本,我們一起完成書本上的小習題。		3 分鐘	
學生能辨別疊得穩和不能疊穩的圖形。	【學生】學生在書本上完成勾選的小習題。(勾選出能滾動的積木) * 老師要在課堂中巡察學生的情況及進度。			老師觀察學生在書本小習題中是否能選出正確的答案。
	● **活動二:疊一疊** 1. 引導學生用相同的立體圖形疊放在一起。 2. 通過實踐,感知有些立體圖形有寬而平的面,可以疊放起來。	教學簡報		老師觀察學生在學習過程中的學習表現,包括參與度、對概念的理解和回答問題的能力。

行為目標	教學活動	教學資源	時間分配	評量
學生能說出柱體、錐體和球體的名稱。 學生能積極參與課堂活動。 學生能描述柱體、錐體和球體的名稱。 學生能說出柱體、錐體和球體的特徵。	3. 邀請學生分享哪些立體圖形可以疊放； 4.（柱體可以疊放） 【老師】老師提問：有哪幾個立體圖形可以疊放在一起？請能疊在一起的組別舉手。 【學生】（預期學生回答：圓柱體、正方體、長方體。） 【老師】老師從上可以帶出可以疊放的便是柱體。 而有圓（圓柱體除外）或尖的面就不能疊放。 【老師】同時老師把柱體特徵卡可貼在柱體名稱卡下面，以幫助學生記得柱體特點。 ● **書本小習題** 【老師】老師：現在同學們可打開書本，我們一起完成書本上的小習題。 【學生】學生在書本上完成勾選的小習題。（勾選出能疊得穩的積木） ＊ 老師要在課堂中巡察學生的情況及進度。 【老師】老師：哪些圖形疊得穩又能滾動？ **邀請同學拿圖形出來疊給全班看** 【學生】（預期學生回答：圓柱體。）	立體圖形特徵卡 寶貼	5 分鐘 3 分鐘 10 分鐘	老師觀察學生在書本小習題中是否能選出正確的答案。

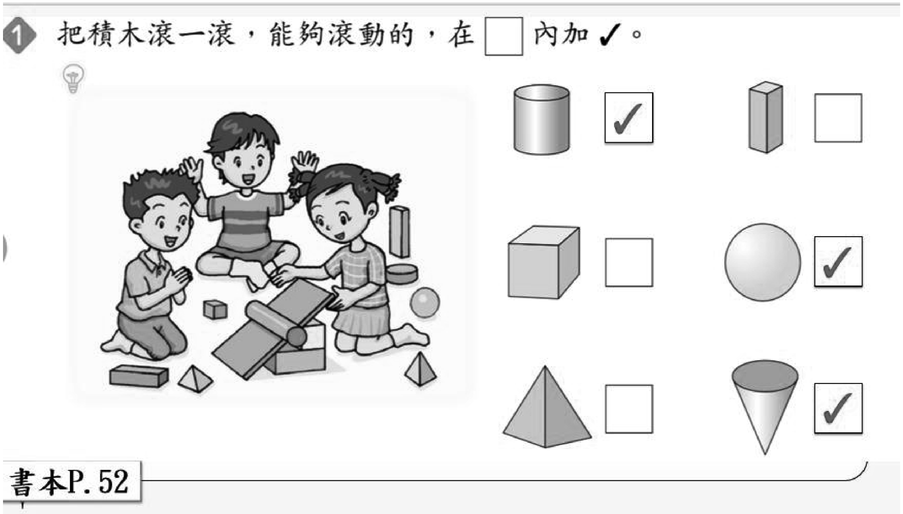
行為目標	教學活動	教學資源	時間分配	評量
學生能區分出柱體、錐體和球體的特徵。	● **活動三:蒙眼摸一摸** 1. 邀請學生出來合上雙眼,在老師準備的隨機袋中摸索,並形容出來讓全班同學猜測。 2. 邀請 3 位同學出來摸索,並用簡短句子形容摸到的特徵。 3. 柱體 -- 方方的。 4. 錐體 -- 尖尖的。 5. 球體 -- 圓圓的。	教學簡報 立體圖形特徵卡 寶貼 立體圖形實物袋		老師觀察學生在活動中的參與程度。
學生能把柱體、錐體和球體分類。 學生能積極參與課堂活動。	【老師】老師從上可以引導學生說出柱體、錐體和球體的特徵。 同時老師把柱體、錐體和球體特徵卡可貼在名稱卡下面,以幫助學生記得、錐體和球體各自的特點。		2 分鐘	
學生能按形狀把柱體、錐體和球體分類。	● **書本小習題** 【老師】老師:現在同學們可打開書本,我們一起完成書本上的小習題。 【學生】學生在書本上完成圈一圈的小習題。(圈出能符合所描述的積木) * 老師要在課堂中巡察學生的情況及進度。		5 分鐘	老師觀察學生在書本小習題中是否能選出正確的答案。
	● **活動四:連一連** 【老師】老師:現在我們一起完成書本上的小習題。 1. 老師把 6 種立體圖形貼在黑板上。			

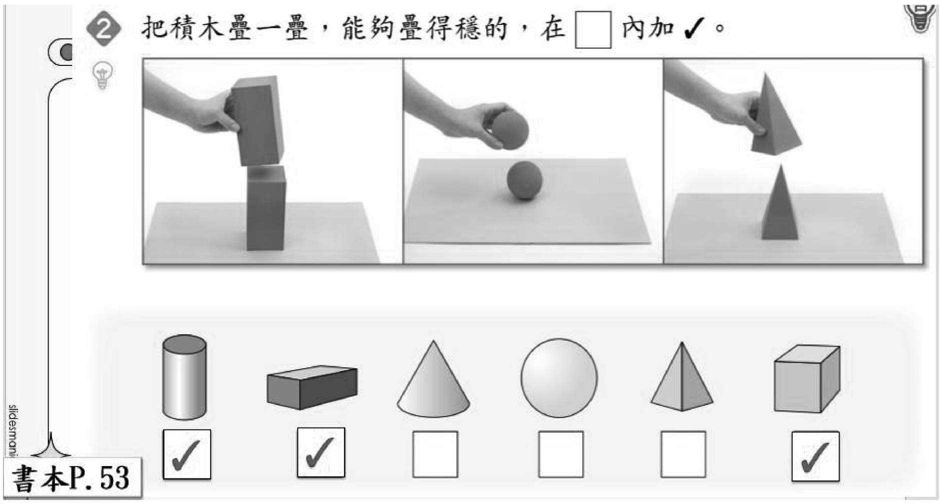
行為目標	教學活動	教學資源	時間分配	評量
學生能結合具體的生活情境，認識數學與生活的聯繫。	2. 邀請同學出來一起連一連把柱體、錐體和球體進行分類。 3. 在黑板每連完一條也請學生接著在書本上連線。 【學生】學生在書本上完成連一連的小習題。(連出立體圖形的分類) ＊ 老師要在課堂中巡察學生的情況及進度。 **三. 總結與回顧** ● **老師回答學生提出的問題,解答疑惑。** ● **老師可用課室有的立體圖形做示範壘一壘,如粉筆是圓柱體。** 【老師】老師:我們今天學了哪三種立體圖形? 大家有甚麼發現? 【學生】(預期學生回答:柱體、錐體和球體。) 【老師】老師提問柱體、錐體和球體有甚麼特點? 哪一個可以滾動?(圓柱體/球體) 哪一個可以壘得穩?(圓柱體) 哪一個是圓圓的?(球體) 哪一個是尖尖的?(錐體) 【老師】老師:各位同學今晚回家可以留意一下身邊有甚麼立體圖形,明天告訴老師。	立體圖形卡寶貼 粉筆	5 分鐘	老師觀察學生在書本小習題中是否能連上正確的答案。

行為目標	教學活動	教學資源	時間分配	評量
	● **課堂總結：今天學了立體圖形，立體圖形是可以看到物體的每一面，**可以滾動的我們稱為圓柱體／球體；可以疊得穩的我們稱為圓柱體；圓圓的像球的我們稱為球體；尖尖的我們稱為錐體。			

一、教材課件

● 課本照片





3 下面的三個小朋友正在用手感受積木有甚麼特徵。把他們觸摸到的積木圈起來。

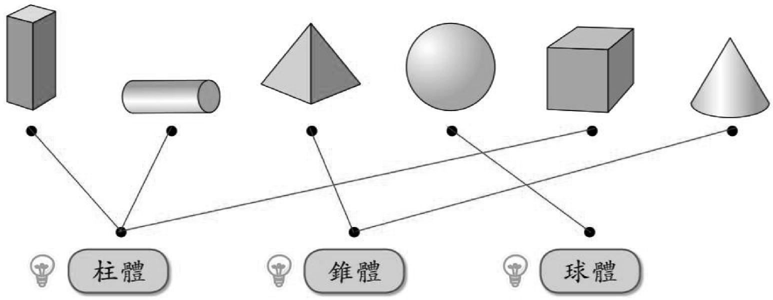
(a) 圓圓的。

(b) 尖尖的。

(c) 方方的。

書本P. 53

4 把立體圖形與它的名稱連起來。



● 教具

教學反思及學生表現
● 教學中,目標最主要是讓學生能分辨清楚柱體、錐體和球體。 ● 因為這次的教學對象是一年班學生,在課堂中運用了實物教學法,先用學生日常生活中熟悉可容易看見的的實物,如盒子、橙、雪糕筒等,來幫助他們認識和區分不同的立體圖形。通過與實物的聯繫,學生可以更好地理解立體圖形的形狀和特徵。 ● 其次,也通過了兩至三人一組的分組活動讓學生可以去觸摸實際的立體圖形模型,幫助學生理解不同的立體圖形,如立方體、圓柱體、圓錐體等。通過觸摸和觀察這些模型,學生可以更好地理解它們的特徵和屬性。他們還可嘗試滾動、疊一疊、觀察和討論,讓他們更直觀地理解不同的立體圖形和特徵。 ● 在整個教學過程中也用了引導形式去重覆及提問形式去加強學生對立體圖形名稱及特徵的記憶。實物教學方法可以激發學生的興趣,提高他們的參與度和理解能力。從中也培養了學生對立體圖形的敏感性和觀察力。 ● 在課堂最後,運用了粉筆(圓柱體) 疊一疊,學生們有很熱烈的反應。 ● 學生在課堂中學習態度也是積極主動,並且除了在活動中投入,他們有盡力去完成練習題目也有積極地回答問題,從中可以看出學生都能區分出這三種立體圖形的區別。 ● 在這次的教學過程中,教學反思是我們需要根據學生的實際情況和反饋,不斷調整和改進教學設計,在教材上《澳門新思維數學》的教學建議及教學簡報都能為老師提供良好的參考及使用,而且課本上例子及圖形圖片十分清晰準確,更有效的讓學生學習及觀察。

澳門數學教育研究學會

聯絡地址:澳門殷皇子大馬路 11 號群發花園第一座 14 樓 A
電話:853 − 28965253,853 − 66878553 傳真:853 − 28788259
E − mail: macaumath@ yahoo. com. hk , inwmacau@ yahoo. com. hk
Website:http://www. mathsmo. com/

會務活動紀錄

2002 年

6 月 17 日	在氹仔海島公證署辦理本會註冊手續。

2003 年

6 月 7 日	舉辦“中國數學教學的雙基原理—2002 年數學教育高級研討班”——會議精神傳達報告會。
12 月 13、14 日	舉行中小學“數學開放題教學”專題研討會及示範課。
12 月	《澳門數學教育》創刊號出版。

2004 年

4 月 17 日	舉辦“DM_Lab 和動態數學教學”講座。
9 月 30 日	赴杭州拜訪教育研究中心,訪問海寧市崇文實驗學校及杭州市南宛小學。
10 月 9、10 日	舉行“數學情景與提出問題教學”專題研討會及示範課。

2005 年

3 月 24 −28 日	赴貴陽、興義市參觀和交流,訪問興義八中和延安路小學。
4 月 16 日	與教育出版社合辦“突破兒童數學思維空間”研討會及《新思維數學》教材展覽會。
11 月 26、27 日	舉行“全國小學特級數學男教師教學風采展示”專題研討會及示範課。
12 月 20 −28 日	前往武漢訪問華中師範大學第一附屬中學、東方紅小學以及育才第二小學。

2006 年

3 月 4 日	舉辦“因材施教、拔尖保底——如何幫助數學差生學習”專題研討會。

4 月 14、15 日　赴廣東省河原市第二小學和河源市中學觀課。

6 月 25－29 日　前往山東濟南參觀濟南第十二中學和解放路第一小學。

12 月 9－10 日　舉行“國家數學教育高級研修班‘數學教師教育’澳門會議”。

2007 年

4 月 28、29 日　與全國嘗試教學理論研究會合辦“兩岸四地小學數學課堂教學觀摩及說課比賽”。

7 月 4、5 日　與澳門大學教育學院合辦“有效的數學教學:一個國際視角”及“有效數學教學實務:美國的經驗”講座。

7 月 30 日至
8 月 3 日　訪問陝西省西安市吉祥路小學、西安市第一中學、西北工業大學附小。

9 月 1 日　舉辦“創造性數學的想法及方法運用”講座。

2008 年

11 月 1 日　舉辦“小學數學專家講座”。

11 月 22 日　舉辦“中學數學教育改革成功經驗介紹暨課堂教學展示”專題會議。

2009 年

5 月 29 日、30 日　前往美國參加第 34 屆美國高中數學競賽(ARML),榮獲國際組第一名。

8 月 15 日~20 日　訪問內蒙古包頭市鐵路二中。

11 月 14 日　舉辦“數學教學的有效性與開放性”研討大會及示範課。

12 月 5 日、6 日　舉辦“第一屆澳門小學數學優質課堂教學”評比大會。
(慶祝祖國成立 60 週年,澳門回歸 10 週年,本會成立 5 週年活動)

2010 年

6 月　成立“澳門數學奧林匹克學會”,政府憲報刊登該會章程。

11 月 26 日、27 日　組織 18 名數學優秀學生前往北京參加首屆世界數學團體錦標賽。

1 月 18 日　華東師範大學聘請汪會長擔任華東師範大學國際數學奧林匹克研究中心澳門實驗培訓基地主任。

2011 年

1 月 28 日　「美國高中數學競賽」澳門區代表隊榮獲澳門特區政府頒授功績獎狀。

9 月 27 日、28 日　與澳門大學教育學院合辦“國際著名教育家蘇霍姆林斯基教育理念介紹會”。

2012 年

6 月 9 日　舉辦"如何激發學生數學創造力講座暨中學數學課堂教學展示"公開課。

8 月 1－6 日　赴吉林、延邊中、小學進行學術交流。

11 月 3－4 日　舉辦"全國小學數學四大教學流派課堂教學展示課"。

11 月 3 日晚上　舉行慶祝本會成立十週年晚宴,十週年成果展。

2013 年

4 月 6 日　舉辦亞太區小學奧數(澳門區)選拔賽。

4 月 14 日　進行中學第二十四屆、小學第十一屆"希望杯"澳門地區第二試決賽。

4 月 16 日　名譽會長陳明金先生宴請本會,表示對本澳數學教育的支持和鼓勵。

5 月 11 日　舉辦"幼兒教育理論講座與幼兒教學實踐示範課"。

6 月 1 日　赴新加坡參加 2013 亞太小學數學奧林匹克總決賽。

5 月 31、6 月 1 日　前往美國參加第 38 屆美國高中數學競賽(ARML),澳門隊第二。

6 月 15－19 日　舉辦數學實驗——統計與概率工作坊。

7 月 10 日　澳門基金會為 ARML 澳門隊凱旋而歸的健兒舉行慶功宴。

7 月 18 日　舉行希望杯、亞太區小學奧數(新加坡)、數學大王賽頒獎禮暨(ARML)美國高中數學競賽成果滙報會。

8 月 1－7 日　赴哈爾濱、鷄西中、小學進行學術交流。

11 月 16－17 日　與澳門大學教育學院合辦「嘗試教學理論研究華人論壇」和幼兒教育報告會。

12 月 7－9 日　舉辦「中學、小學數學奧林匹克教練員考級証書培訓班」。

12 月　《澳門數學教育》第十一期出版。

2014 年

1 月 11 日　舉行「幾何王」初中平面幾何學習軟件介紹會。

4 月 3 日　拜訪澳門基金會。

4 月 13 日　進行中學第二十五屆、小學第十二屆"希望杯"澳門地區第二試決賽。

4 月 15 日　拜訪澳門教育暨青年局。

4 月 17 日至 21 日　赴臺灣澎湖、高雄參訪活動。

4 月 26 日　舉辦"史豐收速算法"介紹會。

5 月 30－31 日　前往美國參加第 39 屆美國高中數學競賽(ARML),澳門隊第二。

6 月 14 日　舉行「領導數學科組工作經驗介紹會暨瀋陽七中教學展示課」活動。

7 月 11 日　舉行「幾何王」初中平面幾何學習軟件培訓班。

7 月 12 日　舉行希望杯、亞太區小學奧數（新加坡）、數學大王賽、環亞太杯國際數學賽、中小學數學奧林匹克教練員考級証書頒獎禮暨（ARML）美國高中數學競賽成果滙報會。

8 月 10－16 日　派學生前往四川西昌參加澳門基金會教科文中心航天團。

10 月 18 日　舉辦“熟能生巧數學觀點講座暨高中數學教學展示課”。

11 月 22－23、29－30 日　舉辦“史豐收速算法”導師培訓班。

12 月 6 日、7 日　舉辦“第五屆澳門小學數學優質課堂教學”評比大會暨全國協作區孔子杯小學數學課堂教學大賽（澳門賽區）。

12 月　《澳門數學教育》第十二期出版。

2015 年

1 月 16 日　拜訪澳門基金會。

1 月 31 日　舉行成立“史豐收速算法”培訓基地新聞發佈會。

4 月 12 日　進行中學第二十六屆、小學第十三屆“希望杯”澳門地區第二試決賽。

4 月 19 日　拜訪澳門教育暨青年局。

5 月 10 日　汪會長參加上海“小學數學教師教育高級研修班”。

5 月 23 日　舉行「任勇的數學教學主張」講座。

5 月 28－31 日　前往新加坡參加第 26 屆亞太區小學數學奧林匹克賽決賽。

5 月 29－30 日　前往美國參加第 40 屆美國高中數學競賽（ARML），澳門隊重獲冠軍。

6 月 13 日　舉行希望杯、亞太區小學奧數（新加坡）、數學大王賽、環亞太杯國際數學賽暨（ARML）美國高中數學競賽成果滙報會。

6 月 3－7 日　澳門大學教育學院與本會合辦“數學整數教育”專題研討會。

6 月 6 日　邀請意大利幾何學專家和捷克數學家教育專家舉行講座。

6 月 27 日　往港參加史豐收速算兩岸三地比賽。

7 月 11 日　與澳門大學教育學院、香港資優教育學會合辦「環亞太杯國際數學邀請賽總決賽」。

8 月　《兩岸三地升大數學教程》出版。

8 月 8－12 日　澳門隊赴桂林參加 WMI 世界數學邀請賽。

8 月 15－20 日　赴陝西省進行學術交流。

10 月 17 日　舉辦“幼兒教育報告會及幼兒史豐收速算法演示課”。

12 月 5 日、6 日　舉辦“第一屆小學新思維數學‘澳門杯’課堂教學大賽評比大會”。

12 月 7 日　獲澳門特別行政區授予團隊功績獎狀。

12 月　《澳門數學教育》第十三期出版。

2016 年

1 月 17 日	舉辦"兒童資優培育" 介紹會。
3 月 5 日	舉辦"希望杯數學競賽試題分析"講座。
3 月 19 日	合辦 "中、小學數學實驗和智力發展"專題講座。
5 月 26－29 日	前往新加坡參加第 27 屆亞太區小學數學奧林匹克賽決賽。
6 月 3－4 日	前往美國參加第 41 屆美國高中數學競賽(ARML) ,澳門隊獲亞軍。
6 月 18 日	舉行希望杯、亞太區小學奧數(新加坡)、數學大王賽、環亞太杯國際數學賽暨(ARML)美國高中數學競賽成果滙報會。
10 月 22 日	舉辦"雲南麗江市教育局講座暨中學示範課"。
11 月 19 日	舉辦"四川省成都市成華小學示範課"。
11 月 25－29 日	前往馬來西亞參加 MIMO 馬來西亞國際奧數競賽。
12 月 10－11 日	舉辦第二屆小學"新思維數學"澳門杯課堂教學比賽。
12 月	《澳門數學教育》第十四期出版。

2017 年

3 月 11 日	慶祝十五周年會慶暨春茗聚餐。
5 月 25－28 日	前往新加坡參加第 28 屆亞太區小學數學奧林匹克賽決賽。
6 月 2－3 日	前往美國參加第 42 屆美國高中數學競賽(ARML)。
6 月 17 日	希望杯、亞太區小學奧數(新加坡)、數學大王賽、環亞太杯國際數學賽暨(ARML)美國高中數學競賽成果滙報會。
7 月 8－9 日	舉行首辦「首屆奧林匹克數學三維杯環亞太國際邀請賽賽(2017)」。
9 月 12 日	拜訪譚俊榮司長。
11 月 4 日	舉辦"海峽兩岸小學數學課堂教學交流展示"。
12 月 9 日、10 日	舉辦第三屆小學"新思維數學"澳門杯課堂教學比賽。
12 月	《澳門數學教育》第十五期出版。

2018 年

1 月 28 日	前往中山拜訪華星幼稚園。
4 月 28 日	舉辦「世界七大數學死題破解演講會」。
5 月 24－29 日	前往新加坡參加第 29 屆亞太區小學數學奧林匹克賽決賽。
6 月 1－2 日	前往美國參加第 43 屆美國高中數學競賽(ARML)。
6 月 30 日－	
7 月 2 日	合辦 2018 三維杯環亞太國際數學邀請賽(香港舉行)。
7 月 7 日	希望杯、數學大王國際邀請賽、環亞太杯國際數學賽暨(ARML)美國高中數學競賽成果滙報會。

5 月 25－28 日　前往新加坡參加第 28 屆亞太區小學數學奧林匹克賽決賽。
6 月　為香港名創教育（文達出版社）編輯的澳門基力數學探知 1A 和 1B 出版。
6 月 16－17 日　前往深圳出席 2018 全國史豐收數學速算法大獎賽。
10 月 13 日　舉辦「使用漫畫進行數學教學 — 來自新加坡的經驗」講座。
11 月 10 日　舉辦「世界數學難題一尺解第二次講座」。
11 月 23－27 日　前往馬來西亞力行華小學參加第 5 屆 馬來西亞國際數學奧林匹克競賽。
12 月 8－9 日　第二十八屆「滙業盃中學生常識問答比賽」數學命題，為協辦單位。
12 月 15 日、16 日　舉辦常港澳小學「新思維數學」課堂教學邀請賽。
12 月　《澳門數學教育》第十六期出版。

2019 年

6 月 1 日　前往新加坡參加第 30 屆亞太區小學數學奧林匹克賽決賽。
5 月 30 日－
6 月 8 日　前往美國參加第 44 屆美國高中數學競賽（ARML）。
7 月 5－8 日　主辦 2019 金蓮花杯國際數學邀請賽。
7 月 7 日　舉行金蓮花杯國際數學邀請賽、數學大王國際邀請賽、環亞太杯國際數學賽暨（ARML）美國高中數學競賽成果滙報會。
6 月　為香港名創教育（文達出版社）編輯的澳門基力數學探知 2A 和 2B 出版。
11 月 22－25 日　前往馬來西亞參加第 6 屆 馬來西亞國際數學奧林匹克競賽。
12 月 6－7 日　為第二十八屆「滙業盃中學生常識問答比賽」數學命題，本會為協辦單位。
11 月 30 日、
12 月 1 日　舉辦「慶回歸－－海峽兩岸小學新思維數學課堂教學大賽」。
12 月　《澳門數學教育》第十七期出版。

2020 年

因疫情關係，使本會上半年活動都未能如期舉行。
10 月 17 日　舉辦「簡約教育的理論與實踐思考」講座。
11 月 28－29 日　舉辦「海峽兩岸小學新思維數學課堂教學大賽」。
12 月　《澳門數學教育》第十八期出版。

2021 年

	因疫情關係，使本會活動都未能如期舉行。
3 月 4 日	於浸信中學舉辦「華數之星」選拔賽。
6 月	參加第四屆分角尺作圖國際決賽。
12 月	《澳門數學教育》第十九期出版。

2022 年

	因疫情關係，使本會活動都未能如期舉行。
2 月 20 日	舉行慶祝本會成立二十周年晚宴。
12 月	《澳門數學教育》第二十期出版。

2023 年

7 月 20 日	拜訪中聯辦。
12 月 10 日	由澳門數學奧林匹克學會主辦，本會協辦 2023“金蓮花”杯國際數學邀請賽（澳門區）決賽。
12 月 17 日	舉行“金蓮花”杯國際數學邀請賽（澳門區）決賽頒獎禮。
12 月 21－25 日	探索海上絲綢之路・閩南文化・參訪交流團，到訪廈門及泉州兩地。
12 月	《澳門數學教育》第二十一期出版。