第十七期 No.17
ISSN 1814-2176

Educação Matemática de Macau

澳門数学教育

——张奠宙 題

Mathematics Education in Macau

ISSN 1814-2176
9 771814 217007

澳門數學教育研究學會出版

2019年12月

澳門隊赴美國參加第 44 屆全美高中數學競賽

（2019 年 5 月 31 日、6 月 1 日）

澳門隊師生攝於內華達大學（UNLV）

汪會長到澳門機場送行

國際賽場課室（內華達大學）

緊張計時接力賽場地

慶祝澳門回歸 20 周年、“金蓮花”國際數學邀請賽頒獎典禮

（2019 年 7 月 7 日）

本會理監事與頒獎嘉賓合照

澳門数学教育（第十七期） 2019 年 12 月

目　　錄

澳門教育暨青年局
澳　門　基　金　會　贊助

澳門數學教育研究學會出版
澳門新聞局編號：2877
地　　址：澳門南灣街 107 號
刊頭題詞：張奠宙教授
设计排版：科教文出版社
印　　刷：新文寶印務有限公司
刊　　號：ISSN 1814 - 2176

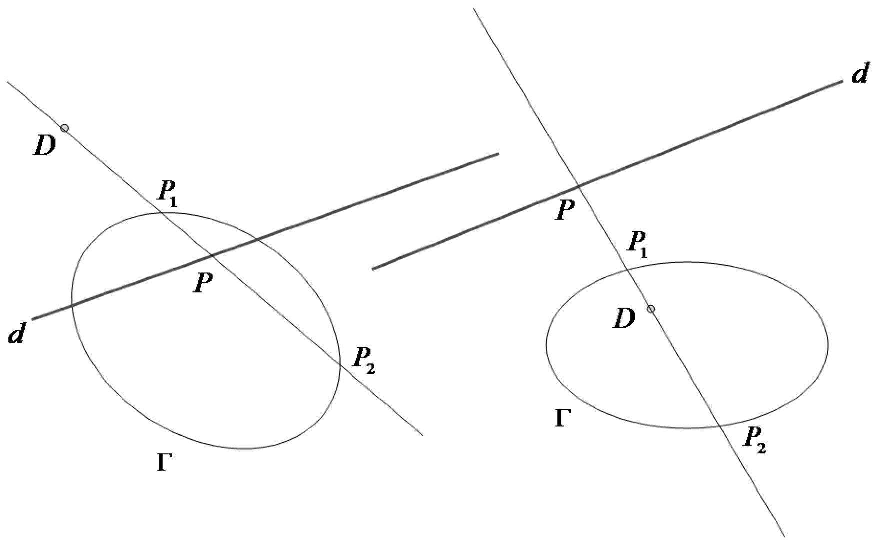
關於極與極線和配極的一些探討

李祥立

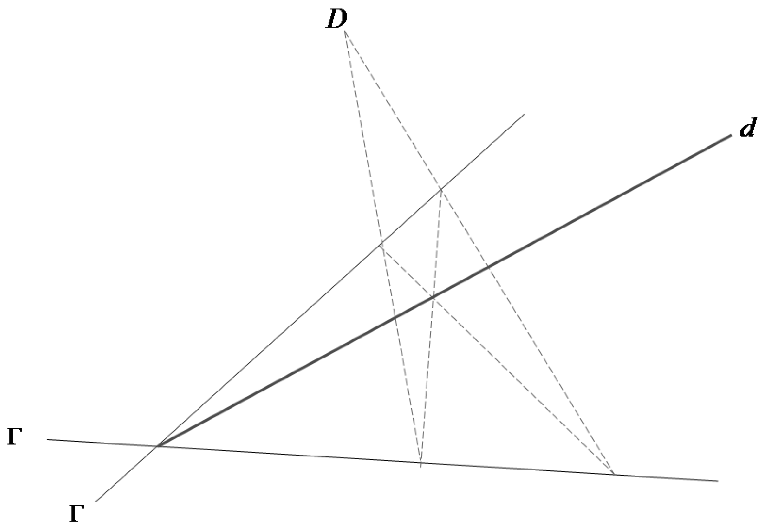
引子:廣東省初等數學學會第二屆第一次學術會議於 2018 年 11 月 24 －25 日在深圳舉行,拙作一篇參與該屆論文評比,幸獲一等獎首名。現將之略作修訂,附錄於下,歡迎讀者批評指教。

§1. 對虛圓配極

我們知道,對於圓錐曲線 Γ,定點 D 及定直線 d,若過 D 之任意動直線分別交 d 與 Γ 於點 P 和 P_1, P_2,恆有交比 $(D, P, P_1, P_2) = -1$(即 $\frac{DP_1}{PP_1} : \frac{DP_2}{PP_2} = -1$),則 D 與 d 有極與極線之關係. 下圖分別顯示 D 在 Γ 外部區域與內部區域之情況:



當 Γ 是兩相交直線時(退化圓錐曲線)時,仍有極與極線,圖如下:



我們一般稱四邊形(凸或凹)不相鄰之兩條邊為對邊,不相鄰之兩頂點的連線稱為對角線. 若把對角線也稱為對邊(即共有三雙對邊),則可將射影幾何中最基本的一個定理(在此稱為引理)用最簡單的方式敘述於下:

引理:圓錐曲線內接四邊形(凸或凹均可)任兩雙對邊交點的連線,與第三雙對邊的交點有極線與極之關係.

這個定理的證明,一般射影幾何教本都有提及,在此不贅說. 在後面亦會經常引用而不一一指出.

定義 1.1:以 AB 表點 A 和 B 點的連線,餘類推.

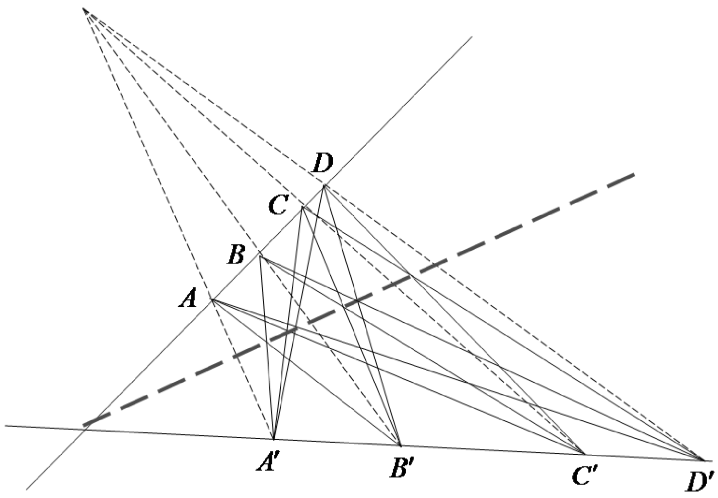
定義 1.2:以表直線 a 和 b 直線的交點,餘類推.

定義 1.3:在射影平面上,存在著多種逆射,可將平面上的點逆射至平面上之直線,成一一對應,並且,共線的點逆射至共點之直線,則點與直線可成對偶關係,我們簡稱之為**對偶法則**.

例如,對虛圓 $x^2 + y^2 = -1$ 配極,即是:若將每一點之齊次座標$(x_1 \quad x_2 \quad x_3)$視作直線之齊次座標$(u_1 \quad u_2 \quad u_3)$,亦即逆射$\rho\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$,$\rho$ 為實數,$\rho \neq 0$ 可將平面上之點與直線成一一對應,並且,共線的點逆射至共點之直線.

對偶法則可將平面上關於點的命題轉化為直線命題(例如,共線的點可轉化為共點的線),逆之亦然.

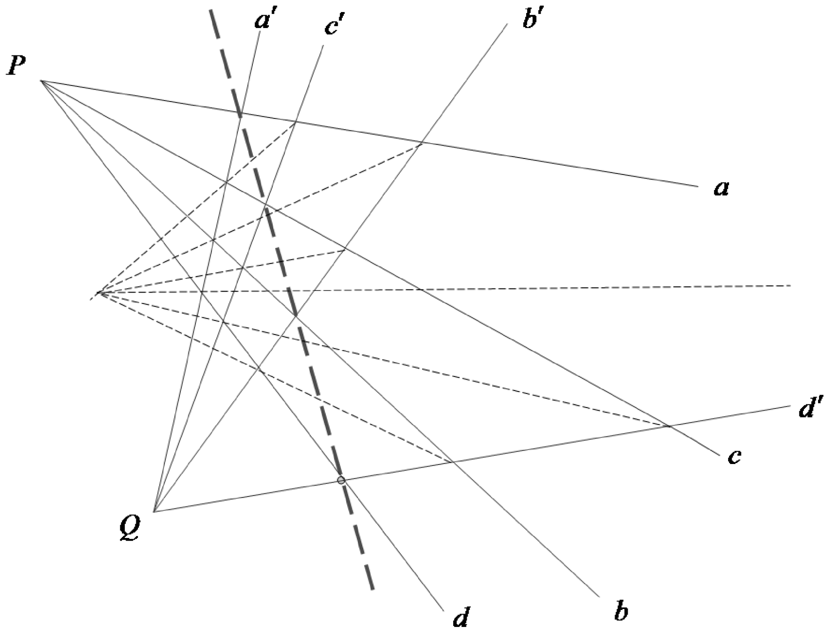
定理 1.1:共線點集$\langle A,B,C,D\rangle$與共線點集$\langle A',B',C',D'\rangle$中,若直線 AA',BB',CC',DD' 共點,則直線 XY' 與 $X'Y$ 的交點(其中 $X = A,B,C,D$;$Y = A,B,C,D$,但 $X \neq Y$,如:AB' 與 $A'B$ 的交點,AC' 與 $A'C$ 的交點等)共 6 點必共線(此直線與 AA',BB',CC',DD' 所共之點有極線與極的關係). [1]



容易推得

定理 1.2：共線點集 $\langle A_1, A_2, \cdots, A_n \rangle$ 與共線點集 $\langle A'_1, A'_2, \cdots, A'_n \rangle$ 中，若直線 $A_1A'_1$，$A_2A'_2, \cdots, A_nA'_n$ 共點，則直線 $A_kA'_j$ 與 A'_kA_j 的交點（其中 $k = 1, 2, \cdots, n$；$j = 1, 2, \cdots, n$，但 $k \neq j$）共 $\frac{1}{2}(n^2 - n)$ 點必共線（此直線與 $A_1A'_1, A_2A'_2, \cdots, A_nA'_n$ 所共之點有極線與極的關係）.

定理 1.3：共點線束 $\langle a, b, c, d \rangle$ 與共點線束 $\langle a', b', c', d' \rangle$ 中，若點 aa', bb', cc', dd' 共線，則點 xy' 與 $x'y$ 的連線（其中 $x = a, b, c, d$；$y = a, b, c, d$ 但 $x \neq y$，如：ab' 與 $a'b$ 的連線，ac' 與 $a'c$ 的連線等）共 6 條直線必共點.



證明:運用對偶法則於定理 1. 1.

定理 1. 4:共點線束$\langle a_1,a_2,\cdots,a_n\rangle$與共點線束$\langle a'_1,a'_2,\cdots,a'_n\rangle$中,若$a_1a'_1,a_2a'_2,\cdots,a_na'_n$共線,則$a_ka'_j$與$a'_ka_j$的連線(其中$k=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,n$但$k\neq j$)共$\frac{1}{2}(n^2-n)$條直線必共點.

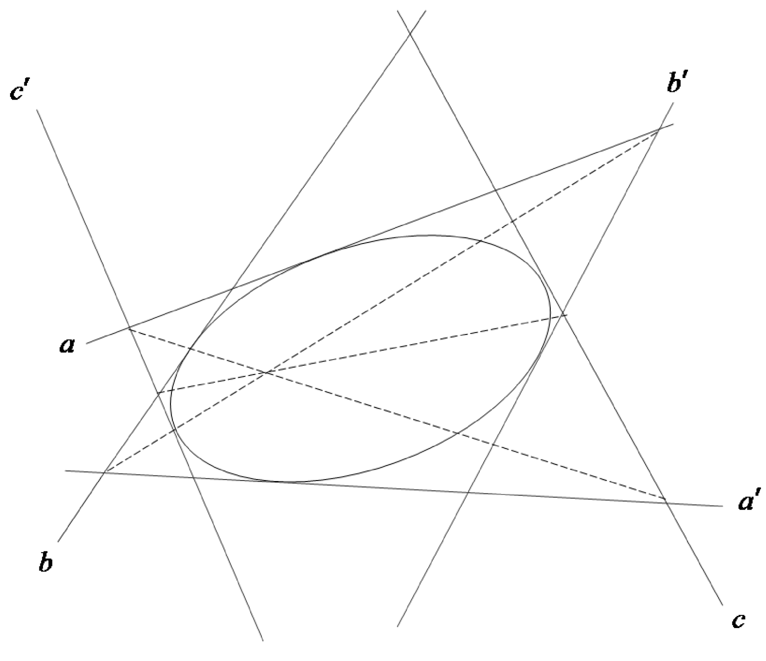
證明:運用對偶法則於定理 1. 2.

§2. 對一般圓錐曲線配極

在射影平面上,對任一非退化圓錐曲線,存在著一射影變換,將平面上每一點逆射至其關於此圓錐曲線之極線,這種射影變換稱為配極. 故對任一非退化圓錐曲線而言,平面上每一點與其極線有對偶關係. 在配極中,圓錐曲線上的點,與過此點的切線對偶.

Desargues 定理告訴我們,$\triangle ABC$與中$\triangle A'B'C'$,對應頂點連線共點之充分且必要條件為:對應邊之交點共線. 在這種情況下,我們簡稱這兩個三角形有 *Desargues* 關係.

Pascal 定理(為省篇幅,其內容在此不贅)的對偶就是:對圓錐曲線Γ的任兩組切線$\langle a,b,c\rangle$和$\langle a',b',c'\rangle$而言,ab'與$a'b$的連線,ac'與$a'c$的連線,bc'與$b'c$的連線,這三線必共點(*Brianchon* 定理). 圖形如下:



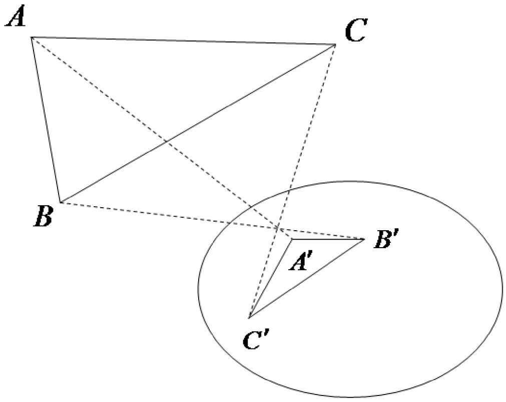
上述 *Brianchon* 定理中之aa',bb',cc'三點不一定共線. 若aa',bb',cc'三點共線,則$\langle a,b,c\rangle$所圍成之三角形與$\langle a',b',c'\rangle$所圍成之三角形有 *Desargues* 關係.

定義2. 1:Γ為一非退化圓錐曲線,設三角形$\triangle\Psi$之三頂點分別關於Γ的極線所圍成之三角形為$\triangle\Psi'$,則稱$\triangle\Psi'$為$\triangle\Psi$之極三角形.

若直線 a 通過直線 b 之極,則直線 b 亦必通過直線 a 之極,由此,容易證明:若 $\triangle\Psi'$ 為 $\triangle\Psi$ 之極三角形,則 $\triangle\Psi$ 亦為 $\triangle\Psi'$ 之極三角形.

定理 2.1:若 $\triangle\Psi'$ 為 $\triangle\Psi$ 之極三角形,則 $\triangle\Psi$ 與 $\triangle\Psi'$ 有 *Desargues* 關係.

證明:設 $\triangle\Psi$ 與 $\triangle\Psi'$ 分別為 $\triangle ABC$ 與 $\triangle A'B'C'$,其中 $B'C'$ 在 A 的極線上,$A'C'$ 在 B 的極線上,$A'B'$ 在 C 的極線上,如下圖所示:



設 A,B,C 的座標分別為 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)$,圓錐曲線方程為 $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$,矩陣表示法為 $X^TDX=0$,其中 $X=\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}$,$D=\begin{pmatrix}a&h&g\\h&b&f\\g&f&c\end{pmatrix}$,又設 $X_1=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\1\end{pmatrix}$,$X_2=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\1\end{pmatrix}$,$X_3=\begin{pmatrix}x_3\\y_3\\1\end{pmatrix}$,$X^T$ 表 X 之轉置矩陣,則 $B'C'$ 的方程為 $X_1^TDX=0$,以 $l_1=0$ 簡記之,即 $l_1=X_1^TDX$;

$A'C'$ 的方程為 $X_2^TDX=0$,以 $l_2=0$ 簡記之,即 $l_2=X_2^TDX$;

$A'B'$ 的方程為 $X_3^TDX=0$,以 $l_3=0$ 簡記之,即 $l_3=X_3^TDX$,

將 B 的座標代入 l_1,所得之數為 $X_1^TDX_2$,即 $X_1^T=DX_2=ax_1x_2+h(x_1y_2+y_1x_2)+by_1y_2+g(x_2+x_1)+f(y_2+y_1)+c$. 同理,$X_1^TDX3$ 代表將 C 的座標代入 l_1 所得之數,餘類推.

留意:$X_1^TDX_2=X_2^TDX_1$,$X_1^TDX_3=X_3^TDX_1$,餘類推.

方程$(X_1^TDX_3)l_2-(X_1^TDX_2)l_3=0$ 表一過 $l_2=0$ 和 $l_3=0$ 交點的直線,即過 A'(因 $A'C'$ 與 $A'B'$ 的交點為 A'),又 A 的座標滿足方程$(X_1^TDX_3)l_2-(X_1^TDX_2)l_3=0$(因$(X_1^TDX_3)(X_1^TDX_1)=(X_1^TDX_2)(X_3^TDX_1)$),故直線$(X_1^TDX_3)l_2-(X_1^TDX_2)l_3=0$ 亦通過 A,於是 AA' 的方程為:$(X_1^TDX_3)l_2-(X_1^TDX_2)l_3=0$　　(1)

同理,

BB' 的方程為:$(X_2^TDX_1)l_3-(X_2^TDX_3)l_1=0$　　(2)

CC' 的方程為:$(X_3^T D X_2) l_1 - (X_3^T D X_1) l_2 = 0$ (3)

將(1),(2),(3) 相加,結果為 0,即 AA',BB',CC' 共點(有可能是無限遠點),故 $\triangle ABC$ 與 $\triangle A'B'C'$ 有 *Desargues* 關係.

定理 2.2:若 $\triangle\Psi$ 與 $\triangle\Omega$ 有 *Desargues* 關係,$\triangle\Psi'$ 為 $\triangle\Psi$ 之極三角形,$\triangle\Omega'$ 為 $\triangle\Omega$ 之極三角形,則 $\triangle\Psi'$ 與,$\triangle\Omega'$ 亦有 *Desargues* 關係.

證明:平面上的點與其極線有對偶關係. 若 $\triangle\Psi$ 與 $\triangle\Omega$ 有 *Desargues* 關係,用配極即得 $\triangle\Psi'$ 與 $\triangle\Omega'$ 亦有 *Desargues* 關係.

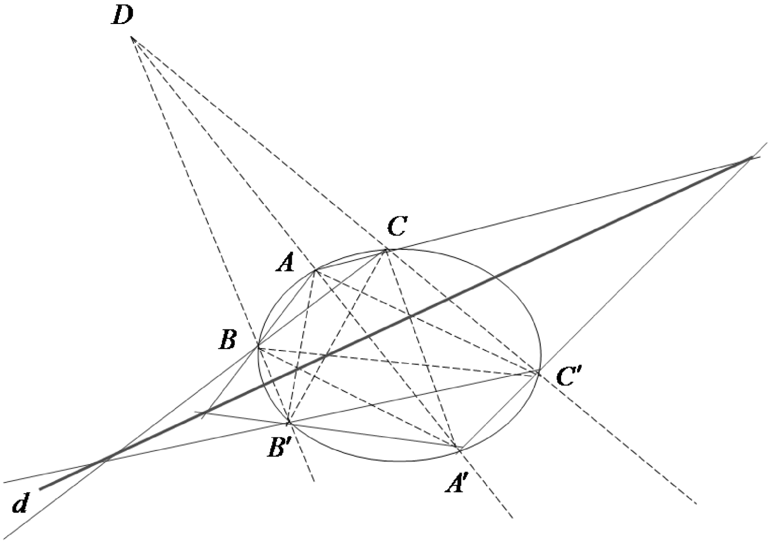
定理 2.3:若 $\triangle ABC$ 與 $\triangle A'B'C'$ 均內接於圓錐曲線 Γ 且有 *Desargues* 關係,Γ 中過 A,B,C,A',B',C' 之切線分別設為 a,b,c,a',b',c',則 $\langle a,b,c\rangle$ 所圍成之三角形與 $\langle a',b',c'\rangle$ 所圍成之三角形亦有 *Desargues* 關係,其逆亦真.

證明:運用定理 2.2. 圓錐曲線上之點與過此點的切線有對偶關係. 此定理之前提與結論恰好成對偶關係.

定理 2.4:若圓錐曲線 Γ 的一組切線 $\langle a,b,c\rangle$ 所圍成之三角形和另一組切線 $\langle a',b',c'\rangle$ 所圍成之三角形有 *Desargues* 關係,設切點分別為 A,B,C,A',B',C',則 ABC 與 $A'B'C'$ 亦有 *Desargues* 關係.

證明:前提與結論恰好成對偶關係,又定理 2.3 與定理 2.4 亦恰好成對偶關係.

定理 2.5:若 $\triangle ABC$ 與 $\triangle A'B'C'$ 均內接於圓錐曲線 Γ 且有 *Desargues* 關係,設對應頂點之連線共點於 D,對應邊之交點共線於直線 d,則 D 與 d 關於 Γ 有極與極線之關係.

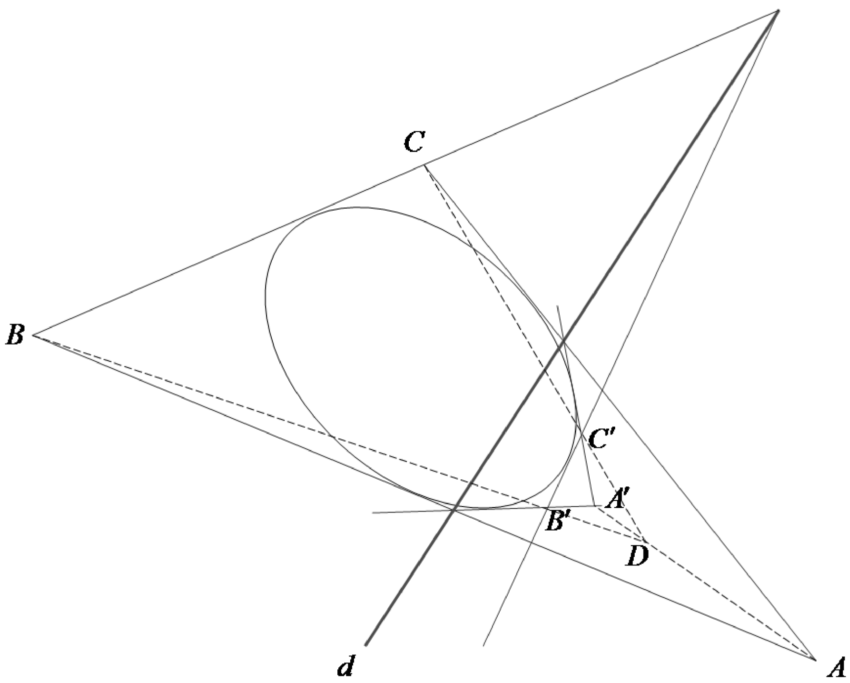


證明:設 AA',BB',CC' 共點於 D. 由 *Desargues* 定理,AB 與 $A'B'$ 之交點(或須延長,下同),AC 與 $A'C'$ 之交點,BC 與 $B'C'$ 之交點,必共線,設為 d,則 d 為 D 之極線. 對於 Γ 而言,弦 AB 與 $A'B'$ 之交點,AC 與 $A'C'$ 之交點,BC 與 $B'C'$ 之交點,AB' 與 $A'B$ 之交點,⋯ 等必在 D 關於 Γ 之極線 d 上. 反之,若 AB 與 $A'B'$ 之交點,AC 與 $A'C'$ 之交點,BC 與 $B'C'$ 之交點,這

三點共線於 d,則由 *Desargues* 定理之逆定理,AA',BB',CC' 必共點,設為 D. 此時,AB 與 $A'B'$ 之交點,AC 與 $A'C'$ 之交點,BC 與 $B'C'$ 之交點,AB' 與 $A'B$ 之交點,AC' 與 $A'C$ 之交點,BC' 與 $B'C$ 之交點都在 D 之極線上,故 D 之極線必為 d.

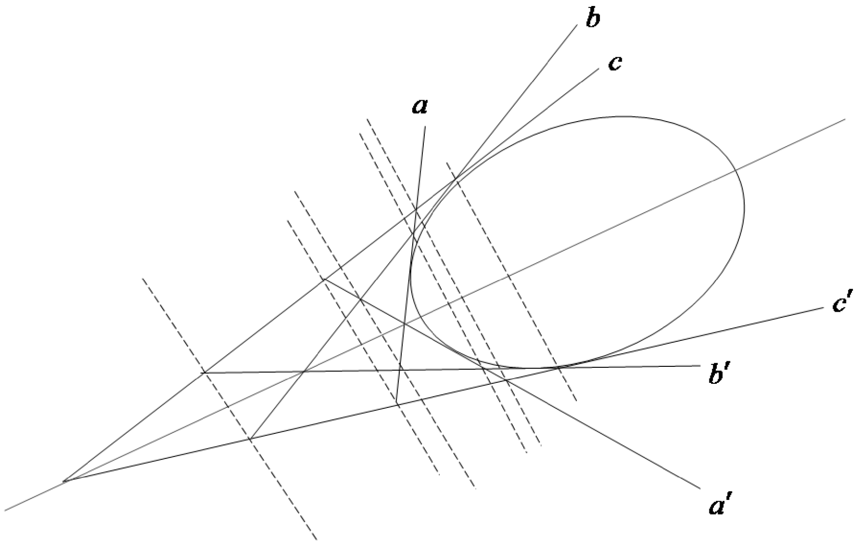
運用對偶關係(配極),可得相應之定理如下:

定理 2.6:若 $\triangle ABC$ 與 $\triangle A'B'C'$ 均外切(包括旁切)於圓錐曲線 Γ 且有 *Desargues* 關係,設對應頂點之連線共點於 D,對應邊之交點共線於直線 d,則 D 與 d 關於 Γ 有極與極線之關係.



在定理2.5的證明中可知,若 $\triangle ABC$ 與 $\triangle A'B'C'$ 均內接於圓錐曲線 Γ 且有 *Desargues* 關係,則弦 AB 與 $A'B'$ 之交點,AC 與 $A'C'$ 之交點,BC 與 $B'C'$ 之交點,AB' 與 $A'B$ 之交點,AC' 與 $A'C$ 之交點,BC' 與 $B'C$ 之交點,共6點共線. 根據對偶法則,在定理2.6中,設 $\triangle ABC$ 中 A 之對邊為 a,$\triangle A'B'C'$ 中 A' 之對邊為 a',餘類推,則除了 bc 與 $b'c'$ 之連線(即 A 與 A' 之連線),ac 與 $a'c'$ 之連線(即 B 與 B' 之連線),ab 與 $a'b'$ 之連線(即 A 與 C' 之連線)共點於 D 外,ab' 與 $a'b$ 之連線,ac' 與 $a'c$ 之連線,bc' 與 $b'c$ 之連線亦共點於 D,即上述6線共點於 D.

下圖顯示,對圓錐曲線 Γ 的兩組切線 $\langle a,b,c\rangle$ 和 $\langle a',b',c'\rangle$ 而言,當 aa',bb',cc' 共線時,bc 與 $b'c'$ 之連線,ac 與 $a'c'$ 之連線,ab 與 $a'b'$ 之連線,ab' 與 $a'b$ 之連線,ac' 與 $a'c$ 之連線,bc' 與 $b'c$ 之連線,這6條直線共點. 而當 aa',bb',cc' 所共之直線通過 Γ 的對稱中心時,這6條直線共點於無限遠處(無限遠點).



定理 2. 7:圓錐曲線 Γ 上有兩組點$\langle A_1, A_2, \cdots, A_n\rangle$ 和$\langle A'_1, A'_2, \cdots, A'_n\rangle$,若直線 $A_1A'_1$, $A_2A'_2, \cdots, A_nA'_n$ 共點,則直線 A_kA_j 與 $A'_kA'_j$ 的交點,$A_kA'_j$ 與 A'_kA_j 的交點(其中 $k = 1, 2, \cdots, n; j = 1, 2, \cdots, n$,但 $k \neq j$),共 $n^2 - n$ 點必共線(此直線與 $A_1A'_1, A_2A'_2, \cdots, A_nA'_n$ 所共之點有極線與極的關係).[2]

定理 2. 8:圓錐曲線 Γ 上有兩組點$\langle A_1, A_2, \cdots, A_n\rangle$ 和$\langle A'_1, A'_2, \cdots, A'_n\rangle$,若直線 A_kA_j 與 $A'_kA'_j$ 的交點(其中 $k = 1, 2, \cdots, n; j = 1, 2, \cdots, n$,但 $k \neq j$,共$\frac{n^2 - n}{2}$點) 共線於 d,則直線 $A_1A'_1, A_2A'_2, \cdots, A_nA'_n$ 共點(此點與 d 有極與極線的關係).

證明:$\triangle A_1A_2A_3$ 與 $\triangle A'_1A'_2A'_3$ 有三對對應邊交點共線於 d,故 $A_1A'_1, A_2A'_2, A_3A'_3$ 共點,設為 D. 同理,故 $A_1A'_1, A_2A'_2, A_4A'_4$ 亦共點,此點亦必為 D. 依同理推導,最後得 $A_1A'_1$, $A_2A'_2, \cdots, A_nA'_n$ 共點於 D. 由定理2. 7,知 D 與 d 有極與極線之關係.(此時,$A_kA'_j$ 與 A'_kA_j 之交點共$\frac{n^2 - n}{2}$點亦必在 d 上,其中 $k = 1, 2, \cdots, n; j = 1, 2, \cdots, n$,但 $k \neq j$)

定理 2. 9:圓錐曲線 Γ 有切線組$\langle a_1, a_2, \cdots, a_n\rangle$ 和$\langle a'_1, a'_2, \cdots, a'_n\rangle$,若 $a_1a'_1, a_2a'_2, \cdots$, $a_na'_n$ 共線,則 a_ka_j 與 $a'_ka'_j$ 的連線,$a_ka'_j$ 與 a'_ka_j 的連線(其中 $k = 1, 2, \cdots, n; j = 1, 2, \cdots, n$ 但 $k \neq j$) 共 $n^2 - n$ 條直線必共點.(此點與 $a_1a'_1, a_2a'_2, \cdots, a_na'_n$ 所共之線有極與極線之關係)

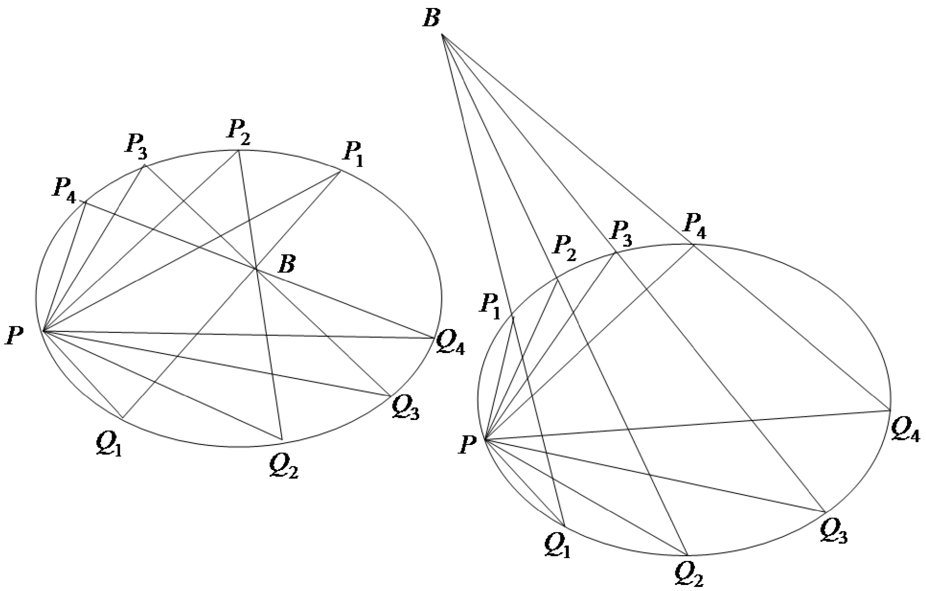
證明:運用配極於定理 2. 7.

定理 2. 10:圓錐曲線 Γ 有切線組$\langle a_1, a_2, \cdots, a_n\rangle$ 和$\langle a'_1, a'_2, \cdots, a'_n\rangle$,若 a_ka_j 與 $a'_ka'_j$ 的連線(其中 $k = 1, 2, \cdots, n; j = 1, 2, \cdots, n$,但 $k \neq j$,共$\frac{n^2 - n}{2}$條直線) 共點於 D,則 $a_1a'_1, a_2a'_2$, $\cdots, a_na'_n$ 共線(此直線與 D 有極線與極之關係).

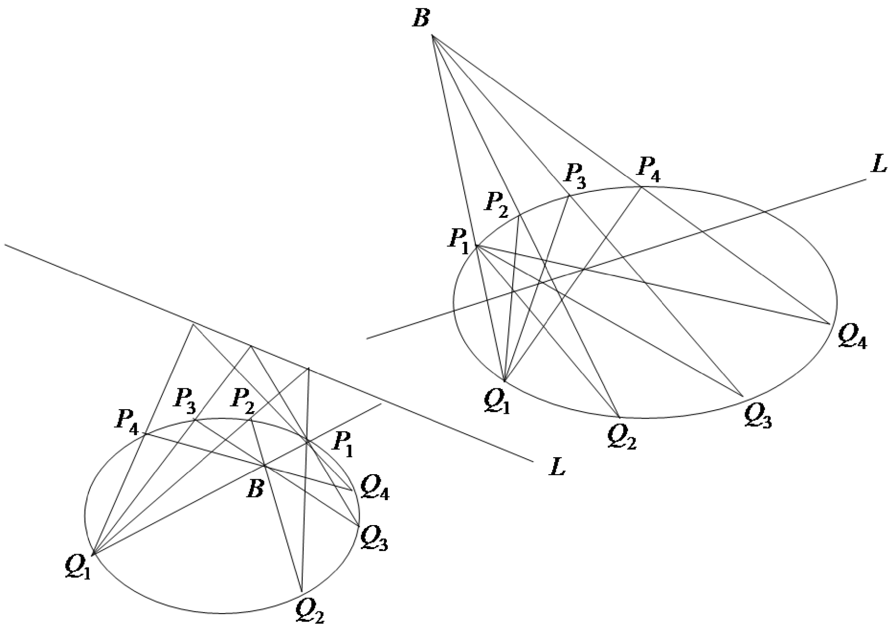
證明:運用配極於定理 2. 8.

以下論述牽涉到共點綫之交比。我們知道,共點之4直綫,其交比等於此4直綫與任一條截綫依次所交4點的交比。設共點於P之4直綫為PP_1,PP_2,PP_3,PP_4,與任一截綫依次交於點A,B,C,D,則$(PP_1,PP_2,PP_3,PP_4) = (A,B,C,D)$.

定理2.11: 設B不為圓錐曲線Γ上之點,過B作任意四條直線,若與Γ之交點依次為$P_1,Q_1,P_2,Q_2,P_3,Q_3,P_4,Q_4$(如下圖所示),則對$\Gamma$上任一點$P$,恆有$(PP_1,PP_2,PP_3,PP_4) = (PQ_1,PQ_2,PQ_3,PQ_4)$.



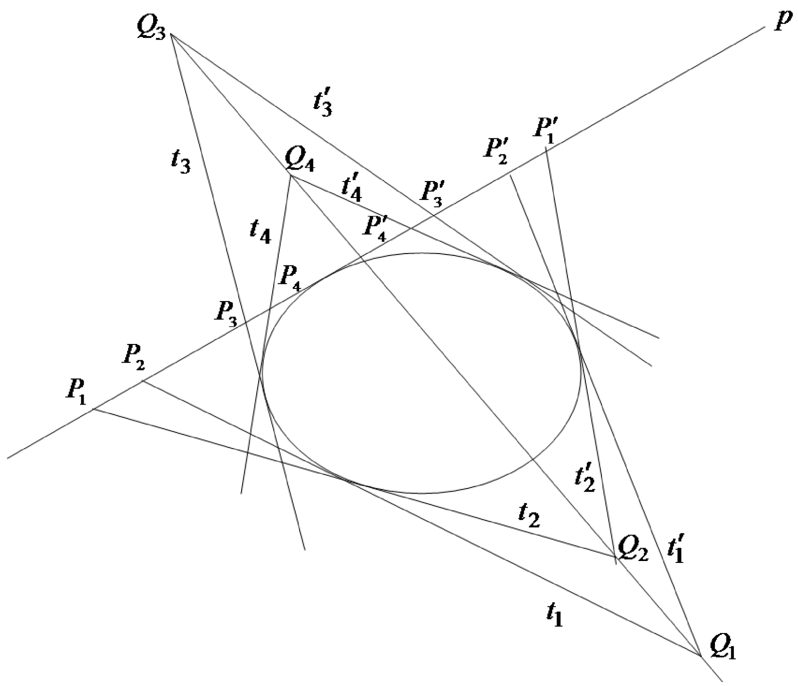
證明: 由於P_1Q_2與Q_1P_2之交點,P_1Q_3與Q_1P_3之交點,P_1Q_4與Q_1P_4之交點,都在B關於Γ之極線L上(如下圖所示),



由直線之交比與其截線上點之交比的相互關係,知$(Q_1P_1, Q_1P_2, Q_1P_3, Q_1P_4) = (P_1Q_1, P_1Q_2, P_1Q_3, P_1Q_4)$. 對上任一點, 由 *Steiner* 定理, $(PP_1, PP_2, PP_3, PP_4) = (Q_1P_1, Q_1P_2, Q_1P_3, Q_1P_4)$, $(PQ_1, PQ_2, PQ_3, PQ_4) = (P_1Q_1, P_1Q_2, P_1Q_3, P_1Q_4)$, 故$(PP_1, PP_2, PP_3, PP_4) = (PQ_1, PQ_2, PQ_3, PQ_4)$.

定理 2. 11 之對偶為下列定理:

定理 2. 12:對共線之 4 點 Q_1, Q_2, Q_3, Q_4,自每一點 Q_i 至圓錐曲線 Γ 作 2 切線 $t_i, t'_i (i = 1,2,3,4)$,分別交 Γ 之任一固定切線 p 於 $P_i, P'_I (i = 1,2,3,4)$,則$(P_1, P_2, P_3, P_4) = (P'_1, P'_2, P'_3, P'_4)$.



參考文獻:

[1] 李祥立《高等幾何簡論》[*M*]. 北京:中國社會科學出版社,2015:*pp*. 41 – 43

[2] 李祥立《高等幾何簡論》[*M*]. 北京:中國社會科學出版社,2015:*pp*. 55 – 56

[註] 該文作者是澳門培正中學前校長。

澳門數學會對澳門中小學數學教育的奉獻

石　瑋

2012 年,網絡刊載著《學生能力國際評估計劃》全球公佈的(PISA)成績結果:全球六十五個國家和地區的十五歲學生參與能力測試,其中澳門基礎教育系統不僅教育質量(數學素養)成績卓越,數學素養得分五百三十八分,比〇九年五百二十五分,提高了十三分,獲得排名第六;教育公平程度亦繼續稱冠全球。

作為一名澳門數學教育工作者倍感欣慰,再一次體會到“有耕耘就有收獲”這句話是眞理。由此見證到本澳數學教師在教青局的領導與組織之下,有關教學理念與教學方法的教師培訓已見成效。然而,澳門數學教育研究學會在本澳數學教育方面開展了大量的活動,既有苦勞,也有功勞。湧現了一批甘願為提升澳門中學生數學素養的辛勤奉獻者。

自從二〇〇二年六月澳門數學教育研究學會成立後,本會在汪甄南會長的領導下,開展了各項數學教學活動約十七年之久(以下簡稱「數研會」)。

辦《數學教育高級研修班》提升教師教藝

為提升本澳數學教師的素質,汪會長率領眾理事及本澳數學教師在「數研會」成立不久,舉辦了《國家數學教育高級研修班》的關於『數學教師教育』的澳門會議,請來了十五位國內頂級數學教育專家與學者,有:東北師範大學校長史寧中教授、西南大學宋乃慶校長、華東師範大學、歐亞科學院院士張奠宙教授、北京師範大學數學通報主編張英伯教授等各位博士學者,為澳門數學教師們作了精彩的學術報告;其後,為了提升數學教師關於培養學生創造力的技能技巧,學會邀請了北京師範大學廈門培訓中心主任張遠南教授的題為“激活數學思維的創造力”數學報告;為了提升數學教師的課堂教學效果,學會又邀請過全國聞名的山東杜郎口中學的數學組長徐利老師來澳門展示課堂教學。

此後,會長又邀請過美國、德國兩位數學教育專家,為澳門數學教師們做了關於如何培養學生數學思維的優質培訓。會長還邀請了兩位國際著名烏克蘭教育家介紹蘇霍姆林斯基關於調動學生學習積極性的教育理念介紹會。蘇霍姆林斯基的教育思想突出的是對孩子的愛,對教育事業的執著;獨立思考、勇於堅持眞理的高尚品格;以人為本的教育理念以及實事求是的科研精神。

一年一度的全美高中數學邀請賽是一項歷史悠久、在全球範圍影響較大的高中數學賽

事。它與國際奧林匹克數學比賽不同的是它不僅是一項個人賽事,同時還增設了團體賽、接力賽和思考賽共四項比賽,全面考查學生在上述四個方面的數學能力。

學會培訓中學生參加 ARML 賽榮獲四次第一與六次第二名殊榮

學會在全體理事的精心合作和籌備之下,通過自己命題,選拔出全澳的高中學生精英,參加美國組織的世界範圍的高中數學邀請賽(ARML)。這些精英與培訓教師是在「澳門教青局」和「澳門基金會」的資助下赴美參賽的。

自從學會培訓、組織本澳高中學生參賽十年來,均取得團體賽的四次第一與六第二名的好成績。而培訓教師都是學會的理事在業餘時間兼任的,不僅增加了培訓教師的工作量,而且培訓難度也大大增加。

用「請進來」與「走出去」的方法提升本澳教師素質

汪會長邀請過國內小學數學四大教學流派來澳展示優質課堂教學活動。參加展示現場教學的專家有:全國小學數學教育專業委員會副理事長吳正憲、全國嘗試教育理論研究會理事長邱學華、上海師範大學附屬小學校長虞怡玲及重慶市長沙路小學副校長卞小娟。

近年來,學會組織本澳中小學生到香港參加《數學大王》的比賽、新加坡舉辦的國際中小學生的數學比賽、本澳小學生多次參加過國內《史豐收速算法》,而且本澳許多小學生獲得佳績。因版面有限,不一一列述,讀者可參閱數學教育研究學會的網頁詳細刊登著獲獎者名單。

歷年來學會組織本澳的希望杯比賽、中小學的優質課堂教學評比;學會於 2013 年 5 月、11 月組織了幼兒教育理論講座與幼兒教學實踐示範課。

學會為了提升本澳數學教師水平,還組織過兩屆奧數教師培訓班,有些教師榮獲奧數導師一、二級證書。

汪會長一直率領理事們本著「請進來」與「走出去」的提升教師素質的方法。「請進來」是指請外地教育專家來澳指導本澳數學教師提昇專業水平。在多種形式的培訓下,從而達到逐步提升本澳數學教師素質的目的。汪甄南會長多次組織澳門中小學數學教師「走出去」學習外地先進教學經驗。「走出去」促使本澳數學教師順應教改潮流,不斷更新教育教學觀念,確立科學的改革觀,使教師專業水準可持續發展。總而言之,十六年來,學會開展的數學教研活動,多采多姿,不一而足。

2013 年汪會長應邀參加了《南極論壇》

由香港、紐約、日內瓦、巴黎等地精英人士參與發起的《南極論壇》於 2013 年 11 月 22 日至 12 月 2 日在南極舉行,來自全球各地的各行業領導人物共一百六十四位代表,在阿根

廷的烏斯懷亞乘坐由首屈一指的法國郵輪公司龐洛精心打造的北冕號郵輪前往世界上最後一片淨土南極,參與了這一歷史上首次在南極大陸舉辦的人文盛會,澳門數學教育研究學會汪會長應邀參加。

汪會長向有關代表介紹了崔世安特首在施政報告中所提的「教育興澳」以及澳門在回歸祖國十三年來的教育發展所取得的豐碩成果,特別是連續十年澳門中學生代表在參加全美高中數學競賽(ARML)所取得的優異成績,獲得了與會代表的一致認同與贊賞。

南極論壇是一個國際性的論壇,大家坐在一起共同探討今天的世界該怎麼辦,全世界無論大國還是小國都面臨很多問題。從這個意義上講,南極論壇也是致力於為廿一世紀的人類尋找一個美好的未來。

2017 年環亞太國際邀請賽在澳門濠江中學舉行

2017 年奧林匹克數學“三維杯”環亞太國際邀請賽於 7 月 8、9 兩日在澳門濠江中學舉行,這是澳門有史以來,規模最大、參與地區與人數(518 人)最多、由澳門數學教育研究學會主持的第一次國際奧林匹克數學邀請賽。

奧林匹克數學“三維杯”環亞太國際邀請賽是一項具有國際影響力的數學比賽,參與這次比賽的地區或國家有澳門、香港、上海、深圳、成都、綿陽、高雄、越南、馬來西亞、菲律賓、印度尼西亞等亞太區國家及地區的中小學生。為的是讓數學教育工作者、教師、學生之間進行經驗分享與交流,透過「友誼第一,比賽第二」的理念,使各地的學生、教師建立起深厚的友誼,且為促進世界和平做出貢獻。是次活動不僅可以提升學生學習數學的興趣,發揮他們的數學潛能,同時也能提升學生的邏輯推理能力及解決數學問題的能力,培養其團隊合作精神。

2017 年 7 月 8 日,是奧林匹克數學“三維杯”環亞太國際邀請賽在澳門舉行比賽的日子。在濠江中學的大門口,醒目的電子屏上的標語《奧林匹克數學“三維杯”環亞太國際邀請賽》閃耀著粉紅色的光芒。

由於篇幅所限,十六來本澳中小學生參加數學教育研究學會組織的各種比賽獲獎的中小學生的名單,請觀看數學教育研究學會的網頁 http://www. mathsmo. com/education/或澳門數學奧林匹克學會:http://www. mathsmo. com/olympics/網站上查詢。

歷年來,數學會所組織的各項活動全是在假日舉行,理事們要犧牲自己的休息時間、親子活動時間、陪伴家人的時間等等,每位理事每年至少需要義務加班百多個小時。教師職業壓力大是當前教育界一個比較普遍的共識。特別是數學教師的工作壓力更大一些,任課較多,改家課簿也多,學生成績及格率也比其他學科低。為了提升本澳學生的數學水平,理事們團結一致,為提升澳門中小學生的數學思維品質甘願奉獻,無怨無悔。如今學會肩負著數學教育中前所未有歷史使命,要求執教者們培養學生的創造性,而這個使命又要求身負重任的數學教師們再接再勵。

四校聯考(2016 年) 數學模擬卷選擇題

深度剖析、多元解答

澳門培道中學　鄧海棠

澳門四校聯考入學考試(2016 年) 數學模擬卷的選擇題題目如下,下面將對其逐題進行深度剖析和多元解答。

第一部分 選擇題。每題佔四分,共佔六十分。

1. 當 x 由 $-\dfrac{\pi}{4}$ 增加至$\dfrac{3\pi}{4}$時,$cosx$ 的值

A. 一直上升　　*B*. 一直下降　　*C*. 先上升後下降

D. 先下降後上升　　*E*. 以上皆非

答案: C

剖析: 這裡考查了三角函數$y = cosx$的單調性,是澳門四校聯考數學科考試大綱的第13點“三角” 部分中的三角函數性質。三角函數是升大考試題的熱點,也是難點,近年來的趨勢是捨棄了對複雜三角函數的轉換和特殊技巧的考察,把重點轉移到對三角函數的圖象特徵和函數性質的考查上。$y = cosx$ 是$[2k\pi - \pi, 2k\pi]$$(k \in Z)$ 上的增函數,是$[2k\pi, 2k\pi + \pi]$$(k \in Z)$ 上的減函數,可以循這個方向進行解題。

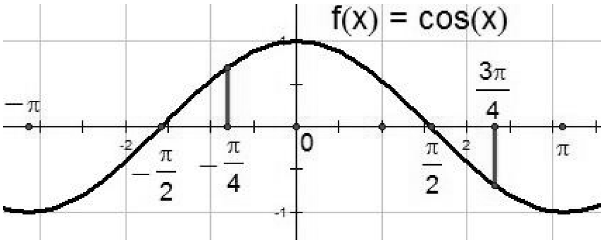
解法 1: 運用函數 $y = cosx$ 的單調性。

$\because\ -\dfrac{\pi}{4}[-\pi, 0]$,$y = cosx$ 是$[-\pi, 0]$ 上的增函數,

及$\dfrac{3\pi}{4} \in [0, \pi]$,$y = cosx$ 是$[0, \pi]$ 上的減函數,

$\therefore\ cosx$ 的值呈現先上升後下降的趨勢,選 C。

解法 2: 結合圖形$f(x) = cosx$。



如上圖所示,$cosx$ 的值呈現先上升後下降的趨勢,選 C。

解法 3:列表法。

x	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$
$cosx$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

如上表所示,$cosx$ 的值呈現先上升後下降的趨勢,選 C。

2. 某手錶的標價比成本高出 40%。若該手錶以七折出售,求盈利或虧蝕百分率。

A. 賺 28%　　*B.* 賺 12%　　*C.* 賺 10%　　*D.* 蝕 2%　　*E.* 蝕 10%

答案:D

剖析:"百分數的意義及其在日常生活中的應用;盈利和虧損、折扣" 是考試大綱中第 2 點的規定內容。由於與現實生活較為密切,也會作為實際應用來考查。

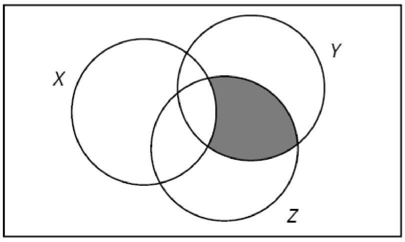
解法 1:把成本看成是 1,得所求的值為 $(1+40\%)\times 70\% - 1 = -2\%$,即蝕 2%,選 D。

解法 2:可以設成本為 a,則有 $\frac{a(1+40\%)\times 70\% - a}{a} = -0.02$,即蝕 2%,選 D。

解法 3:也可以設成本價為 a,出售價為 b,

則有 $a(1+40\%) = \frac{b}{70\%}$,解得 $b = 0.98a$,即蝕 2%,選 D。

3. 在韋恩圖中,陰影部分表示



A. $X \cup (Y \cap Z)$　　*B.* $X^C \cup (Y \cap Z)$　　*C.* $X \cup (Y \cap Z)^C$

D. $(X \cap Y)^C \cap Z$　　*E.* $(X^C \cap Y) \cap Z$

答案:E

剖析:本題考察了澳門四校聯考數學科考試大綱的第 1 點"基本概念" 中的"實數系統" 裏的"集合和子集的概念,集合的運算,併集、交集和補集,韋恩(*Venn*) 圖"。集合是升大考試的重點、熱點內容之一。

解法 1:排除法。

陰影部分不含 X,只有 X^C,排除 A、C;也不含 $Y \cap Z$ 以外的部分,排除 B、D;選 E。

解法 2:另外一種排除方法。

陰影部分是Y的一部分,Y^C不對,排除C、D;陰影部分不含X,只有X^C,即在X^C內,排除A、B;選E。

4. 若$y \propto x$,下列何者為正確?

Ⅰ$x \propto y$. Ⅱ. $y^2 \propto x^2$ Ⅲ. $(y+x) \propto 2x$

A. 只有 Ⅱ B. 只有 Ⅲ C. 只有 Ⅰ 和 Ⅱ

D. 只有 Ⅰ 和 Ⅲ E. Ⅰ、Ⅱ 和 Ⅲ

答案:E

剖析:這是四校聯考數學科考試大綱的第3點“變分:比、比例;正變、反變、聯變及部分變”的要求。以前是澳大的必考題型,以後未必會每年都考查。

解法1:$\because y \propto x, \therefore x \propto y$。Ⅰ 正確;

由於y隨x正變,從而$y^2 \propto x^2$, Ⅱ 正確;

$(y+x) \propto 2x \Leftrightarrow (y+x) \propto (x+x) \Leftrightarrow y \propto x$, Ⅲ 正確,選$E$。

解法2:由$y \propto x$,y隨x而正變,設$y = kx$,其中k為非零常數。

得$x = \frac{1}{k}y$,由$\frac{1}{k}$為常數,得x隨y而正變, Ⅰ 正確;

又$y^2 = k^2x^2$,及k^2為常數,得y^2隨x^2而正變, Ⅱ 正確;

依設$y = kx$,其中k為非零常數,得$y + x = (k+1)x = \frac{k+1}{2} \cdot (2x)$,及$\frac{k+1}{2}$為常數,

從而$y + x$隨$2x$而正變, Ⅲ 正確,選E。

5. 已知多項式$p(x)$可被$2x+1$整除,而被$x-1$除餘數為1。若$p(x)$被$2x^2-x-1$除,餘式是什麼?

A. $\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$ B. $x + \frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ D. $3x + \frac{1}{3}$ E. $2x + \frac{2}{3}$

答案:A

剖析:長除法及綜合除法、因式定理及餘式定理是四校聯考數學科考試大綱的第4點要求。這一類題目,通常都是用待定係數法求解。

解法1:待定係數法。

設$p(x) = (2x^2 - x - 1)g(x) + (ax + b)$,

則$p(x) = (2x+1)(x-1)g(x) + (ax+b)$,

由已知,根據餘式定理得$g\left(-\frac{1}{2}\right) = 0, g(1) = 1$。

代入聯立得方程組$\begin{cases} -\frac{1}{2}a + b = 0, \\ a + b = 1. \end{cases}$

解之得$\begin{cases} a = \dfrac{2}{3}, \\ b = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$故所求餘式是$\dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{3}$;選 A。

解法 2:排除法。

在 A 中,$\dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}(2x + 1)$,可被 $2x + 1$ 除盡;

在 B 中,$x + \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}(3x + 1)$,不可被 $2x + 1$ 除盡;

在 C 中,$\dfrac{1}{3}x + \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}(x + 2)$,不可被 $2x + 1$ 除盡;

在 D 中,$3x + \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}(9x + 1)$,不可被 $2x + 1$ 除盡;

在 E 中,$2x + \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{3}(3x + 1)$,不可被 $2x + 1$ 除盡;

綜上知 B,C,D,E 皆不符,選 A。

6. 若 a 和 b 為方程 $2x^2 - x - 5 = 0$ 的兩個不相同的根,則 $= \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} =$

$A.\ \dfrac{25}{19}$　　$B.\ \dfrac{19}{25}$　　$C.\ \dfrac{37}{44}$　　$D.\ \dfrac{21}{25}$　　$E.\ \dfrac{23}{25}$

答案:D

剖析:一元二次方程的解、根與係數的關係是四校聯考數學科考試大綱的第 5 點要求。相應解法有“根與係數的關係”、“求根公式”、“構造方程” 法等等常用做法。

解法 1:用韋達定理。

由韋達定理得:$a + b = -\dfrac{-1}{2} = \dfrac{1}{2}, ab = \dfrac{-5}{2} = -\dfrac{5}{2}$;

則$\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} = \dfrac{a^2 + b^2}{a^2b^2} = \dfrac{(a + b)^2 - 2ab}{(ab)^2} = \dfrac{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - 2\left(-\dfrac{5}{2}\right)}{\left(-\dfrac{5}{2}\right)^2} = \dfrac{21}{25}$,選 D。

解法 2:用求根公式。

由求根公式得$2x^2 - x - 5 = 0$的兩個不相同的根為$\dfrac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 2 \times (-5)}}{2 \times 2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{41}}{4}$,

不妨設$A = \dfrac{1 + \sqrt{41}}{4}, b = \dfrac{1 - \sqrt{41}}{4}$,得$a^2 = \dfrac{42 + 2\sqrt{41}}{16} = \dfrac{21 + \sqrt{41}}{8}, b^2 = \dfrac{42 - 2\sqrt{41}}{16}$

$= \dfrac{21-\sqrt{41}}{8}$,

從而$\dfrac{1}{a^2}=\dfrac{8}{21+\sqrt{41}}$,$\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{8}{21-\sqrt{41}}$,

得$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{8}{21+\sqrt{41}}+\dfrac{8}{21-\sqrt{41}}=8\times\dfrac{(21-\sqrt{41})+(21+\sqrt{41})}{(21+\sqrt{41})(21-\sqrt{41})}=\dfrac{8\times21\times2}{441-41}=$
$\dfrac{8\times21\times2}{400}=\dfrac{21}{25}$,選 D。

解法 3:方程法。

$\because$ a 和 b 為方程 $2x^2-x-5=0$ 的兩個不相同的根,

$\therefore$ $2a^2-a-5=0$,$2b^2-b-5=0$;

兩式相減,得 $2(a^2-b^2)=a-b$,即 $2(a+b)(a-b)=a-b$,而 a 和 b 不相同,

從而可約去 $a-b$,得 $2(a+b)=1$,$a+b=\dfrac{1}{2}$;

又由 $2a^2-a-5=0$,$2b^2-b-5=0$,

得 $a^2=\dfrac{a+5}{2}$,$b^2=\dfrac{b+5}{2}$,故 $a^2+b^2=\dfrac{a+5}{2}+\dfrac{b+5}{2}=\dfrac{a+b}{2}+5=\dfrac{21}{4}$,

由 $ab=-\dfrac{5}{2}$,得 $a^2b^2=(ab)^2=\left(-\dfrac{5}{2}\right)^2=\dfrac{25}{4}$,

則$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{a^2+b^2}{a^2b^2}=\dfrac{\frac{21}{4}}{\frac{25}{4}}=\dfrac{21}{25}$,選 D。

7. 若 $x+\dfrac{1}{x}=7$,則$\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}=$

A. $\pm\sqrt{7}$　　*B.* $\pm\sqrt{5}$　　*C.* ± 3　　*D.* ± 7　　*E.* 以上皆非

答案:B

剖析:本題目結合了四校聯考數學科考試大綱的第 9 點要求“非線性方程:解分式方程及無理方程” 及第 6 點要求“指數及根式:指數定律;根式的簡化與運算”。此題既是根式的運算,也包含了無理方程及分式方程的內容,必須要滿足 $x>0$(驗根) 這個隱含條件。對於無理方程或者是根式的運算,一般而論,都是運用平方法或者換元法去求解,也可以把方程的根計算出來再求解。

解法 1:平方法。

$\because$ $\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2=x+\dfrac{1}{x}-2\cdot\sqrt{x}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x}}=7-2=5$,

$\therefore$ $\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\pm\sqrt{5}$,選 B。

解法 2:平方差對偶法。

由 $x+\frac{1}{x}=(\sqrt{x})^2+\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2=(\sqrt{x})^2+\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2+2\sqrt{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}-2=\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2-2=7>0$,

得 $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2=9$,且 $x>0$,從而 $\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=3$,………①

$$設\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}=M,\cdots\cdots\cdots②$$

① + ② 得 $2\sqrt{x}=3+M$,………③

① − ② 得 $\frac{2}{\sqrt{x}}=3-M$,………④

③④ 相乘得 $4=9-M^2$,解得 $M=\pm\sqrt{5}$,選 B。

解法 3:求根法。

由 $x+\frac{1}{x}=(\sqrt{x})^2+\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2=(\sqrt{x})^2+\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2+2\sqrt{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}-2=\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2-2=7>0$,

得 $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2=9$,且 $x>0$,從而 $\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=3$,

令 $y=\sqrt{x}$,得 $y+\frac{1}{y}=3$,從而 $y^2-3y+1=0$,解得 $y=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$,即 $\sqrt{x}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$;

當 $\sqrt{x}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ 時,$\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}=\sqrt{5}$;當 $\sqrt{x}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ 時,$\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}=-\sqrt{5}$;

$\therefore\ \sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}=\pm\sqrt{5}$,選 B。

8. 若 $a<2$ 及 $ax+2<2x-3$,則

A. $x<\frac{-5}{a+2}$　　*B.* $x<\frac{5}{a-2}$　　*C.* $x>\frac{5}{a-2}$　　*D.* $x>\frac{5}{2-a}$　　*E.* $x<\frac{5}{a+2}$

答案:D

剖析:本題目的知識點是四校聯考數學科考試大綱的第 7 點"代數不等式:代數不等式的運算及其解集;解一元一次不等式"的要求。通常會運用普通的一元一次不等式解法進行求解,但是要注意正確使用"不等式兩邊同時乘以(或除以)同一個小於0的整式,不等號方向改變"這個性質。當然啦,作為選擇題,如果取值得當,運用賦值法無疑是可以很快解題的。

解法 1:解不等式法。

由 $ax+2<2x-3$,得 $(a-2)x<-5$;

$\because a<2$,$\therefore a-2<0$,得 $x>\frac{-5}{a-2}=\frac{5}{2-a}$。選 D。

解法 2:賦值法。

由 $a < 2$,不妨取 $a = 0$,

則 $ax + 2 < 2x - 3$ 可化為 $2 < 2x - 3$,$2x > 5$,$x > \frac{5}{2}$。選 D。

9. 若$\frac{1}{2}log_{10}y = 1 + log_{10}x$,則

$A.\ y = \sqrt{10x}$　　$B.\ y = 100x^2$　　$C.\ y = (10 + x)^2$

$D.\ y = 10x^2$　　$E.$ 以上皆非

答案:B

剖析:本題目的知識點是四校聯考數學科考試大綱的第 8 點"對數函數與指數函數:對數的性質,換底公式" 的要求。解答這類題目往往用對數和指數的運算法則相結合。

解法 1:由$\frac{1}{2}log_{10}y = 1 + log_{10}x$,得 $log_{10}\sqrt{y} = log_{10}x$,得$\sqrt{y} = 10x$,得 $y = 100x^2$,選 B。

解法 2:排除法。

由$\frac{1}{2}log_{10}y = 1 + log_{10}x$,得 $log_{10}\sqrt{y} = log_{10}10x$,得$\sqrt{y} = 10x$,

在 A 中,若 $y = \sqrt{10x}$,則$\sqrt{y} = \sqrt{\sqrt{10x}} \neq 10x$,不合;

在 B 中,若 $y = 100x^2$,則$\sqrt{y} = \sqrt{100x^2} = 10x$,符合;排除 E

在 C 中,若 $y = (10 + x)^2$,則$\sqrt{y} = \sqrt{(10 + x)^2} = 10 + x \neq 10x$,不合;

在 D 中,若 $y = 10x^2$,則$\sqrt{y} = \sqrt{10x^2} = \sqrt{10}x \neq 10x$,不合;

綜上所述,只有 B 成立,選 B。

解法 3:賦值法。

不妨取 $y = 100$,則原方程左式 $= \frac{1}{2}log_{10}y = \frac{1}{2}log_{10}100 = 1$,

由右式 $= 1 + log_{10}x = 1$,得 $x = 1$;從而:

在 A 中,若 $y = \sqrt{10x}$,即 $100 = \sqrt{10}$,不成立;

在 B 中,若 $y = 100x^2$,即 $100 = 100$,成立;

在 C 中,若 $y = (10 + x)^2$,即 $100 = (10 + 1)^2 = 121$,不成立;

在 D 中,若 $y = 10x^2$,則 $100 = 10$,不合;

綜上所述,只有 B 成立,選 B。

10. $= \frac{2}{x^2 - 1} - \frac{x - 1}{x^2 - 2x - 3} =$

$A.\ \frac{-x^2 + 2x + 5}{(x - 1)(x + 1)(x + 3)}$　$B.\ \frac{-x^2 + 2x + 7}{(x - 1)(x + 1)(x + 3)}$　$C.\ \frac{-x^2 - 5}{(x - 3)(x - 1)(x + 1)}$

$D.\ \dfrac{x^2-5}{(x-3)(x-1)(x+1)}$　　$E.\ \dfrac{-x^2+4x-7}{(x-3)(x-1)(x+1)}$

答案:E

剖析:本題目的知識點是四校聯考數學科考試大綱的第4點"多項式及有理分式"的要求。解答這類題目往往用通分和因式分解相結合較為直接。

解法1:賦值法。

由原分式的最簡公分母為$(x-3)(x-1)(x+1)$得:$x\neq 3$且$x\neq 1$且$x\neq -1$;

不妨取$x=0$,得原分式 $=\dfrac{2}{0-1}-\dfrac{0-1}{0-0-3}=-2-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{7}{3}$;

選項A中.$\dfrac{-x^2+2x+5}{(x-1)(x+1)(x+3)}=\dfrac{0+5}{(0-1)(0+1)(0+3)}=-\dfrac{5}{3}\neq-\dfrac{7}{3}$,不合;

選項B中.$\dfrac{-x^2+2x+7}{(x-1)(x+1)(x+3)}=\dfrac{0+7}{(0-1)(0+1)(0+3)}=-\dfrac{7}{3}$,要再排除;

選項C中.$\dfrac{-x^2-5}{(x-3)(x-1)(x+1)}=\dfrac{0-5}{(0-1)(0+1)(0-3)}=-\dfrac{5}{3}\neq-\dfrac{7}{3}$,不合;

選項D中.$\dfrac{x^2-5}{(x-3)(x-1)(x+1)}=\dfrac{0-5}{(0-1)(0+1)(0-3)}=-\dfrac{5}{3}\neq-\dfrac{7}{3}$,不合;

選項E中.$\dfrac{-x^2+4x-7}{(x-3)(x-1)(x+1)}=\dfrac{0-7}{(0-1)(0+1)(0-3)}=-\dfrac{7}{3}$,要再排除;

由於B和E都符合賦值的結果,必須要進行第二輪賦值,再排除其中一個選項;

不妨令$x=2$,得原分式 $=\dfrac{2}{4-1}-\dfrac{2-1}{4-4-3}=\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}=1$;

選項B中.$\dfrac{-x^2+2x+7}{(x-1)(x+1)(x+3)}=\dfrac{-4+4+7}{(2-1)(2+1)(2+3)}=\dfrac{7}{15}\neq 1$,不合,要排除;

選項E中.$\dfrac{-x^2+4x-7}{(x-3)(x-1)(x+1)}=\dfrac{-4+4-7}{(2-1)(2+1)(2-3)}=-\dfrac{-3}{-33}=1$,符合,結束排除;選$E$。

* 當然,如果不想再作第二輪賦值,可以考察:

在B和E選項的公分母中,只有E選項的公分母符合題目,從而排除B,選E。

解法2:通分計算。

$\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{x-1}{x^2-2x-3}=\dfrac{2}{(x-1)(x+1)}-\dfrac{x-1}{(x-3)(x+1)}=\dfrac{2(x-3)-(x-1)^2}{(x-1)(x+1)(x-3)}=$

$\dfrac{-x^2+4x-7}{(x-3)(x-1)(x+1)}$,選$E$。

11. 有2男孩及3女孩到課室上課,他們在課室佔了一行5座位。如果2個男孩要坐在一起,問總共有多少個可能排座的方法?

$A.$ 12　　$B.$ 24　　$C.$ 36　　$D.$ 48　　$E.$ 以上皆非

答案:D

剖析:本題目的知識點是四校聯考數學科考試大綱的第10點“排列與組合”的要求。這類題目往往以基本概念為主。

要注意解決排列組合的混合應用問題時,要先組合再排列,做到分類不重複,分步不遺漏。同時要注意區分清楚是分步乘法問題還是分類加法問題。

通常排列問題的解題方法有:特殊元素優先法,特殊位置優先法,相鄰問題捆綁法,不相鄰問題插空(隔空)法,定序問題除階乘法,分排問題直接處理法,正難則反等價轉換法。

組合問題的解題方法有:有限制條件的組合問題用直接法和間接法;對於分組問題,平均分組的題型要注意除以平均組數的階乘,對於分配問題,應該先分組再分配。

“2個男孩要坐在一起”,就要考慮直接用捆綁法,或者用間接的插空法。

解法1:間接法。

男女共5人有 $A_5^5=120$ 種排座方法,兩個男生隔開坐用插空法有 $A_3^3A_4^2=72$ 種排座方法,

故2個男孩要坐在一起,總共有 $120-72=48$ 種排座的方法。

解法2:直接法。

2個男孩要坐在一起用捆綁法有 $A_2^2=2$ 種排座方法,把捆綁在一起的2個男孩作為一個人與3女孩共4人有 $A_4^4=24$ 種排座方法,分兩步完成,用乘法原理得:2個男孩要坐在一起,總共有 $2\times24=48$ 種排座的方法。

12. 一幾何數列的各項均為正數,且任何項均等於後兩項之和,求公比之值。

$A.\ 1$ $\quad B.\ \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ $\quad C.\ \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ $\quad D.\ \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ $\quad E.\ \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

答案:C

剖析:本題目的知識點是四校聯考數學科考試大綱的第11點“數列”中的等比數列的要求。求解時往往運用定義結合方程進行,但是要注意一些正數、負數之類的附加條件。

解:設公比為 q,首項為 a,得 $a=aq+aq^2$,由 a 為正數,得 $1=q+q^2$,解得 $q=\dfrac{\pm\sqrt{5}-1}{2}$。

$\because$ 一幾何數列的各項均為正數,$\therefore$ 公比 q 也為正數,得 $q=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$,選 C。

13. 半徑為1的圓形裏的內接正八邊形的面積是多少?

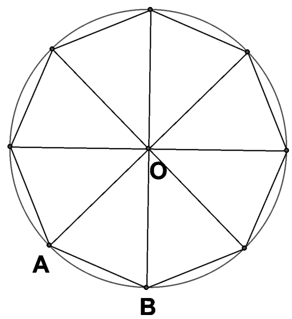
$A.\ \sqrt{2}$ $\quad B.\ 2\sqrt{2}$ $\quad C.\ 3\sqrt{2}$ $\quad D.\ \pi\sqrt{2}$ $\quad E.\ 4\sqrt{2}$

答案:B

剖析:本題目的知識點是四校聯考數學科考試大綱的第12點“直線圖形及圓”的要求。解答本題,既可以用三角函數正弦定理的面積公式或者余弦定理結合海倫公式,也可以用

平面解析幾何的坐標法,以及平面幾何普通面積法。

解法 1:正弦定理的面積公式法。



把半徑為 1 的圓形裏的內接正八邊形以圓心為頂點平均分成 8 個全等的等腰三角形,且 $\angle AOB = 45°, OA = OB = 1$,則所求的內接正八邊形的面積 $= 8S_{\triangle AOB} = 8 \times \left(\frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times sin45°\right) = 2\sqrt{2}$,選 B。

解法 2:余弦定理的海倫公式法。

由解法 1 知,$\angle AOB = 45°, OA = OB = 1$,

根據余弦定理得

$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \times OA \times OB \times cos45° = 1 + 1 - 2 \times 1 \times 1 \times cos45° = 2 - \sqrt{2}, \therefore AB = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$,又 $OA = OB = 1$,

根據海倫公式得 $S_{\triangle AOB} = \frac{\sqrt{2}}{4}$,

所求的內接正八邊形的面積 $= 8S_{\triangle AOB} = 2\sqrt{2}$,選 B。

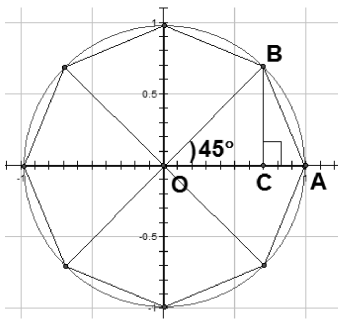
解法 3:平面解析幾何坐標法。

如圖,以原點為圓心作單位圓,OA 邊在 x 軸正半軸上,作 $BC \perp OA$ 於點 C,由題設知 $O(0,0), A(1,0), B(cos45°, sin45°)$,

則所求的內接正八邊形的

面積 $= 8S_{\triangle AOB} = 8 \times \left(\frac{1}{2} \times OA \times BC\right) = 8 \times \left(\frac{1}{2} \times 1 \times sin45°\right) = 2\sqrt{2}$,選 B。

解法 4:平面幾何普通面積法。



如圖,作 $BC \perp OA$ 於點 C,由題設知 $\angle AOB = 45°, OB = 1$,

得 $BC = OB \times sin45° = 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}, pS_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \times OA \times BC = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$,

所求的內接正八邊形的面積 $= 8S_{\triangle AOB} = 2\sqrt{2}$,選 B。

14. 若 $tan = \theta$,其中 θ 落在第三象限,則 $sin\theta - cos\theta$ 的值是多少?

$A.\ -\frac{1}{2}$ $B.\ -\frac{1}{\sqrt{5}}$ $C.\ -\frac{3}{\sqrt{5}}$ $D.\ \frac{1}{\sqrt{5}}$ $E.\ \frac{3}{\sqrt{5}}$

答案:B

剖析:本題目的知識點是四校聯考數學科考試大綱的第 13 點“三角函數:三角函數與三角恆等式” 的要求。三角函數的定義式和三角函數的同角關係式是三角函數中最基本、最

重要、最基礎的知識要求。結合三角函數與三角恆等式,複角公式及半角公式等等,能夠有助於快速突破、完美解題。

解法 1:同角三角函數關係式。

由 $tan\theta = \dfrac{sin\theta}{cos\theta} = 2$,得 $sin\theta = 2cos\theta$,

代入 $sin^2\theta + cos^2\theta = 1$,得 $5cos^2\theta = 1$,$cos^2\theta = \dfrac{1}{5}$,$cos\theta = \pm \dfrac{1}{\sqrt{5}}$;

又 θ 落在第三象限,故 $cos\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$,從而 $sin\theta = 2cos\theta = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$,

得 $sin\theta - cos\theta = -\dfrac{2}{\sqrt{5}} - \left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$,選 B。

解法 2:還原定義法。

根據三角函數的定義,有 $tan\theta = \dfrac{y}{x} = 2$,得 $y = 2x$,

由於角 θ 落在第三象限,設點 $P(x,y)$ 是 θ 的終邊上的任意一個異於原點的點,
則有 $x < 0$,$y < 0$,不妨設 $x = -m$,則 $y = -2m$,其中 $m > 0$,

得 $r = \sqrt{x^2 + y^2} = -\sqrt{5}m$,

從而 $sin\theta = \dfrac{y}{r} = \dfrac{-2m}{\sqrt{5}m} = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$,$cos\theta = \dfrac{x}{r} = \dfrac{-m}{\sqrt{5}m} = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$,

得 $sin\theta - cos\theta = -\dfrac{2}{\sqrt{5}} - \left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$,選 B。

解法 3:切化為割,割化為弦。

由 $tan\theta = 2$,其中 θ 落在第三象限,

得 $sec^2\theta = 1 + tan^2\theta = 1 + 2^2 = 5$,$sec\theta = -\sqrt{5}$,得 $cos\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$,

又 $csc^2\theta = 1 + cot^2\theta = 1 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{5}{4}$,$csc\theta = -\dfrac{\sqrt{5}}{2}$,得 $sin\theta = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$,

得 $sin\theta - cos\theta = -\dfrac{2}{\sqrt{5}} - \left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$,選 B。

解法 4:萬能公式法。

由角 θ 落在第三象限,得 $\dfrac{\theta}{2}$ 落在第二、四象限,

則由二倍角公式 $tan\theta = \dfrac{2tan\,\dfrac{\theta}{2}}{1 - \left(tan\,\dfrac{\theta}{2}\right)^2} = 2$,解得 $tan\,\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$(正根不合,捨去),

根據萬能公式,得 $sin\theta = \dfrac{2tan\dfrac{\theta}{2}}{1+\left(tan\dfrac{\theta}{2}\right)^2} = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$,$cos\theta = \dfrac{1-\left(tan\dfrac{\theta}{2}\right)^2}{1+\left(tan\dfrac{\theta}{2}\right)^2} = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$,

得 $sin\theta - cos\theta = -\dfrac{2}{\sqrt{5}} - \left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$,選 B。

15. 若兩直線 $ax + by + c = 0$ 和 $px + qy + r = 0$ 互相垂直,則下列何者為眞?

$A.\ aq = bp$　　$B.\ ap + bq = 0$　　$C.\ ac = br$

$D.\ ap + cr = 0$　　$E.$ 以上皆非

答案: B

剖析: 本題目的知識點是四校聯考數學科考試大綱的第 14 點“解析幾何:直線的斜率及截距,直線方程的不同表達式;兩線平行與垂直”的要求。在解析幾何中,直線一直佔據著非常重要的位置,扮演著十分重要的角色。它既可獨立成題,考查斜率、傾斜角、點線的距離、線線的距離、點線的位置關係、線線的位置關係、點關於線的對稱、線關於點的對稱、線關於線的對稱以及直線系(束)的問題,也可以結合圓、圓錐曲線,考察直線與圓、與圓錐曲線的位置關係、所截的弦長,考查圓、圓錐曲線關於直線的對稱問題,還有就是圓、圓錐曲線上的點到直線上的點的最大值、最小值問題等等。

解法 1: 公式法。

由直線 $ax + by + c = 0$,得其斜率為 $k_1 = -\dfrac{a}{b}$。

由直線 $px + qy + r = 0$,得其斜率為 $k_2 = -\dfrac{p}{q}$。

因為兩直線 $ax + by + c = 0$ 和 $px + qy + r = 0$ 互相垂直,所以 $k_1 \cdot k_2 = -1$,

即 $\left(-\dfrac{a}{b}\right)\cdot\left(-\dfrac{p}{q}\right) = -1$,得 $ap + bq = 0$,選 B。

解法 2: 係數關係法。

若兩直線 $Ax + By + C = 0$ 和 $Dx + Ey + F = 0$ 互相垂直,

則必有 $AD + BE = 0$,

因為兩直線 $ax + by + c = 0$ 和 $px + qy + r = 0$ 互相垂直,所以 $ap + bq = 0$,選 B。

參考資料:

https://www.gaes.gov.mo/admission/unification

高等教育輔助辦公室“四校聯考”專頁。

從斐波那契數列到猜數字遊戲的數學模型之設計

澳門新華學校中學部　簡煥森

極限是高等數學中非常重要的一個概念,很多高等數學的定義都是建立在極限的基礎上. 然而對於高中生來說,由於所涉及的概念非常抽象,因此學生未必曉得極限所蘊藏的趣味. 而考慮到一特殊的遞推數列——**斐波那契數列**的獨特性質,可在教學過程中加以利用,設計出精彩的數學遊戲,讓學生感受到極限的魅力.

斐波那契數列是一線性遞推數列,$a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}(n > 2, n \in Z)$. 故 $\frac{a_n}{a_{n-1}} = 1 + \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}$,整理得$\frac{1}{\frac{a_{n-1}}{a_n}} = 1 + \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}$. 令 $x_n = \frac{a_n}{a_{n+1}}(n \geqslant 1, n \in Z)$ 得 $x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2}, \frac{1}{x_{n-1}} = 1 + x_n$. 由 $x_{n+1} = \frac{1}{1 + x_n}, x_n = \frac{1}{1 + x_{n-1}}, 1 + x_n > 1$ 得,

$$|x_{n+1} + x_n| = \left|\frac{1}{1 + x_n} - \frac{1}{1 + x_{n-1}}\right| = \frac{|x_n - x_{n-1}|}{(1 + x_n)(1 + x_{n-1})} < |x_n - x_{n-1}|,$$

故由壓縮映射原理可知$\{x_n\}$ 存在極限,接下來求數列$\{x_n\}$ 的極限. 令 $x = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n$,由$\frac{1}{x_{n+1}} = 1 + x_n \Rightarrow \frac{1}{x} = 1 + x \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$,捨去負數.

由上述結論得,**斐波拉契數列**的前後相鄰兩項之比存在極限,其極限約為 0. 618. 此結論可推廣為:若 $a_1 \neq 1$, $a_2 \neq 1$,但通項公式滿足 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}(n > 2, n \in Z)$ 的數列,其前後相鄰兩項之比同樣存在極限,其極限的值同樣約為 0. 618.

依據此性質,可設計“猜數字” 遊戲,供學生學習數列極限時使用. “猜數字” 遊戲分為“出題” 和“猜數字” 兩部分,具體思路如下:

首先學生 A“出題”,可在[0,20] 內任選兩整數 a_1, a_2,根據 $a_n = a_n - 1 + a_{n-2}(n > 2, n \in Z)$ 求出 a_{10},然後把 a_{10} 公開.

接下來由學生B猜測該數列的首兩項,即a_1, a_2,而該學生只知道學生A所公開的a_{10}以及該數列的通項公式 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}(n > 2, n \in Z)$.

這時候學生 B 可以採取這樣的算法:

第一、把 a_{10} 乘以 0. 618,四捨五入得 a_9,其中 0. 618 為該數列前後相鄰兩項之比的極限的近似值;

第二、接下來 $a_{10} - a_9$ 得 a_8;

第三、如此類推可得該數列的首兩項,即 a_1, a_2.

上述設計思路可藉助在線數學工具 *MathStudio*(*http://mathstud.io/*) 進行編程. 其中“出題”部分可設計為函數 $a(x,y)$(如圖1),當輸入初始值 x,y 時可返回該數列第10項的值(如圖3). 而“猜數字”部分可設計為函數 $c(x)$(如圖2),當輸入初始值 x 時,可返回該數列的首兩項(如圖 3).

```
@a(x,y)
a=x
b=y
c=a+b
d=b+c
e=c+d
f=d+e
g=e+f
h=f+g
i=g+h
j=h+i
j
```

```
@c(x)
a=x
g=0.61803398875
b=round(g*x)
c=x-b
d=b-c
e=c-d
f=d-e
g=e-f
h=f-g
i=g-h
j=h-i
[j,i]
```

```
a(6,3)
228

c(228)
[6, 3]

c(a(6,3))
[6, 3]
```

圖 1　　圖 2　　圖 3

綜上,若所出的“題目”規定為“通過所公開的第10項猜測數列的首兩項”,當首兩項的值不太大,即限制為[0,20]的整數時,上述解密算法 $c(x)$ 可以得到正確的結果. 假如首兩項所取的值比較大,則需要出題者公開一個更大的項數的值,才能利用解密算法 $c(x)$ 求解.

而同學們在玩“猜數字”遊戲時會覺得很神奇,沒掌握算法的同學只能憑運氣“猜數字”,而掌握了算法的同學則可由此算出正確答案,這樣能激發學生的學習興趣,使其產生良好的學習動機,這時候教師若指出其“解密”算法中的關鍵 0.618,即可引導學生從數學遊戲中思考數列極限的問題,從而把這樣的一個小遊戲引申到一系列的數列極限問題上進行研究.

最後,還可以在此基礎上,作下推廣:若 $a_1=1, a_2=1, a_3=1,, a_n=a_{n-1}+a_{n-2}+a_{n-3}(n>3, n\in Z)$,由 $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}+a_{n-3}\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\dfrac{\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}+1+\frac{a_{n-3}}{a_{n-2}}}{\frac{a_n}{a_{n-2}}+\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}+1}$,由壓縮映射原理可知數列 $\left\{\frac{a_n}{a_{n+1}}\right\}$ 存在極限,故令 $x=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n-1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n-3}}{a_{n-2}}$,由 $\frac{a_n}{a_{n+1}}=\dfrac{\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}+1+\frac{a_{n-3}}{a_{n-2}}}{\frac{a_n}{a_{n-2}}+\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}+1}\Rightarrow x=\dfrac{x+1+\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+1+x+\frac{1}{x}+1}\Rightarrow x^3+x^2+x-1=0, x=\frac{1}{3}\left(-1-\frac{2}{\sqrt[3]{17+3\sqrt{33}}}+\sqrt[3]{17+3\sqrt{33}}\right)$(虛根捨去)即 $x\approx 0.543689$. 由此可以設計更精彩的猜三個數字的小遊戲(如圖 4).

```
@a1(x,y,z)
a=x
b=y
c=z
d=a+b+c
e=b+c+d
f=c+d+e
g=d+e+f
h=e+f+g
i=f+g+h
j=g+h+i
j
```

```
@c1(x)
a=x
g=0.543689
b=round(g*a)
c=round(g*b)
d=a-b-c
e=b-c-d
f=c-d-e
g=d-e-f
h=e-f-g
i=f-g-h
j=g-h-i
[j,i,h]
```

```
a1(5,4,3)
400

c1(400)
[5, 4, 3]

c1(a1(5,4,3))
[5, 4, 3]
```

圖 4

參考文獻:

［1］簡焕森. 數列極限的定義［EB/OL］.［2017－07－14］. http://202.175.82.54/tplan/2015/plan/D008.pdf .

［2］簡焕森. 極限［EB/OL］.［2017－07－14］. https://mirror1.dsej.gov.mo/tplan/2016/plan/C071.pdf .

促進專業成長授課計劃之教案

線性規劃問題的應用

澳門培道中學　鄧海棠

編寫教案是教學過程中的重要一環。教案是課堂教學思路的可行性方案。編寫教案的過程是教師對備課中所做的各種課堂教學設想的最後酌定過程,是使教學內容系統、科學、完善、條理、深化的過程。一份優秀教案是設計者教育思想、智慧、動機、經驗、個性和教學藝術性的綜合體現。通過編寫教案不僅可以使教師明確教學目標、掌握教學方法、創新教學模式,還能使教師在教學過程中實現自我學習、自我提高、自我發展,更有利於教師教學經驗的積累、傳播。

基於培道中學的班級設置,是每個年級都有一個 A 班作為實驗班性質,在 A 班之上還有一個 AA 班作為資優學生的課程班,先行探尋符合學校實際情況的一種教與學的模式,而其他學生就作為平衡的自然班級展開授課。高三就兩個文科、兩個理科班的建制,因而本教案就是為了理科 A 班之外的另一個理科 B 班而設計。B 班的學生相對 A 班而言,學習的基礎和能力都有一段較大的差距。故而教案中就體現出力保教學質量而不追求數量,力求大面積的同學都能掌握相關知識,摒棄為求題目數量而犧牲和放棄中下層面的學生。

教案具體如下:

<table>
<tr><td>學科:數學</td><td>班級:高三 B</td><td>學生人數:27</td><td>執教老師:鄧海棠</td></tr>
<tr><td colspan="4">課題:線性規劃問題的應用　本單元/課(第三節)</td></tr>
<tr><td colspan="4">授課日期及時間:2019 年 9 月 27 日 星期五第六節</td></tr>
<tr><td colspan="4" align="center">具體教學目標(授課教節)</td></tr>
<tr><td>A.知識與技能</td><td>B.過程與方法</td><td colspan="2">C.情感、態度與價值觀</td></tr>
<tr><td>使学生了解二元一次不等式表示平面区域;了解线性规划的意义以及约束条件、目标函数、可行解、可行域、最优解等基本概念;了解线性规划问题的图解法,并能应用它解决一些简单的实际问题。</td><td>经历从实际情境中抽象出简单的线性规划问题的过程,提高数学建模能力。</td><td colspan="2">培养学生观察、联想以及作图的能力,渗透集合、化归、数形结合的数学思想,提高学生“建模”和解决实际问题的初步能力。</td></tr>
<tr><td colspan="4">重點:用二元一次不等式(組)表示平面区域,用图解法解决简单的线性规划问题。</td></tr>
<tr><td colspan="4">難點:准确求得线性规划问题的最优解。</td></tr>
<tr><td colspan="4">教學內容:
用二元一次不等式(組)表示平面区域,運用约束条件、目标函数、可行解、可行域、最优解等基本概念結合圖解法解決實際應用問題。</td></tr>
<tr><td colspan="4">教具與佈置:
教具:磁性坐標幾何格子軟膜板,直尺,幾何坐標格子紙。
佈置:學生自主探索及互相評核。</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">教學過程</th></tr>
<tr><th>教學活動</th><th>教學設計意圖</th></tr>
<tr><td>1. 舊知識實戰引入：
作出滿足 $2x+y\geq 15$ 所表示的平面區域。</td><td>評量學生對二元一次不等式所表示的平面區域的作圖能力。</td></tr>
<tr><td>2. 舊知識實戰升級：
作出滿足 $\begin{cases}2x+y\geq 15,\\ x+2y\geq 18.\end{cases}$ 所表示的平面區域。</td><td rowspan="4">評量學生對二元一次不等式組所表示的平面區域的作圖能力。（约束条件的逐步收緊，目标函数的逐步出現，可行域的逐步形成，可行解的逐步浮現。）
1~5 由不同學生分別作圖，完善可行域，教師意在明修棧道。</td></tr>
<tr><td>3. 舊知識實戰深化：
作出滿足 $\begin{cases}2x+y\geq 15,\\ x+2y\geq 18,\\ x+3y\geq 27.\end{cases}$ 所表示的平面區域。</td></tr>
<tr><td>4. 舊知識實戰昇華：
作出滿足 $\begin{cases}2x+y\geq 15,\\ x+2y\geq 18,\\ x+3y\geq 27,\\ x\geq 0.\end{cases}$ 所表示的平面區域。</td></tr>
<tr><td>5. 舊知識實戰綜合：
作出滿足 $\begin{cases}2x+y\geq 15,\\ x+2y\geq 18,\\ x+3y\geq 27,\\ x\geq 0,\\ y\geq 0.\end{cases}$ 所表示的平面區域。</td></tr>
<tr><td>6. 新知識應運而生：
問題：要將兩種大小不同的鋼板截成 A、B、C 三種規格，每張鋼板可同時截得三種規格的小鋼板的塊數如下表所示：
<table>
<tr><th>規格類型
鋼板類型</th><th>A規格</th><th>B規格</th><th>C規格</th></tr>
<tr><td>第一種鋼板</td><td>2</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>第二種鋼板</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
</table>
今需要 A、B、C 三種規格的成品分別為 15、18、27 塊，問各截這兩種鋼板多少張才可得所需三種規格成品？且要求使所用鋼板張數最少。</td><td>要求中文科代表為同學解釋題意，讓其他同學回答審題情況。（評量學生對題意的理解程度。）</td></tr>
<tr><td>7. 輔導學生解題：
解：設需截第一種鋼板 x 張，第二種鋼板 y 張，則有
<table>
<tr><th>規格類型
鋼板類型</th><th>A規格</th><th>B規格</th><th>C規格</th></tr>
<tr><td>第一種鋼板</td><td>2x</td><td>1x</td><td>1x</td></tr>
<tr><td>第二種鋼板</td><td>1y</td><td>2y</td><td>3y</td></tr>
<tr><td>合計</td><td>15</td><td>18</td><td>27</td></tr>
</table>
得約束條件：$\begin{cases}2x+y\geq 15,\\ x+2y\geq 18,\\ x+3y\geq 27,\\ x\geq 0,\\ y\geq 0,\\ x,\mathrm{y}\in \mathrm{N}.\end{cases}$
目標函數為： $z=x+y$.</td><td>1. 評量學生設元能力（未知數，單位，）。
2. 評量學生尋找不等量關係（超過？大於？小於？不足？）。
3. 評量學生在實際應用問題中的關注細節（x 與 y 能否負數？能否為 0？能否小數？）。
7. 是暗渡陳倉。</td></tr>
<tr><td>8. 比對第 5 點，有什麼發現？
可以在原圖的基礎上作怎樣的改進就可以了？</td><td>學生尚在“两岸猿声啼不住”，
教師卻是“輕舟已過萬重山”。</td></tr>
<tr><td>9. 得到的最優解不是整數（整點）解，怎麼辦？
（在最優解中尋找最接近线性目标函数直线的整點，怎樣找？）</td><td>評量學生的發散思維及思維活躍度。</td></tr>
<tr><td>10. 引導解題作答，概括總結。
各多少張？張數最少是多少？</td><td>評量學生的歸納概括能力。</td></tr>
<tr><td>11. 嘗試讓學生小結解題步驟：
設元，尋找等量及不等量關係，完善未知數的取值範圍，建立目標函數，找出可行域，求出可行解，最優解是什麼，考慮是否整點，作答等。</td><td>評量學生的歸納概括能力。學生互相補充完善。</td></tr>
</table>

12. 作業佈置：

1. 求滿足$|x|+|y|\leq 2$的整點（x,y）的個數。

2. 某運輸公司有 7 輛載重量為 6 t 的 A 型卡車與 4 輛載重量為 10 t 的 B 型卡車，有 9 名駕駛員。在建築某段高速公路中， 此公司承包了每天至少搬運 360 t 瀝青的任務。已知每輛卡車每天往返的次數為 A 型卡車 8 次，B 型卡車 6 次。每輛卡車每天往返的成本費為 A 型車 160 元 ，B 型車 252 元。每天派出 A 型車與 B 型車各多少輛公司所花的成本費最低 ？（校本教材 P52-6）

3*. 設動點 P 的坐標是（x,y），且滿足$\begin{cases}(x-y+1)(x+y-4)\geq 0,\\ x\geq 3.\end{cases}$ 求 z＝x^2+y^2的最小值。

作業的內容應該要既能承上，更要啟下，還要體現出梯度性。

作業 1 是求可行域中的整點數。

作業 2 是密切對應堂上所講的題目，也是在實際生活中的數學應用。

作業 3 則是評量學生的發散思維及思維活躍度，可以作選做處理。

13. 課情、學情、教情、考情介紹：

二元一次不等式组表示平面区域。在理解二元一次不等式表示平面区域含义的基础上，画不等式组所表示的平面区域，找出各个不等式所表示的平面区域的公共部分，这是学生对代数问题等价转化为几何问题以及数学建模方法解决实际问题的基础。

对许多学生来说，从抽象到的化归并不比从具体到抽象遇到的问题少，学生解数学应用题的最常见困难是不会将实际问题提炼成数学问题，即不会建模。所以把实际问题转化为线性规划问题作为本节的难点，并紧紧围绕如何引导学生根据实际问题中的已知条件，找出约束条件和目标函数，然后利用图解法求出解作为突破这个难点的关键。

若实际问题要求的解是整数解，而我们利用图解法得到的解为非整数解（近似解），应作适当的调整，其方法应以与线性目标函数的直线的距离为依据，在直线的附近寻求与此直线距离最近的整点，不要在用图解法所得到的近似解附近寻找（如果可行域中的整点数目很少，采用逐个试验法也可）。

教師通過化整為零、深入淺出的設計，運用倒序的問題呈現方式，讓學生自主探究、彼此比照，從師生互動、生生互動中完成教學任務，達成教學目標，不知不覺之間開始培養活躍思維和發散思維習慣，加強歸納概括能力，接觸逆向思維和分類思想。

本章節是澳門四校聯考數學正卷考試大綱第 7 點：“代數不等式：解一元一次或二元一次不等式組，包括用幾何方法求解；在線性規劃問題的應用”的要求。

通過化整為零、深入淺出的設計，運用倒序的問題呈現方式，讓學生自主探究、彼此比照，從師生互動、生生互動中完成教學任務，達成教學目標，不知不覺之間開始培養活躍思維和發散思維習慣，加強歸納概括能力，接觸逆向思維和分類思想。

14. 板書內容：

課題：線性規劃問題的應用

解：設需截第一種鋼板x張，第二種鋼板y張，則有

鋼板類型 \ 規格類型	A規格	B規格	C規格
第一種鋼板	*2x*	*1x*	*1x*
第二種鋼板	*1y*	*2y*	*3y*
合計	*15*	*18*	*27*

得約束條件：$\begin{cases}2x+y\geq 15,\\ x+2y\geq 18,\\ x+3y\geq 27,\\ x\geq 0,\\ y\geq 0,\\ x,y\in N.\end{cases}$

目標函數為： $z=x+y$.

總結：線作邊界分虛實，

點定區域確可行。

（由學生組織），

（由學生組織）。

1. 書寫課題，突出課堂主題。
2. 建模思想，建構約束條件。
3. 詩詞總結，句理清晰深刻。
4. 學生組織，主體意識深入。

當然，人無完人，總會有疏漏和不足之處，本著拋磚引玉的意願，希望得到相關同仁、有識之士和教育大家的指導和斧正，從而獲得促進專業成長的教學感悟和能力的提升。

淺議梁嬋娟老師公開課

《抽屜原理 —— 又叫鴿巢問題》

澳門培道中學　鄧海棠

廣東省清遠市陽山縣黎埠鎮中心小學　王玉芬

由教育暨青年局始於1996年主辦的教學設計獎勵計劃為推動本澳各學科的學術研究，提升相關科目的教學人員專業素質，激勵創思型的課堂教學，增進單位時間內的教學成效，培養教學人員課程與教材開發和教學研究的能力，給廣大教育工作者提供了一個百家爭鳴、取長補短、博納優異的實用平臺。

2018年11月3日有幸作為澳門數學教育研究學會的代表，獲教育暨青年局邀請擔任評委，觀摩了在婦聯學校進行的2017/2018學年教學設計獎勵計劃 – 教學公開課（小學數學科）梁嬋娟老師的示範課《抽屜原理 —— 又叫鴿巢問題》，大有裨益，收穫甚多，在此略發感言，談談體會，以作教育界同行交流，冀得大家指正。

該節課的教案如下：

《抽屜原理 —— 又叫鴿巢問題》教案

年級	六年級
人數	24
課時	1
教材	人民教育出版社六年級數學下冊第68 – 69頁
教節	1
教學目標	1. 知識與能力：初步瞭解抽屜原理，運用抽屜原理知識解決簡單的實際問題。 2. 過程和方法：經歷抽屜原理的探究過程，通過動手操作、分析、推理等活動，發現、歸納、總結原理。 3. 情感與價值：在主動參與教學活動中，使學生切實體會到探索的樂趣；通過"抽屜原理"的靈活應用感受數學的魅力，體會到數學與生活的緊密結合；提高同學們解決問題的能力和興趣。

重難點	重點:抽屜原理”的探究過程,初步瞭解“抽屜原理”。 難點:理解“抽屜原理”,並對一些簡單實際問題加以“模型化”。
課前導入	一、創設情景,生成問題: 課前遊戲引入。 請 5 名同學,坐在 4 個凳子上,要求每個學生都要坐下! (要求:請全體學生仔細觀察,一會對事件結果從數學角度進行描述) 得出:不管怎麼坐,總有一把凳子上至少坐兩個同學。 師:剛才的遊戲中我們初步得出一個這樣的結論:5 個學生坐在 4 把凳子上,總有一把凳子上至少坐 2 個學生。這樣的問題是否都具體這樣的規律呢,這個遊戲中蘊含著怎樣有趣的數學原理,我們這節課就來研究。 (設計意圖:把抽象的數學知識與生活中的遊戲有機結合起來,使教學從學生熟悉和喜愛的遊戲引入,讓學生在已有生活經驗的基礎上初步感知抽象的“抽屜原理”,提高學生的學習興趣。)
教學過程	二、動手操作,建立模型: 出示例 1:4 枝鉛筆放入 3 個筆筒。 提出猜想:“不管怎麼放,總有一個筆筒裏至少放進 2 枝鉛筆?” 1、自主探究: 動手操作,(課件出示) 小組合作研究:把 4 支鉛筆放入 3 個筆筒,有幾種方法? 學生動手操作、交流,師巡視、指導。 2、全班交流: 師:哪個小組願意到前邊展示一下你們的研究結果? 學生把小組合作研究記錄表 1 放到展臺上,邊演示邊說方法。 指名到前面擺放,師生共同記錄(板書): (4,0,0)、(3,1,0)、(2,2,0)、(2,1,1) 用數字表示的一組學生展示,並說出了用數字表示更簡潔方便。 師:還有其他擺放嗎(全部情況)觀察這四中方法,對照我們的猜想,看看是否能驗證我們的猜想是正確的?它們有什麼共同點嗎? 師:總有是什麼意思? 生 1:一定有。 生 2:一定存在。 “至少”是什麼意思? 師:剛才這位同學說的太棒了,同學們把掌聲送給他。 師生齊鼓掌。

	（設計意圖：注意鼓勵學生運用已有的知識對新學習的內容進行聯想和猜測，再通過實驗和推理驗證，培養學生良好的學習和思考習慣。在猜測的基礎上進行實驗和推理，使學生受到研究方法和思維方式的訓練，發展和提高自主學習的能力。） 3、總結驗證： 師：像剛才這樣我們把所有情況都一一列舉出來，從而得出結論的方法，叫枚舉法。（板書：枚舉法）。 4、練習： （1）將 10 個蘋果放在 8 個盆子裡，其中一個盆子至少有（ ）個蘋果。 （2）將25 個乒乓球放進20 個箱子裡，其中至少一個箱子裡有（ ）個乒乓球。 師：有沒有更好更快的方法得到上面的結論？請驗證老師的話： 不管怎麼放，總有一個筆筒裏至少放進 2 支鉛筆？ 生 1：（一邊演示一邊說）先往每個杯子裏放一支鉛筆，這樣還剩下一支，剩下的這一支隨便放入一個筆筒就行了。 師：現在聽明白了嗎？ 生：明白了。 生 2：我也是這麼想的，這其實就是先將四支鉛筆平均分，餘下的一支放入其中任意一個杯子。 師：既然是平均分，能用算式表示嗎？ 學生說算式，老師板書。 師：商 1 和餘數 1 意義相同嗎？ 生：商 1 指的是放進去的一枝，餘數 1 指剩下的那一枝。 師：在解決這類問題時，用平均分的方法比較簡便。 （設計意圖：通過動手操作得出結論和先猜想再操作得出結論，最後讓學生總結出規律，有助於發展學生的類推能力，形成比較抽象的數學思維。） 三、提高思維、驗證模型： （一）初建模型： 師：如果把 5 支鉛筆放入 4 個筆筒，會是什麼結果呢？ 有的學生接著舉起了手，有的學生在和同桌交流，個別學生在操作。 生 1：還是那個結論。 師：能把結論說完整嗎？ 生 1：還是總有一個筆筒裏至少有兩支鉛筆。 師：你怎麼想的？ 生 1：先把每個筆筒裏放一枝，還剩一支，再把剩下的一枝放入其中任意一個筆筒。

	師:能用算式表示嗎? 生:5 除以 4 等於 1 餘 1。 老師板書算式。 師:如果把 6 支鉛筆放入 5 個筆筒呢? 生:還是總有一個筆筒裏至少有兩支鉛筆。 生:都是總有一個筆筒裏至少有兩支鉛筆。 師:你有什麼發現? 生:當鉛筆的數量比筆筒的數量多 1 時,總有一個筆筒裏有兩枝鉛筆。 (二)完善模型: 剛才同學們都表現得非常棒,老師有幾道難題想請教大家,願意幫忙嗎? 如果商不是 1,還會有這種結論嗎? 課件出示題目: 出示例 2:把 7 支鉛筆放進 3 個筆筒裏,不管怎麼放,總有一個筆筒裏至少有(　　)枝鉛筆? 師:把 7 支鉛筆放入 3 個杯子,總有一個筆筒裏有幾支鉛筆?可以和你組裏的同學交流一下。 師:誰想說說你們的結論? 師:可以用算式表示嗎? 生:可以,7 除以 3 等於 2 餘 1。 師板書算式。 師:把 9 支鉛筆放入 4 個筆筒,你能得出什麼結論? 生:總有一個筆筒裏至少有 3 支鉛筆。 師:你怎麼想的? 生:把 7 支鉛筆放入 3 個筆筒,先每個筆筒放一支,還剩 1 支,把這 3 支放入不同的筆筒就可以了。 師:把 9 支鉛筆放入 4 個杯子呢? 生:總有一個筆筒裏至少有 3 支鉛筆。 師:觀察黑板上這些算式?你有什麼發現? 總有一個筆筒裏至少有商加 1 支鉛筆。 不管怎麼放,總有一個筆筒裏至少有幾支鉛筆? 小組合作,共同完成。 教師巡視、指導。 師:那個小組願意展示一下? 指定一組展示交流。 師:你們的結果和他們組一樣嗎?

師:說說你們組有什麼發現?

生:總有一個筆筒裏至少有商加 1 支鉛筆。

師:你們的發現和他們相同嗎?

生:相同。

師板書:商 + 1。

師:同學們發現的這一規律,其實就是一個非常著名的數學原理,也是我們今天研究的“抽屜原理”(板書課題)。

一起看大螢幕(介紹抽屜原理的相關知識)。

最先發現這一規律的人是德國數學家“狄裏克雷”,人們為了紀念他從這麼平凡的事情中發現的規律,就把這個規律用他的名字命名,叫“狄裏克雷原理”,又把它叫做 “抽屜原理”。

把 15 支鉛筆放進 4 個筆筒裏,

把 25 支鉛筆放進 6 個筆筒裏,

……

四、應用原理解決問題:

1、7 只鴿子飛回 5 個鴿舍,至少有兩隻鴿子飛進同一個鴿舍?學生回答後觀看演示。

2、隨意找 13 位老師,他們中至少有 2 個人的屬相相同,為什麼?

3、一盒圍棋棋子,黑白子混放,我們任意摸出3 個棋子,至少有2 個棋子是同顏色的,為什麼?

4、一幅撲克,拿走大、小王后還有52 張牌,請你任意抽出其中的5 張牌,那麼你可以確定什麼?為什麼?

挑戰:請你任意寫出 4 個自然數,在這 4 個自然數中,必定有這樣的兩個數,它們的差是 3 的倍數,試一試,想一想,爲什么?

板書設計:

4 ÷ 3 = 1(支)……1(支);	1 + 1 = 2(支);
7 ÷ 3 = 2(支)……1(支);	2 + 1 = 3(支);
9 ÷ 4 = 2(支)……1(支);	2 + 1 = 3(支);
15 ÷ 4 = 3(支)……3(支);	3 + 1 = 4(支);
25 ÷ 4 = 6(支)……1(支);	6 + 1 = 7(支)。
鴿子數 ÷ 鴿巢數 = 每巢鴿子數 …… 餘下鴿子數。	商 + 1 = 至少數。

附件:

小組合作學習記錄單:

第______組　　姓名：__________

小組合作學習 1：

把 4 枝鉛筆放進 3 個筆筒裡面，有幾種方法？用自己喜歡的方式記錄下來

小組合作學習 2：

把 7 支鉛筆放進 3 個筆筒裡，不管怎麼放，總有一個筆筒至少（　　）支鉛筆。為什麼？你能嘗試用算式表示嗎？

如果把 9 支鉛筆放進 4 個筆筒？總有一個筆筒至少（　　）支鉛筆。為什麼？

15 枝放進 4 個筆筒呢？總有一個筆筒至少（　　）支鉛筆。為什麼？

我的發現：

____

____

課堂練習紙：

【練習一】想一想，填一填：

1. 將 10 個蘋果放在 8 個盆子裡，總有一個盆子至少有（　　）個蘋果。

2. 將 25 個乒乓球放進 20 個箱子裡，其中至少一個箱子裡有（　　）個乒乓球。

【練習二】應用原理解決問題（選擇你感興趣的 1 或 2 道題目解答）：

1. 7 只鴿子飛回 5 個鴿舍，至少有兩隻鴿子飛進同一個鴿舍？

2. 隨意找 13 位老師，他們中至少有 2 個人的屬相相同，為什麼？

3. 一盒圍棋棋子，黑白子混放，我們任意摸出3 個棋子，至少有2 個棋子是同顏色的，為什麼？

4. 一幅撲克牌，拿走大、小王后還有52 張牌，請你任意抽出其中的5 張牌，那麼你可以確定什麼？為什麼？

【挑戰題】

請你任意寫出 4 個自然數，在這 4 個自然數中，必定有這樣的兩個數，它們的差是 3 的倍數，試一試，想一想，為什麼？

在數學問題中，有一類與“存在性”有關的問題。在這類問題中，只需要確定某個物體（或某個人）的存在就是可以了，並不需要指出是哪個物體（或人）。我們稱這類問題依據的理論為“抽屜原理”。“抽屜原理”的應用是千變萬化的，用它可以解決許多有趣的問題，在數論、集合論、組合論中都得到了廣泛的應用。

對於曾經作為小學奧林匹克數學競賽的必考內容，“抽屜原理”是一種重要的數學思想方法，也是一類較為抽象和艱澀的數學問題，對全體學生有一定的挑戰性。梁嬋娟老師通過“搶凳子遊戲”引入、動手探究“放筆活動”等直觀例子，借助實際操作，向學生介紹“抽屜原理”，使學生感受到數學的魅力，提高了同學們解決問題的能力和興趣，達成了情感與價

值的教育目標和小學六年級的相關基本學力要求。

通過創設遊戲情景,生成教學問題是許多幼稚園、小學甚至初中的課堂經常運用的一種教學手法。但是在本課節開頭的“發現”中,學生還沒有充分發現什麼,梁老師就讓他們得出結論了,思維過程稍嫌倉促。

“抽屜原理”這節課是一節充滿邏輯性、假設性、實踐性、趣味性、新穎性、創造性且豐富多彩、收效甚高的優質課。梁老師根據小學生的身心特徵,緊扣教材內容的特點,把知識性和趣味性融為一體,在課節的導入環節巧妙地創設一個5人坐4張凳子的趣味遊戲,讓學生在遊戲中自覺地進入新知識的學習,為學習新知識作了非常好的鋪墊,有效地調動了學生參與學習的熱情。

梁老師能科學運用假設、推理、實踐、驗證的教學策略,培養學生探究知識的能力。在探究新知識的過程中,她採用先假設4支鉛筆放入3個筆筒里總有一個筆筒至少有2支鉛筆的方法,然後讓學生通過實踐驗證假設是正確的,再到把5支鉛筆放入4個筆筒里、6支鉛筆放入5個筆筒里、7支鉛筆放入3個筆筒里、9支鉛筆放入4個筆筒里等等層層遞進推理出“抽屜原理”的規律:商 + 1 = 至少數。

教師通過“商為1 、商不為1”的分類思想,在不斷的假設和驗證中突出重點、突破難點,有效地調動了學生參與解決問題的積極性。同時,也在不知不覺中滲透了分類解決問題的思想方法給學生。

但是,由4支、5支、6支、7支、9支、再到15支、25支則是過于累贅和簡單的重複了。只需要在“商為1 、商不為1”的分類中各取兩個就行了,既節省了教學時間,又展開了無用功的簡單重複,還提升了單位時間的教學效益,更為後面的超時教學掃除一些障礙。

梁老師能巧妙地把數學與生活緊密聯繫,讓學生親身感受學習數學的重要性,從而有效地調動學生主動學習數學的興趣,如工作紙中所示的“2、隨意找13位老師,他們中至少有2個人的屬相相同,為什麼?”、“5、一幅撲克,拿走大、小王后還有52張牌,請你任意抽出其中的5張牌,那麼你可以確定什麼?為什麼?”等等。

只是,在“動手操作,發現問題”的“全班交流”中,

> 學生把小組合作研究記錄表1放到展臺上,邊演示邊說方法。
>
> 指名到前面擺,師生共同記錄(板書):
>
> (4,0,0)、(3,1,0)、(2,2,0)、(2,1,1)
>
> 用數字表示的一組學生展示,並說出了用數字表示更簡潔方便。
>
> 師:觀察這四種方法,它們有什麼共同點嗎?
>
> 師:總有是什麼意思?
>
> 生1:一定有
>
> 生2:一定存在
>
> “至少”是什麼意思?
>
> 師:剛才這位同學說的太棒了,同學們把掌聲送給他。

師生齊鼓掌。

梁老師沒有引導學生深入挖掘四種方法中,為何只留用(2,1,1)這種,而捨棄了之前的其它三種,錯失一個及時反饋學生信息的處理機會。同樣的情況其實在課節剛剛開始的“搶凳子遊戲”引入環節中也有出現過,卻也是失之交臂了。

第9版和第12版投影片同為展現“抽屜原理”這個課題,有重複之嫌。第9版的出現不合時宜,也沒有什麼教學價值可取。建議梁老師直接刪除第9版投影片,更為恰當。

“抽屜原理”(也叫做鴿巢原理、鴿籠原理、重叠原理、狄利克雷原理)。但是在投影片中,第10版用了“狄裡克雷”、第11版用了“狄利克雷”、“狄里克雷”這些不一致的說(寫)法,會使聽課的教師和參與上課的學生產生混淆。建議梁老師不管選擇哪種說法,應該全部統一成一個相同的名稱,這種情況在上繳教青局的文檔簡介中也有出現。

在“摸撲克牌”小遊戲中,除了“任意抽出其中的5張牌,那麼你可以確定什麼?為什麼?”外,其實還可以添加“如果任意抽出其中的3張牌,那麼你還可以確定什麼?為什麼?”這樣一個問題,適時讓學生接觸“一題多變”的問題模式以及多角度考慮問題的發散思維培養,還可以用同學的性別劃分來體現原理的實用性和多用性,等等。

不可否認的是,梁老師這節課的課堂教學效益是很高的,為學生提供了自主探索的空間,引導學生在觀察、猜測、操作、推理和交流等數學活動中初步瞭解“抽屜原理”,學會用“抽屜原理”解決簡單的實際問題。學生能夠在理解“抽屜原理”這一數學方法的基礎上,對一些簡單的實際問題加以“模型化”,會用“抽屜原理”加以解決,在一定程度上達成了知識能力目標。

參考資料:

[1] 澳門特別行政區教育暨青年局“教學設計獎勵計劃”網頁;

[2] 澳門培道中學(南灣分校)梁嬋娟老師公開課《抽屜原理 —— 又叫鴿巢問題》教案。

《美國數學教材》的編寫、評審、特點和啟示

澳門大學教育學院　江春蓮　劉付茵
杭州師範大學　鞏子坤

摘要:美國教材市場比較多元,個人和團隊都可以編寫教材,所以市面上的數學教材琳琅滿目但又良莠不齊。面對眾多的數學教材,近年來各州和(或)學區則較多地依據 2010 年頒佈的《州際核心數學課程標準》從不同的視角對教材進行評估,寫出評估報告,但最後選擇哪種教材則是學區和學校的權利。美國的數學教材給人"一英里寬,一英寸深"的印象,這句話前半屬實,後半為虛。縱觀美國 20 世紀數學教材的變化,傳統的較高等的數學專題逐漸地從高年級移向低年級,美國數學教材的深度並不低。美國教材注重與現實世界的聯繫和數學建模,注重多樣化的數學表徵和問題解決策略等,這些方面都是值得我們借鑒的。

教材不僅影響著教師教學的內容,而且影響著教師教學的方式,進而影響到學生的學習。在教材的編寫方面,我國有以人民教育出版社為代表的專業出版社,有較為穩定的編寫隊伍;教材編好後,編寫人員會到中小學一線進行教學實踐,以檢驗教材內容的適應性,進而做出修改調整,所以我國的教材編寫具有相對的連續性、一致性和穩定性。美國數學教材是誰編寫的? 如何編寫的? 面對市場上如此眾多的數學教材,各州和(或)學區又是如何選擇的? 與其他國家的數學教材相比,美國的數學教材又有哪些優勢和不足? 常聽人說,美國的數學教材"一英里寬,一英寸深",這是事實嗎? 本文將試圖對相關文獻,特別是 2010 年美國《州際核心數學課程標準》(簡寫為 CCSSM)[1]頒佈以來數學教材的現狀,進行系統的梳理,以期回答這些問題,並探討對我國教材編寫的啟示意義。

1、美國數學教材的編寫

1.1 數學教材編寫的指導標準

在美國,數學教材的編寫是出版社行為,出版社可以邀請數學教育研究者和中小學數學教師編寫教材;也可以反過來,編者編寫好教材後找出版社出版。在 1989 年標準運動之前,編者可以根據自己對數學課程的理解來編寫教材。而標準運動以來,各出版社則根據美國數學教師理事會(即 NCTM)頒佈的系列數學課程標準來編寫。2010 年以後,則參照由全美州長協會(簡寫為 NGA)和首席州立學校官員理事會(簡寫為 CCSSO)領導編寫的、由

阿契夫(即 Achieve)頒佈的《CCSSM》[1]來編寫。儘管各州也參照 CCSSM 擬定了適用於本州的數學課程框架,如[2],但該框架只是用來評估學生在 CCSSM 上的達成情況,而不是作為教材編寫的依據。2013 年,NGA、CCSSO、阿契夫、大城市學校理事會和全美各州教育局協會聯合出版了符合 CCSSM 的 k－12 年級數學教材(包括教師用書、學生用書、評估材料和補充材料等)的編寫指導標準[3]。他們強調教材編寫應體現 CCSSM 的三大特點,即聚焦、連貫性和嚴謹性。下面我們以 k－8 年級的教材編寫標準為例介紹其主要內容。

k－8 年級的教材編寫標準主要包括以下十條:

(1) 聚焦於 CCSSM 中列舉的主要內容,各年級教材應保證該年級學生的主要時間是學習 CCSSM 規定的該年級的主要內容。

(2) 注意 CCSSM 規定的某些較難內容學習的起始年級。如 CCSSM 規定,八年級學生才能學習全等、相似和幾何變換等內容,所以教材不得在八年級之前出現這些內容。

(3) 各年級的學習輔助材料和評估材料應有利於學生學習該年級的主要內容,以實現課程的聚焦,保證課程的連貫性。如 k－5 年級出現的資料主要是給學生提供與該年級水準相應的四則運算情境,而不涉及相關的統計概念。

(4) 嚴謹性。CCSSM 不僅強調程式性的運算能力和熟練程度,也強調概念性理解和應用,並要求在這三個方面同等著力。所以教材必須努力保持這三者之間的平衡,以幫助學生達成嚴謹性的目標。

(5) 教材必須與 CCSSM 規定的各年級的學習進度保持一致,特別要注意如下三點:(a)教材內容的進度要以 CCSSM 中規定的逐級進度為基礎;(b)教材需為全部學生提供適合其年級水準的足夠多樣的練習題;(c)應該將新年級所學概念與先前年級所學知識關聯起來,新知識要在舊知識的基礎上進行重組和延伸。

(6) 教材也應通過建立單個年級數學概念之間的關聯來保證連貫性,特別應注意:(a)在 CCSSM 中某些群組(Cluster)標題下清晰列出的學習目標;(b)可以設計一些問題和活動將同一內容領域內兩個或兩個以上的群組關聯起來,或將同一年級的兩個或兩個以上的領域關聯起來;(c)即便是處理某些特定的學習目標,也要儘量保持標準強調的重點、連貫性和嚴謹性。

(7) 教材也應建立數學實踐與數學內容之間的關聯,將內容標準和實踐標準有意義地關聯起來。

(8) 教材應通過實踐標準的達成來保證課程聚焦和連貫性。教材只有將實踐標準與 CCSSM 強調的內容緊密結合起來,才能實現課程聚焦,保證課程的連貫性。

(9) 教材應充分體現每個實踐標準的真正要求。如 CCSSM 中第五條實踐標準是"合理使用恰當的工具",而不是"使用工具",也不是"使用合適的工具",因此教材應包含一些問題鼓勵學生決定如何使用工具或是否要使用工具。

(10) 教材應通過如下三種方式突出 CCSSM 中所強調的數學推理:(a)促使學生在其年級關鍵數學內容標準的學習過程中建構可行的論證和評判他人的推理;(b)讓學生參與

問題解決的活動,這也是一種學習論證的形式;(c)明確使用數學專業語言,如數學圖形、圖表和數學運算式等。

一般說來,教材編寫和修訂的過程平均需要 3 - 5 年[4]。但有趣的是,CCSSM 頒佈後,各出版社很快就出版了自稱為與 CCSSM 相一致的教材。多數出版社是在原有教材的基礎上根據 CCSSM 的要求,修訂、編寫了不同學段(如小學 k - 5, 初中 6 - 8, 高中 9 - 12 年級,或從小學到高中 k - 12)的教材。

1.2 數學教材的編寫與出版

數學教材編寫是一個漫長的過程,需要搜集素材,在真實的課堂裡檢驗一些重要內容的處理方法,最終出版教材。出版後,還需要全面試用,檢驗、修改、再版。像人民教育出版社一樣,美國也有類似的團隊,下面我們就以美國芝加哥大學的數學項目(The University of Chicago School Mathematics Project,簡寫為 UCSMP,見網站 http://ucsmp.uchicago.edu/)介紹美國教材的編寫與出版過程。

UCSMP 開始於 1983 年,當時,Amoco 基金會給芝加哥大學數學和教育系提供了 6 年的研究經費以提升 k - 12 年級的數學教育水準。最開始的研究團隊成員有:一名 7 - 8 年級的數學和科學教師,芝加哥大學的 5 位數學教育教授,和兩位來自教育系的教授。他們首先考察了別國的課程以發現更好的想法和方法,Wirszup 教授收集了大量的前蘇聯和東歐國家的教育材料和文獻,並翻譯了其中一些比較好的材料。接著,他們編寫教材,也開發了一些中小學培訓項目。從開始編教材起,他們就同時對該專案進行評估。在前 6 年,他們完成了 7 - 12 年級大部分數學教材的編寫和 4 - 6 年級教材的準備工作。由於工作任務繁重,實際上,除前面提到的團隊成員外,很多學校的管理人員和教師都參與了該專案的設計、編寫和評估工作之中。

1989 年,Amoco 基金會又給該項目資助了 5 年,紐約 Carnegie 合作組織和美國自然科學基金會也相繼給予了資助。有了這些基金的資助,他們不僅完成了中學剩下兩本數學教材的編寫,還完成了 k - 3 年級教材的編寫和 4 - 6 年級數學教材的準備工作,也開始舉辦面向中小學教師的數學教育年會。

1992 年,他們繼續完成了 k - 6 年級全部的教材編寫工作,還出版了 UCSMP 系列教材的法文版本;同時開始了 UCSMP 初中教材第二版的編寫工作,直到 1996 年全部出版。2002 年,SRA/McGraw - Hill 出版社出版了 k - 6 年級的數學教材 Everyday Mathematics(日常數學)第二版。一個大學的教材研究項目,得以出第二版,這個在美國數學教材歷史上是史無前例的。

2005 年,課題組決定編寫第三版的中學教材,但改變了學段的劃分,中學從 6 年級開始。2007 年,McGraw - Hill 教育出版社出版了《日常數學》的第三版,2008 年,McGraw - Hill 教育出版社出版了《日常數學》學前教育階段全套。

當 CCSSM 最初頒佈時,UCSMP 課題組很高興地發現,CCSSM 所推崇的很多東西已經包括在 CCSSM 的數學實踐標準和內容標準之中,只是有些內容安排的年級水準有少許出

入。2009 年開始,UCSMP 課題組創設了一些課例,放在 McGraw - Hill 的網站上作為 6 - 12 年級教材的補充材料,2010 - 11 學年,McGraw - Hill 出版了 CCSSM 版的《日常數學》(k - 6 年級)。直到 2014 年,McGraw - Hill 才完成了 6 - 12 年級的教材修訂工作。

UCSMP 課題組不僅編寫教材,他們還設計了教師發展專案。如在上世紀 80 年代中期,他們設計了 k - 3 年級的數學教師發展項目,旨在教授教師如何處理與別的學科整合的數學課程,而不單是算術。在所有的 k - 12 年級,UCSMP 還給教師提供了大量的輔助材料。1998 年,Stuart 基金會資助的中學數學資源專案,在 2003 年以《高中教師所需要的數學》(Mathematics for High School Teachers — An Advanced Perspective)為書名由普林斯頓高等教育出版社出版。

UCSMP 課題組使用最新的質性和量化方法評估其系列教材的影響和實施,包括評估教師在教室裡的實際使用情況。在教材編寫過程中,對教材的評估是形成性的,即具體是如何做的,哪些地方需要改進。當教材即將出版的時候,評估則側重于教材對學生數學表現的影響。自 UCSMP 實施以來,該系列教材得到了廣泛的認可,在 2004 和 2010 年的教材評估中,都得到了比較好的評價。ARC 中心的 2003 年研究報告表明,使用 UCSMP《日常數學》的學生,在數學各個領域的得分都顯著性地高於使用別的教材系列的學生。

UCSMP 課題組非常幸運,他們不僅得到了 11 個基金會的資助,系列教材的版稅也支援課題組進行多項活動,如 UCSMP 教材的評估,數學教與學的研究,芝加哥大學初等數學和科學教育中心的日常運作等。

2、美國數學教材的評審與選擇

美國市面上的數學教材很多,可謂琳琅滿目。僅中學階段,常用的就達 13 套之多[5]。2012 年,Fulkerson 和 Banilower 對美國 50 個州的 7752 名數學和科學教師的調查發現,在美國學校裡使用得最廣泛的中小學數學教材是由 Pearson(k - 12 年級)、Houghton Mifflin Harcourt(6 - 12 年級)、McGraw - Hill(k - 12 年級)和 Cengage Learning(9 - 12 年級)等四大出版社出版的教材[6]。本節我們將介紹美國數學教材的評審和選擇過程。

2.1 教材選擇制度

美國沒有全國性的統一教材,也沒有全國性的教材選擇制度,各州和學區採取了不同的方法。根據 Scudella 的統計[7],有 30 個州(占全國總州數的 60%)完全由各學區自主選擇教材,如紐約、麻塞諸塞州、密西根州等;有 16 個州(占 32%)則由州指定教材,各學區必須從州指定的教材中選擇,如德克薩斯州、佛羅里達州、新墨西哥州等;另外 3 個州(占 6%)(包括阿肯色州、猶他州和夏威夷州)儘管也有教材推薦清單,但各學區除可從這些指定的教材中選取外,亦可選擇其他教材。加州(2%)則根據學段的不同採取不同的方法,k - 8 年級必須使用州指定的教材,而 9 - 12 年級則由各學區自由選擇。

2.2 教材評審的流程

無論是學區自選教材,還是州推薦教材,在美國都沒有統一的選擇標準,但教材選擇的

基本程式卻很相似,即先成立教材評審委員會,該委員會根據課程標準的要求和學校的實際情況提出教材評審標準,再依據該標準對市面上的主要教材進行評審,提出評審意見。州教材評審委員會在評審前要先舉行公開聽證會,讓出版商在會上展示他們的教材;評審後還需要綜合出版商的展示和不同團體代表的意見,再向州教育委員會提出選擇建議,最後由州教育委員會決定是否推薦某套教材或在要求出版社做出某些修改之後才推薦[8]。

教材評審委員會通常包括中小學教師、學校行政人員、教育部的專家、高校教師,其他可能還有家長和學生,但多數成員是來自州內不同地方的數學教師[9]。自 1989 年開始標準運動以來,加州一直走在改革的前列。加州各大學的數學家積極參與數學課程標準的審查和修訂,也積極參與到數學教材的評審和選定工作之中[10]。數學家參與課程標準的制定和數學教材的選擇可以保證數學內容的準確性和適度性。然而,這種做法因沒有考慮到數學課堂教學的客觀現實而受到批評[11]。所以,加州現在的數學教材評審委員會是由數學家和來自一線的數學教師聯合組成。

2.3 教材評審標準

Zeringue,Spencer,Mark 和 Schwinden[12]就各地如何選擇數學教材對來自 8 個州的 150 名課程領導者(即直接負責教材選擇的人,包括數學主管、課程協調員、數學科組長和助理主管)做深度訪談,研究發現教材評審委員會在對進行教材評審時主要關注如下五個方面:(1)州課程框架和考試,即檢查教材是否符合州課程框架和考試的要求;(2)教師對教材的接受水準,即評估教師對教材內容的理解和掌握情況,教師是否願意教授教材中的內容,教師如何教授該內容,以及教材是否附有學習評價材料等;(3)課程領導者的建議,如 NCTM 宣導的教學方法,教育部推薦的教材系列(包括國家科學基金會資助研發的教材);(4)教材品質評估。教材評審委員會先形成書面的教材評估標準或工具包,清晰地列出評估的專案及每一項的評分標準,再用該標準評估教材的品質。在形成教材評估標準的過程中,評審委員會也會參考其他地區的評估標準,對這些標準進行修改以反映他們自己的需求。這些評估標準通常包括如下四項:(a)是否符合各州的或全國性的數學課程標準(如 CCSSM);(b)重要數學內容的編寫品質;(c)教學法;(d)教學材料(包括補充材料)的組織。評分標準的使用可以使得評估過程更客觀、一致和合理,體現對數學教與學的理解。(5)查找相關的文獻以瞭解教材試用的情況,如參與實驗研究學生的表現、其他學區的建議(包括教材使用,有效性和接受度等方面的資訊等)。約 80% 的參與者表示在教材選擇階段會比較關注這 5 個方面。

為確保使用教材的學生都能達成 CCSSM 中規定的嚴格的期望,幫助教育工作者獲得高品質的、與 CCSSM 一致性更高的教學和學習評價材料,2014 年,學生成就夥伴(Student Achievement Partners),阿契夫和 CCSSO 聯合開發了評估教學和學習評價材料與州際核心數學(還包括英語語言藝術素養)課程標準一致性的工具包[13]。

該工具包包括如下 7 個部分:(1)簡介;(2)教材評估工具(簡寫為 IMET)。該工具是用來評估教學材料是否符合 CCSSM 的主要特點(即聚焦、連貫性和嚴謹性),幫助教育者選

擇或開發教學材料;(3)供教育者評估教學產品品質的工具,說明教育者和教學管理者評估現有的課程和單元是否符合 CCSSM 的要求,指導課程和單元的開發以及提高教師對 CCSSM 教學要求的理解能力;(4)學習評價材料的評估工具,評估學習評價材料是否符合 CCSSM 的要求,幫助教育者和教學管理者選擇或開發符合 CCSSM 的學習評價材料;(5)評價材料的文本與專案品質標準清單,評價材料(包括印刷文本、視頻、音訊、圖表和圖形等)和評價專案(如測驗題)是否符合 CCSSM 的要求;(6)其他工具,包括網上開放性教育資源的評分標準,資訊文本的質性評分標準、文學的質性評分標準和 CCSSM 的年級學習內容和量化評估標準、說明性的數學任務的評價工具;(7)附錄。這些工具包從不同的角度對教學材料進行評估,下面我們將以 IMET 為例介紹教材的評估標準。

IMET 以 CCSSM 和前面提到的教材編寫標準為依據。該工具對數學教材的評估分為 k－8 和高中兩個學段,這裡我們只介紹其中 k－8 年級的部分,該部分的評估標準包括如下四個小部分:

1)兩條必須符合(Non－Negotiable)的標準:(a)教材必須反映 CCSSM 的內容結構,CCSSM 規定了某些內容最早出現的年級,如全等、相似和幾何變換等最早只能在八年級出現,教材不得在此之前出現該內容。(b)各年級教材必須與 CCSSM 規定的學習進度保持一致,注意各年級應該學習的主要內容。標準(a)下只有 1 個問題,標準(b)下有 8 個問題。評分均是達成(1 分)和不達成(0 分)兩種。只有在這些標準中每題均為達成,該教材在此標準下的總評才為達成;否則為未達成。

2)三個一致性標準:(a)教材必須反映標準要求之間的平衡,幫助學生達到標準中嚴格的期望;(b)教材必須呈現內容標準與實踐標準之間的真正聯繫;(c)教材必須為英語水準不足者和其他有特殊需要的學生提供說明。這三個標準下均有 3 題,每題的評分分為達成(2 分)、部分達成(1 分)和未達成(0 分)三種。各標準下 3 題的總分至少為 5 分,該標準才能評為達成,否則為未達成。

3)前面兩部分的評價總結。只有當兩部分標準中每部分均為達成,總評級才為達成,否則為未達成。

4)11 個品質指標,包括課堂設計、例題設計、練習題設計、美術設計等諸多方面,涵蓋的範圍比較廣。儘管它們與標準一致性評估無關,但它們卻是對教材整體品質的評估。如練習的設計不能是隨意的,而必須是謹慎編排的,以利於發展學生的數學理解。這些品質指標給教材評估提供了很多額外的有用的資訊。各地還可以根據自己的實際情況,增加一些專案。

各標準評估後面還可以附以簡述,說明該教材在某些方面的優缺點。

路易斯安那州教育局從 2013 年起開始使用 IMET 標準評估數學教材,並根據評估結果將教材分為一級、二級和三級,教材的評估結果可於教育局官網:http://www.louisianabelieves.com/academics/ONLINE－INSTRUCTIONAL－MATERIALS－REVIEWS/curricular－resources－annotated－reviews)查閱。根據 2013－14,2014－15,2015－16 三期的評審結果,

一級教材有 5 套,這些教材達到了 IMET 中的必須符合的標準,在一致性標準和品質指標中得分最高。二級教材有 3 套,這些教材達到了 IMET 中的必須符合的標準和部分一致性標準。如《核心關聯代數》的大部分課程(72%)是 CCSSM 規定的該年級的主要學習內容,極少課程內容超出了該年級的水準,教材內容具有一致性,且與 CCSSM 標準中的內容一致;但該教材在內容標準方面沒有與先前年級的內容區分開,如二次函數圖像的習題中有 27 題為繪製圖像的對稱軸等先前年級的問題。三級教材有 29 套,這些教材則在 IMET 中必須符合的標準至少有一項沒有達成。如《可見的數學》(enVision math2.0)三年級教材雖然關注該年級的主要內容,但對標準要求的技能和熟練程度的關注不足,而且評價材料涉及高年級才學到的概念,如四年級才學習的單位轉換和六年級才接觸的多邊形。

為方便學校根據各自學生的特點選擇教材,美國對數學教材的評估既有用前面講的標準對教材進行評估的,也有以實際使用效果對數學教材進行評估的,如前面提到的 ARC 中心 2003 年的研究。

3、美國數學教材的特點及啟示

從上面的討論我們可以看出,美國比較注重教材對課程標準要求的體現,也要求教材不僅注重內容的邏輯呈現,也要注意教學策略和教學方法的使用。儘管有些教材沒能在各個方面都做得很好,但至少他們在這些方面努力嘗試。在本部分,我們對美國數學教材的特點進行總結,再結合我國數學教材的情況進行反思,探討我國可以學習的地方。

3.1 教材編寫與課程標準的要求相一致

自 1989 年美國頒佈第一個數學課程標準以來,美國數學課程標準逐漸成為指導教材編寫的依據,如何保證教材體現課程標準的要求,美國出版了數學教材編寫指導標準,該標準不僅強調新課程標準與之前標準的不同之處,而且指出如何在教材中體現,這與我國課程標準中的“教材編寫建議”部分有點相像。

教材編寫者依據課程標準編寫教材,但容許各自不同的解讀,保留各個教材自身的特色。面對市面上琳琅滿目的數學教材,各學區教材評審委員會根據課程標準的要求和學校的實際情況提出教材評審標準,再依據該標準對市面上的主要教材進行評審,提出評審意見,其後再向州教育委員會提出選擇建議,決定是否推薦某套教材或在要求出版社做出某些修改之後才接受。各教材編寫者也會對自己的教材進行跟蹤評估,為後續的修改作準備。與我國的人民教育出版社一樣,美國一些教材也有很穩定的編寫團隊,他們持續不斷地根據使用情況和新標準修訂自己編寫的教材,以滿足市場的需求。

3.2 多元性與多樣性

隨著全球化的發展,世界各國的數學課程標準逐漸趨同。但有趣的是,美國基於同一標準編寫的數學教材卻異彩紛呈。在市面上,既能看到以“雙基”學習為主的傳統教材,也能看到以“函數”概念為核心的初中新教材[14],呈多元性和多樣性。

美國數學教材的多樣性既體現在情境的多樣性[16-17],也體現在表徵方式[18]和解題策

略的多樣性[19-20],還體現在習題類型的多樣性[21]和認知推理水準要求的多樣性[20,22]。與其它國家的數學教材相比,美國數學教材較少純粹數學情境的問題,這也是美國教材又大又厚的原因。在20世紀,美國的數學教材從平均87頁(1904-1921年)增加到平均330頁(1990s)[23]。教材中更多的是來自現實生活情境的問題,學生需要從這些情境中建構相應的數學模型;為說明學生建構抽象的數學模型,圖形化表徵被廣泛地使用,以幫助學生建構現實到數學之間的橋樑。習題是數學學習材料中很重要的部分,美國數學教材中,除了與所學內容緊密相關的常規練習題外,還有少量的條件不足或多餘的問題、開放性問題、問題提出的任務等[21,24]。儘管這些問題所占的比例很小,但這些問題在培養學生的批判思考能力和創造性思維能力方面的作用卻是不可忽視的。我國的教材編寫者在這些方面也有一些努力[24],與美國一樣,要把這些好的實踐變成教學常規還有很多的工作要做。

3.3 廣度和深度之間的平衡

“一英里寬,一英寸深”是人們對美國數學教材的普遍印象,說的是美國教材涵蓋的知識面比較寬,但從深度方面來說,卻又比較淺。無論是從大型的國際比較研究(如TIMSS[25-30]),還是小型的跨國比較[16,18,20,31],對美國教材的這一特點從不同的方面進行了呈現。但這一結論恐怕只適合於小學和初中低年級,到初中高年級和高中,以函數為核心的、將方程和不等式融合在函數之中的課程,以及大學一年級水準的AP課程難度卻不遜於我們的課程。

廣度和深度是教材編寫過程中難以兼顧的問題,美國數學教材的“廣度”不僅體現在單冊教材涵蓋的主題數量之多,也體現在數學情境涉及的面很廣,來自兒童生活的方方面面,這種處理讓低年級學生看到生活中處處皆數學,讓那些數學概念發展較慢的學生可以結合自己的日常生活經驗來理解抽象的數學而不至於過早掉隊。英國上世紀70年代末到80年代初的“學生對中學數學與科學概念的理解(CSMS)”課題研究[32]表明,學生對很多概念的發展是非常緩慢的,如分數、字母代數、比和比例等,所以到初中七、八年級,美國數學教材中還有相當大的篇幅是講這些內容的。相比而言,我國的數學教材從五到七年級都比美國教材要深。如何正確處理和平衡“廣度”和“深度”之間的關係,不同的國家有不同的選擇。在義務教育階段,我們是否應該降低部分較難內容的要求,或者將一些比較難的內容稍稍後移,也是可以嘗試的,特別對小學高年級表現出學習困難的學生。

3.4 採用歸納法編寫教材,引導學生主動建構數學知識

美國教材常常結合現實情境引入和開展教學,較少直接呈現大量數學概念[16,22]。在學習內容的呈現方面,美國教材並不像東亞國家一樣通過演繹式呈現一般概念(如用嚴格的數學證明來呈現等腰三角形底角相等),而是通過歸納式呈現教學內容(如通過現實情境中的活動和探索讓學生掌握抽象數學概念的含義)。由於計算器的廣泛使用,美國教材中包含各種來自現實世界的複雜問題,問題中的數值沒有進行人為的簡化[16]。

數學來源於現實世界,反過來又被廣泛地應用于現實世界。我國的數學教材在這方面也做出了很大的改變,但課堂教學卻出現明顯的滯後,這一現象被張奠宙先生[36]描述為

“去兩頭,燒中段”,結果學生既不知道數學從哪裡來,也不知道數學有什麼用。儘管從1993 年高考中出現應用題以來,這一現象得到了一些改善,但如何從數學建模的角度編寫教材,我們的嘗試工作才剛剛開始。

3.5 突破傳統教材編寫體系,對中學數學教材進行大膽改革

20 世紀初,克萊茵就提出,中學數學課程應該以函數概念為核心。美國的一些新課程已經在這些方面進行了嘗試[14,17,33],以函數為核心展開與之相關聯的數學內容的學習,如方程看作是函數中的變數取某個殊值時得到的,不等式看作是兩個函數圖像之間的關係。蔡金法等的研究[34]表明,這種改革性數學課程的學習不僅沒有犧牲學生對基礎知識的掌握,相反地,它促進了各種族群學生問題解決能力的提高。

我國中學數學教材普遍按照方程、不等式到函數的順序進行展開(當然,在最後的函數部分中有涉及方程和不等式的問題),兩種方式孰優孰劣,需要進行對比實驗研究。一個可以預見的結果是,以函數為核心的課程,有利於學生更清晰地建立三者之間的關係,而不是把它們看作是相互獨立的。在實際問題情境中,他們更能理解函數圖像之間,函數圖像與直線之間各種交點的實際意義。當然,要讓剛接觸代數符號的學生理解兩個變數之間的關係也是個巨大的挑戰,對美國學生來說,代數的學習是一道難跨越的門檻。

綜上所述,美國數學教材的編寫是出版社行為,編者通常是數學教育研究者和一線數學教師,他們參照 NCTM 的數學課程標準和 CCSSM 編寫教材。美國市面上的數學教材數不勝數,面對這些教材,各州或學區沒有統一的選擇標準,但各州或學區會依據一些標準對市面上的教材進行評審後給出州或學區教材建議清單,這些標準主要涉及教材是否符合課程標準、教師和課程領導者對教材的建議、教材的品質評估和試用情況等。從教材評估和比較分析的研究結果,我們可以看出美國的數學教材仍然是“一英里寬”,但卻不一定是“一英寸深”。美國數學教材涵蓋的內容主題更多,題材更廣,認知要求多樣化,特別是在問題解決策略、抽象水準、概念性理解和推理等方面,這些在過去的一個世紀都有很大的提高[23][35]。美國數學教材還有如下一些特點,這些都值得我們學習和借鑒:(1)呈現多種多樣的問題情境、表徵方法、問題解決策略等,這種處理可以幫助學生從多角度思考問題,尋求解決方案。(2)美國教材非常注重數學建模,還原“做數學”的過程,注重數學與現實世界的聯繫。(3)美國初中數學教材在發展以函數概念為核心的課程方面進行了有益的探索,我們可以進行類似的實驗,探索數學課程發展的新模式。

參考文獻:

[1] Common Core State Standards Initiative. (2010). Common Core State Standards for mathematics [M]. Retrieved from http://www.corestandards.org/assets/CCSSI_Math%20Standards.pdf.

[2] Massachusetts Department of Elementary and Secondary Education. (2011). Massachusetts curriculum framework for mathematics grades pre-kindergarten to 12: Incorporating the

common core state standards for mathematics [M]. MA: the author.

[3] National Governors Association, CCSSO, Achieve, Council of the Great City Schools, National Association of State Boards of Education (2013). K – 8 Publishers' Criteria for the Common Core State Standards for Mathematics [M]. Retrieved from http://www.corestandards.org/assets/Math_Publishers_Criteria_K – 8_Spring%202013_FINAL.pdf.

[4] Kurtzleben, D. (2012). How your textbook dollars are divvied up [N]. U.S. News. Retrieved from https://www.usnews.com/news/articles/2012/08/28/how – your – textbook – dollars – are – divvied – up.

[5] American Association for the Advancement of Science (2000). Middle grades mathematics textbooks: A benchmarks – based evaluation [M]. Washington, DC: American Association for the Advancement of Science.

[6] Fulkerson, W. O., & Banilower, E. R. (2014). Monitoring progress: How the 2012 National Survey of Science and Mathematics Education can inform a national K – 12 STEM education indicator system [M]. Chapel Hill, NC: Horizon Research, Inc.

[7] Scudella, V. (2013). State textbook adoption [M]. Denver, CO: Education Commission of the States. Retrieved from http://www.ecs.org/clearinghouse/01/09/23/10923.pdf.

[8] Whitman, D. (2004). The mad, mad world of textbook adoption [M]. ? Maryland, MD: District Creative Printing. Available at Fordham Institute. Retrieved from http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED485530.pdf.

[9] Dumas, P. (2006). Textbook and instructional materials adoption policy and procedures [M]. Policy Brief. Honolulu, HI: Pacific Resources for Education and Learning.

[10] 江春蓮(2013). 美國的數學課程改革[M]. 見鮑建生、徐斌豔主編, 數學教育研究導引(二)(p.39 –48). 南京:江蘇教育出版社.

[11] Jacob, B. (2001). Implementing standards: The California mathematics textbook debacle [J]. ? The Phi Delta Kappan,? 83(3), 264 –272.

[12] Zeringue, J. K., Spencer, D., Mark, J., & Schwinden, K. (2010). Influences on mathematics textbook selection: What really matters?? NCTM Research Pre – session [M]. Available at the NCTM 2010 Conference, San Diego, CA.

[13] Student Achievement Partners, Achieve, CCSSO (2014). Toolkit for evaluating alignment of instructional and assessment materials to the Common Core State Standards [M]. Retrieved from http://www.achieve.org/publications/toolkit – evaluating – alignment – instructional – and – assessment – materials – common – core – state.

[14] Cai, J., Nie, B., & Moyer, J. C. (2010). The teaching of equation solving: Approaches in Standards – based and traditional curricula in the United States [J]. Pedagogies: An International Journal, 5(3), 170 – 186.

[16] Park, K., & Leung, F. K. S. (2006). A comparative study of the mathematics textbooks of China, England, Japan, Korea, and the United States [M]. In? F. K. S. Leung, K. D. Graf & F. J. Lopez－Real (Eds.), Mathematics education in different cultural traditions: A comparative study of East Asia and the West? (pp. 227－238). New York: Springer.

[17] 江春蓮,蘇洪雨(2013). 美國 CMP 課程及其對我國中小學綜合實踐活動的啟示[J]. 中學數學研究,383,封二,1－2.

[18] Li, Y., Chen, X., & An, S. (2009). Conceptualizing and organizing content for teaching and learning in selected Chinese, Japanese and US mathematics textbooks: The case of fraction division [J].? ZDM － The International Journal on Mathematics Education,? 41(6), 809－826.

[19] Fan, L., & Zhu, Y. (2007). Representation of problem－solving procedures: A comparative look at China, Singapore, and US mathematics textbooks [J]. Educational Studies in Mathematics, 66(1), 61－75.

[20] Yeap, B. H., Ferrucci, B. J., & Carter, J. A. (2006). Comparative study of arithmetic problems in Singaporean and American mathematics textbooks [M]. In? F. K. S. Leung, K. D. Graf & F. J. Lopez－Real (Eds.), Mathematics education in different cultural traditions: A comparative study of East Asia and the West? (pp. 213－225). New York: Springer.

[21] Zhu, Y., & Fan, L. (2006). Focus on the representation of problem types in intended curriculum: A comparison of selected mathematics textbooks from Mainland China and the United States [J]. International Journal of Science and Mathematics Education, 4(4), 609－626.

[22] Hong, D. S., & Choi, K. M. (2014). A comparison of Korean and American secondary school textbooks: the case of quadratic equations [J].? Educational Studies in Mathematics,? 85(2), 241－263.

[23] Baker, D., Knipe, H., Collins, J., Leon, J., Cummings, E., Blair C., & Gamson, D. (2010). One hundred years of elementary school mathematics in the United States: A content analysis and cognitive assessment of textbooks from 1900 to 2000 [J]. Journal for Research in Mathematics Education, 41(4), 383－423.

[24] Cai, J. & Jiang, C. (2017). An analysis of problem－posing tasks in Chinese and US elementary mathematics textbooks [J]. International Journal of Science and Mathematics Education, 15(8), 1521－1540.

[25] Schmidt, W. H., McKnight, C. C., & Raisen, S. A. (1997).? A splintered vision: An investigation of U.S. science and mathematics education [M]. Boston, MA: Kluwer Academic Press.

[26] Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Gonzalez, E. J., Gregory, K. D., Garden, R.

A., O'Connor, K. M., ... & Smith, T. A. (2000). TIMSS 1999 international mathematics report: Findings from IEA's repeat of the Third International Mathematics and Science Study at the eighth grade [M]. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.

[27] Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Gonzalez, E. J., & Chrostowski, S. J. (2004). TIMSS 2003 international mathematics report: Findings from IEA's trends in International Mathematics and Science Study at the fourth and eighth grades [M]. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.

[28] Mullis, I. V. S., Martin, M. O., & Foy, P. (2008). TIMSS 2007 international mathematics report: Findings from IEA's Trends in International Mathematics and Science Study at the fourth and eighth grades [M]. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.

[29] Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P., & Arora, A. (2012). TIMSS 2011 international results in mathematics [M]. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.

[30] Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P., & Hooper, M. (2016). TIMSS 2015 international results in mathematics [M]. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.

[31] Li, Y. (2000). A comparison of problems that follow selected content presentations in American and Chinese mathematics textbooks [J]. ? Journal for Research in Mathematics Education, 31(2), 234 - 241.

[32] Hart, K. M., Kerslake, D., Brown, M. L., Ruddock, G., Küchemann, D. E., & McCartney M. (Eds.) (1981). Children's understanding of mathematics: 11 - 16 [M]. London: The CSMS Mathematics Team.

[33] 蔡金法,聶必凱,江春蓮(2015). 美國數學課程對變數概念的不同處理[J]. 課程·教材·教法, 35(9), 123 - 127.

[34] Cai, J., Wang, N., Moyer, J. C., Wang, C., & Nie, B. (2011). Longitudinal investigation of the curriculum effect: An analysis of student learning outcomes from the LieCal Project [J]. International Journal of Educational Research, 50(2), 117 - 136.

[35] Thompson, D. R., Senk, S. L., & Johnson, G. J. (2012). Opportunities to learn reasoning and proof in high school mathematics textbooks [J]. Journal for Research in Mathematics Education, 43(3), 253 - 295.

[36] 張奠宙,宋乃慶(主編)(2009). 數學教育概論(第二版)[M]. 北京:高等教育出版社。

平方數與立方數求和問題

勞工子弟學校初一　鍾錫豪　指導老師:魏均僑

在數學競賽中,經常會出現求和的問題. 求和的每一項有一定規律,但是計算起來卻不容易. 如果直接計算,幾乎不可能在競賽場上辦到. 下面是一道常見的題目:

計算:$36^2+41^2+46^2+\cdots+131^2$(2014 年港澳盃中一組).

如果把這道題目的每一項分別平方再求和,一共需要計算 20 次. 我們是否有一般性的方法去解決這個問題呢?

我們把36,41,⋯,131看成更一般的情況. 第1項看作a,第2,3,⋯,n項相比首項的增量分別為b,$2b\cdots$,$(n-1)b$,也就是

$$a^2+(a+b)^2+(a+2b)^2+\cdots+[a+(n-1)b]^2$$

用求和符號重寫,就是

$$\sum_{k=1}^{n}[a+b(k-1)]^2.$$

展開後,得到

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}[a^2+2ab(k-1)+b^2(k-1)^2]\\&=\sum_{k=1}^{n}(a^2+2abk-2ab+b^2k^2-2b^2k+b^2)\\&=na^2+2ab\sum_{k=1}^{n}k-2abn+b^2\sum_{k=1}^{n}k^2-2b^2\sum_{k=1}^{n}k+nb^2.\end{aligned}$$

由熟知的結論

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2},\ \sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

並代入上式,可得

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}[a+b(k-1)]\\&=na^2+2ab\cdot\frac{n(n+1)}{2}-2abn+b^2\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-2b^2\cdot\frac{n(n+1)}{2}+nb^2\\&=n\left[a^2+ab(n-1)+b^2\times\frac{(n-1)(2n-1)}{6}\right]=n\left[a^2+(n-1)\left(ab+\frac{2n-1}{6}b^2\right)\right].\end{aligned}$$

最終得到公式:

$$\sum_{k=1}^{n}[a+b(k-1)]^2=n\left[a^2+(n-1)\left(ab+\frac{2n-1}{6}b^2\right)\right]. \qquad (1)$$

這就是我們需要的一般形式. 我們嘗試利用公式（1）來解決上面的題目：

$$\sum_{k=1}^{20}[36+5(k-1)]^2=20\times\left[36^2+(20-1)\times\left(36\times5+\frac{2\times20-1}{6}\times5^2\right)\right]$$

$$=20\times\left[36^2+19\times\left(180+\frac{39}{6}\times5^2\right)\right]=20\times\left[1296+19\left(180+\frac{13}{2}\times25\right)\right]$$

$$=20\times\left(1296+3420+\frac{6175}{2}\right)=25920+68400+61750=156070.$$

接下來,我們給出幾道類似的題目.

〔例 1〕計算:$7^2+17^2+\cdots+107^2$.

〔解〕由公式（1）,可得

$$\sum_{k=1}^{11}[7+10(k-1)]^2=11\times\left[7^2+(11-1)\times\left(7\times10+\frac{2\times11-1}{6}\times10^2\right)\right]$$

$$=11\times\left[7^2+10\times\left(70+\frac{21}{6}\times10^2\right)\right]=11\times[49+10\times(70+350)]$$

$$=11\times(49+700+3500)=11\times4249=46739.$$

〔例 2〕計算:$23^2+30^2+\cdots+65^2$.

〔解〕由公式（1）,可得

$$\sum_{k=1}^{7}[23+7(k-1)]^2=7\times\left[23^2+(7-1)\times\left(23\times7+\frac{2\times7-1}{6}\times7^2\right)\right]$$

$$=7\times\left[23^2+6\times\left(161+\frac{13}{6}\times49\right)\right]$$

$$=7\times(529+966+637)=7\times2132=14924.$$

〔例 3〕計算:$33^2+35^2+37^2+\cdots+49^2$（2013 年港澳盃中一組）.

〔解〕由公式（1）,可得

$$\sum_{k=1}^{9}[33+2(k-1)]^2=9\times\left[33^2+(9-1)\times\left(33\times2+\frac{2\times9-1}{6}\times2^2\right)\right]$$

$$=9\times\left[33^2+8\times\left(66+\frac{17}{6}\times4\right)\right]=9\times\left(1089+528+\frac{272}{3}\right)$$

$$=9801+4752+816=15369.$$

〔例 4〕計算:$34^2+38^2+\cdots+70^2$.

〔解〕由公式（1）,可得

$$\sum_{k=1}^{10}[34+4(k-1)]^2 = 10\times\left[34^2+(10-1)\times\left(34\times4+\frac{2\times10-1}{6}\times4^2\right)\right]$$

$$=10\times\left[34^2+9\times\left(136+\frac{19}{6}\times4^2\right)\right]=10\times\left[1156+9\times\left(136+\frac{152}{3}\right)\right]$$

$$=10\times(1156+1224+456)=10\times2836=28360.$$

以上是平方和的一般計算方法,只需知道首項和相鄰兩項的增量,就能得到一般的求和公式.

如果把平方和換成立方和,結果又怎樣呢?

計算:$3^3+7^3+11^3+\cdots+23^3$.

與平方求和如出一轍,我們將首項看作 a,後面各項的增量分別為 $b,2b,\cdots,(n-1)b$,因此就有

$$a^3+(a+b)^3+(a+2b)^3+\cdots+[a+(n-1)b]^3$$

用求和符號重寫,就是

$$\sum_{k=1}^{n}[a+b(k-1)]^3.$$

展開後,得到

$$\sum_{k=1}^{n}[a^3+3a^2b(k-1)+3ab^2(k-1)^2+b^3(k-1)^3]$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(a^3+3a^2bk-3a^2b+3ab^2k^2-6ab^2k+3a^2b+b^3k^3-3b^3k^2+3b^3k-b^3)$$

$$=na^3+3a^2b\sum_{k=1}^{n}k-3a^2bn+3ab^2\sum_{k=1}^{n}k^2-6ab^2\sum_{k=1}^{n}k+3a^2bn+b^3\sum_{k=1}^{n}k^3-3b^3\sum_{k=1}^{n}k^2+3b^3\sum_{k=1}^{n}$$

$$-b^3n$$

由熟知的結論

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2},\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\sum_{k=1}^{n}k^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

並代入,可得

$$\sum_{k=1}^{n}[a+b(k-1)]^3$$

$$=na^3+3a^2b\cdot\frac{n(n+1)}{2}-3a^2bn+3ab^2\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-6ab^2\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$

$$+3ab^2n+b^3\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2-3b^3\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+3b^3\cdot\frac{n(n+1)}{2}-b^3n$$

$$=na^3+3a^2b\cdot\frac{n^2-n}{2}+3ab^2n\cdot\left[\frac{(n+1)(2n+1)}{6}-(n+1)+1\right]$$

$$+b^3\left\{\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2-\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}+\frac{3n(n+1)}{2}-n\right\}$$

$$=na^3+\left[\frac{n(n-1)}{2}\right]\left[3a^2b+(2n-1)ab^2+\frac{n(n-1)}{2}b^3\right].$$

最終得到公式

$$\sum_{k=1}^{n}[a+b(k-1)]^{3}=na^{3}+\left[\frac{n(n-1)}{2}\right]\left[3a^{2}b+(2n-1)ab^{2}+\frac{n(n-1)}{2}b^{3}\right] \qquad (2)$$

我們嘗試用以上的公式（2）來解決上面的題目：

$$\sum_{k=1}^{6}[3+4(k-1)]^{3}$$

$$=6\times 3^{3}+\left[\frac{6(6-1)}{2}\right]\times\left[3\times 3^{2}\times 4+(2\times 6-1)\times 3\times 4^{2}+\frac{6(6-1)}{2}\times 4^{3}\right]$$

$$=6\times 27+15\times(108+528+15\times 64)=162+15\times 159=24102.$$

得到公式後,我們便可以解答下列類似的題目.

〔例 5〕計算:$7^{3}+14^{3}+\cdots+56^{3}$.

〔解〕由公式（2）,可得

$$\sum_{k=1}^{8}[7+7(k-1)]^{3}$$

$$=8\times 7^{3}+\left[\frac{8\times(8-1)}{2}\right]\left[3\times 7^{2}\times 7+(2\times 8-1)\times 7\times 7^{2}+\frac{8\times(8-1)}{2}\times 7^{3}\right]$$

$$=8\times 343+28\times(1029+5145+9604)=2744+28\times 15778=44528.$$

〔例 6〕計算:$11^{3}+21^{3}+\cdots+101^{3}$.

〔解〕由公式（2）,可得

$$\sum_{k=1}^{10}[11+10(k-1)]^{3}$$

$$=10\times 11^{3}+\left[\frac{10\times(10-1)}{2}\right]\left[3\times 11^{2}\times 10+(2\times 10-1)\times 11\times 10^{2}+\frac{10\times(10-1)}{2}\times 10^{3}\right]$$

$$=10\times 1331+45\times(3630+20900+45000)=13310+45\times 69530$$

$$=13310+3128850=3142160.$$

〔例 7〕計算:$12^{3}+18^{3}+\cdots+48^{3}$.

〔解〕由公式（2）,可得

$$\sum_{k=1}^{7}[12+6(k-1)]^{3}$$

$$=7\times 12^{3}+\left[\frac{7\times(7-1)}{2}\right]\times\left[3\times 12^{2}\times 6+(2\times 7-1)\times 12\times 6^{2}+\frac{7\times(7-1)}{2}\times 6^{3}\right]$$

$$=7\times 1728+21\times(2592+5616+4536)=12096+267624=279720.$$

以上便是平方和與立方和的一般計算方法,這種方法只需推導出了公式,再代入首項和增量,就毋須經過複雜的運算,直接就能得到答案,問題也迎刃而解了. 此方法不僅可以令解題速度更快,同時也提高了數學競賽場上的計算準確率.

最後,我們通過以下三道練習題,鞏固以上公式的運用:

〔**練習** 1〕計算:$37^2 + 45^2 + 53^2 + \cdots + 93^2$.

〔**練習** 2〕計算:$27^3 + 39^3 + 51^3 + \cdots + 99^3$.

〔**練習** 3〕計算:$43^3 + 50^3 + 57^3 + \cdots + 92^3$.

讀者只需利用上述的公式(1) 與公式(2),就可解答以上三題.

結合全文,相信大家已經掌握簡便的計算方法,只需懂得如何在競賽場上運用,便可事半功倍. 事實上,公式可進一步推廣到四次或以上的情況,這就留給讀者自行思考.

時代呼喚攀高峰　數學探研創新篇

澳門數學教育研究學會　鄭志民

一、時代的呼喚!

一位學校的校長回顧辦學的艱辛歷程時,發出肺腑之言:**“質量是學校生存、發展和狀大的生命線。”**

一所學校要辦成高素質的學校要具體五大條件:

第一、要有高瞻遠矚,堅持傳承,勇於創新,善於總結,不斷攀登的校長及其助手。

第二、在校長的領導下,要有一支能忠於辦學精神、辦學理念的行政隊伍。

這支隊伍的行政人員,要能運籌帷幄,身先士卒,帶頭教研,掌握教師的脈搏,支持教師的教學和教改,努力造就教師成為**“不斷進取,善於教學,學會教研,善於育才”**的優秀教師。

第三、要有一大批肯干、苦干和實干的優秀教師,他們不是“搵飯食”、“混飯食”,甚至是“扼飯食”的“教師匠”,而是忠於教育事業、盡心盡意培育下一代的辛勤園丁。他們拿起書本能教(好)書,做起數學善研究,發掘人才俱慧眼,培育英才不遺力。

第四、要有一大批**“學習專心,知識全面,基礎扎實,勤學好問,敢於創新”**優秀學生。

第五、要有一大批關心教育的社會人士和關心學校的家長。

祖國七十周年的輝煌成就舉世矚目、震憾世界。

新時代呼喚祖國不斷從**“一窮二白”**到**“繁榮昌盛”。偉大祖國從“站起來”**,到**“富起來”**,再到**“強起來”**,從而屹立於世界的東方。

新時代也呼喚教育要不斷地創新。數學教師要在平凡的教育工作的崗位上不斷開展數學教育探究,培養具有研究能力的青年學生,使他們成為祖國百年復興的優秀接班人。

造就數學探究的新一代優秀教師,培育具數學研究能力的學生,不但是歷史的責任,也是新時代的呼喚!

二、“數學探究”應該怎樣進行?

數學探究是新時代的呼喚,但數學探究應該如何進行?

教師進行數學探究可從多方面,多角度,運用多種手段來進行,教師指導學生進行數學研究也是如此。

數學探究起碼包括下述幾個方面：

1. 探究一題多解；
2. 探究公式(定理)的推廣；
3. 探究“不同思路”的解題方法；
4. 探究“解題策略”的制定；
5. 探究“錯誤思維”的糾偏。

教師或學生在進行數學探究時往往會擦出火花,亮出新的思維和解題方法。學生超越老師,師生超越前人;創出新成果 —— 這也就“數學探究”所要達到的眞正目的。

下面提供數學探究的若干典型問題及其相關的案例,以供老師和學生參考。

(一)從“數形結合百般好”入手。

數學家華羅庚先生對數學上的“數”和“形”曾經作過生動的描述:**“數缺形,難直觀;形缺數難入微;數形結合百般好。”**

數形溝通,是我們發現數學問題簡捷解法的利器。許多數學問題,一旦將“數”轉化為“形”,或將“形”轉化為“數”來研究問題,就會顯現無限的生機。

〔**例** 1〕已知 $x, y, z > 0$,且

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 1, & (1) \\ y^2 + z^2 + yz = 3, & (2) \\ Z^2 + Z^2 + ZX = 4. & (3) \end{cases}$$

求 $xy + yz + zx$ 的值.

如果從三個方程中解出 x, y, z 的值,再求 $xy + yz + zx$ 的值,當然是一條思路,但解的過程比較繁雜,即:

(1) − (2) 得:$(x^2 - z^2) + zy - yz = -2$,即

$(x - z)(x + y + z) = -2.$ (4)

(2) − (3) 得:

$(y - x)(x + y + z) = -1.$ (5)

(3) − (1) 得:

$(z - y)(x + y + z) = 3.$ (6)

而 $x, y, z > 0$,則 $x + y + z > 0$,

(4) ÷ (5) 得:$\dfrac{x - z}{y - x} = 2$,即

$z = 3x - 2y,$ (7)

將(7)代入(2)得:

$3x^2 + y^2 - 3xy = 1,$ (8)

由(8)—(1)得:$2x^2 - 4xy = 0$. 而 $x > 0$,所以:

$x = 2y.$　　　　　　　　　　　　　(9)

把(9)代入(1)得到 $7y^2 = 1$，$y = \dfrac{\sqrt{7}}{7}$($y = -\dfrac{\sqrt{7}}{7} < 0$ 舍去)．這時，$x = \dfrac{2\sqrt{7}}{7}$，$z = \dfrac{4\sqrt{7}}{7}$，

所以：

$$xy + yz + zx = \frac{2\sqrt{7}}{7}\cdot\frac{\sqrt{7}}{7} + \frac{\sqrt{7}}{7}\cdot\frac{4\sqrt{7}}{7} + \frac{4\sqrt{7}}{7}\cdot\frac{2\sqrt{7}}{7} = 2.$$

上述過程中，反反復復地對方程實施變換，夠累人了．能否從繁雜中解放出來呢？**我們仔細觀察已知條件中方程組左邊代數式的結構特點，發現它們很像余弦定理．於是，由這一點靈氣，想辦法構造三角形試試看．**

把已知的三個方程化為：

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2xy\cos 120^\circ = 1^2, \\ y^2 + z^2 - 2yz\cos 120^\circ = (\sqrt{3})^2, \\ z^2 + x^2 - 2zx\cos 120^\circ = 2^2 \end{cases}$$

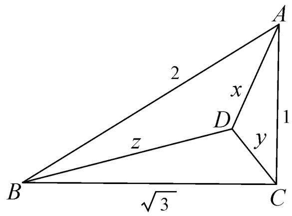


圖1−1

而 $(\sqrt{3})^2 + 1^2 = 2^2$，則以 $1,\sqrt{3},2$ 為邊可構造直三角形 ABC，$AC = 1$，$BC = \sqrt{3}$，$AB = 2$．D 是 $\triangle ABC$ 內一點，且滿足 $\angle ADB = \angle BDC = \angle CDA = 120^\circ$，$AD = x$，$CD = y$，$BD = z$．

而 $S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD} + S_{\triangle ADC} = S_{\triangle ABC}$，則

$$\frac{1}{2}xy\sin 120^\circ + \frac{1}{2}yz\sin 120^\circ + \frac{1}{2}zx\sin 120^\circ = \frac{1}{2}\times 1\times\sqrt{3}，即$$

$$xy + yz + zx = 2.$$

將一個代數問題，構造三角形加以解答，顯得十分簡便．難怪美國數學家斯蒂恩說，如果一個特定的問題被轉化為一個圖形，那么思想就整體地把握了問題，並且能夠創造性地思索問題的解法．

數轉化為形的方式常有**構造幾何圖形，建立函數圖像，運用集合韋恩圖**等．這樣能將數量關系直觀地表述出來，增加思考的直觀性，發現解題的捷徑．

〔**例 2**〕設 x、y、z 都是正實數，且滿足

$$x^2 + xy + y^2 = 19, \quad ①$$
$$y^2 + yz + z^2 = 37, \quad ②$$
$$z^2 + zx + x^2 = 28. \quad ③$$

求 $x + y + z$ 的值．

〔**思路**〕本題是一道三元二次方程組的問題，但如果試圖解這個三元二次方程組，求出 x、y、z 的值來求 $x + y + z$ 的值，顯然是十分麻煩的．

分析已知條件的特徵，如①式．將該式稍作變形，得

$$x^2 + y^2 + 2\times\frac{1}{2}xy = (\sqrt{19})^2,$$

則具有明顯的幾何特徵——與餘弦定理相似．則由餘弦定理知，以 x、y、$\sqrt{19}$ 為三邊恰能構

成一個三角形,且長 x 和 y 的兩邊的夾角為 $120°$. 同此,由②、③知,可構造另兩個有一角為 $120°$ 的三角形;並且這三個三角形恰能拼成一個邊長為 $\sqrt{19}$、$\sqrt{37}$ 和 $\sqrt{28}$ 的大三角形(如圖 1 - 2). 由所得三角形的面積關係易知 $xy + yz + zx$ 的值. 從而可望與原方程組配合,求出 $x + y + z$.

〔**解**〕把已知條件改寫成

$$x^2 + y^2 - 2xy\cos 120° = (\sqrt{19})^2,$$

$$y^2 + z^2 - 2yz\cos 120° = (\sqrt{37})^2,$$

$$z^2 + x^2 - 2zx\cos 120° = (\sqrt{28})^2.$$

根據餘弦定理,把 x、y、z 看做線段長,可以作出輔助三角形 ABC(圖 1 - 2),其中 $AB = \sqrt{28}$, $BC = \sqrt{37}$, $CA = \sqrt{19}$. O 是 ABC 內一點,$OA = x$, $OB = z$, $OC = y$, $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 120°$.

顯然,$S_{\triangle AOB} + S_{\triangle BOC} + S_{\triangle COA} = S_{\triangle ABC}$. ④

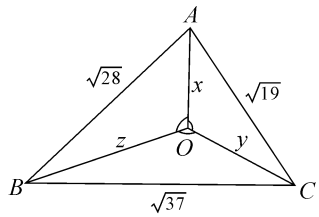


圖1−2

因為 $S_{\triangle AOB} = \dfrac{1}{2}xz\sin 120° = \dfrac{\sqrt{3}}{4}xz$,

$$S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2}yz\sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{4}xz,$$

$$S_{\triangle COA} = \frac{1}{2}xy\sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{4}xz,$$

又 $\cos\angle CAB = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \dfrac{5}{\sqrt{28} \cdot \sqrt{19}}$,

所以,$\sin\angle CAB = \sqrt{1 - \cos^2\angle CAB} = \dfrac{13\sqrt{3}}{\sqrt{28} \cdot \sqrt{19}}$.

所以 $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin\angle CAB = \dfrac{13}{2}\sqrt{3}$.

把以上各式代入④,得

$$\frac{\sqrt{3}}{4}(xy + yz + xz) = \frac{13}{2}\sqrt{3}.$$

所以 $xy + yz + zx = 26$. ⑤

所以① + ② + ③ + 3 × ⑤,並整理得

$$2(x + y + z)^2 = 162.$$

因為 x、y、z 是正數,所以 $x + y + z = 9$.

〔**評註**〕(1) 求 $xy + yz + zx$ 是解本題的關鍵,這裏用了**構形法**(構造 $\triangle ABC$,並利用面積關係). 由此我們體會到,對於代數條件應能聯想其是否具有某種幾何意義,只有善於正確聯想,才能恰當而靈活地運用**構形法**來簡化問題的求解.

(2) 本例求 $xy + yz + zx$ 是為了進一步求 $x + y + z$ 做準備. 這表明**構形法**既可以作為整

體性的解題策略,也可以為局部計算或推理提供輔助.

〔**例 3**〕已知 a、b、$c \in R^+$,求證 $\sqrt{a^2+ab+b^2}+\sqrt{a^2+ac+c^2}>\sqrt{b^2+bc+c^2}$.

〔**分析**〕觀察求證式,發現 a、b、c 具有輪換對稱的特點,從 $\sqrt{a^2+ab+b^2}$ 可聯想到根號內的形式與余弦定理相似,則有 $a^2+ab+b^2=a^2+b^2-2ab\cos 120°$. 因此可用**構形法**(做出具公共頂點的三個三角形 $\triangle OAB$,$\triangle OBC$ 及 $\triangle OAC$,使 $OA=a$,$OB=b$,$OC=c$,且 $\angle AOB=\angle BOC=\angle AOC=120°$)加以證明.

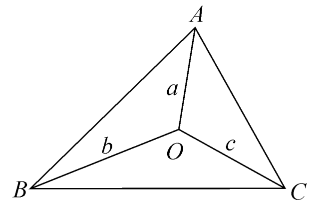


圖1−3

〔**證明**〕作具有公共頂點 O 的三個三角形 $\triangle OAB$,$\triangle OBC$ 及 $\triangle OAC$,使 $OA=a$,$OB=b$,$OC=c$,且 $\angle AOB=\angle BOC=\angle AOC=120°$,如圖 1 − 3 所示,則有

$AB^2=OA^2+OB^2-2\cdot OA\cdot OB\cdot\cos\angle AOB=a^2+ab+b^2$;

$AC^2=OA^2+OC^2-2\cdot OA\cdot OC\cdot\cos\angle AOC=a^2+ac+c^2$;

$BC^2=OB^2+OC^2-2\cdot OB\cdot OC\cdot\cos\angle BOC=b^2+bc+c^2$.

$\therefore AB=\sqrt{a^2+ab+b^2}$, $AC=\sqrt{a^2+ac+c^2}$, $BC=\sqrt{b^2+bc+c^2}$.

但 $AB+AC>BC$(三角形兩邊之和大於等三邊),

$\therefore \sqrt{a^2+ab+b^2}+\sqrt{a^2+ac+c^2}>\sqrt{b^2+bc+c^2}$..

〔**例 4**〕證明重要不等式:$\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$($a$、$b$ 皆為正數,當且僅當 $a=b$ 時,等號成立).

〔**證明**〕$\because a,b$ 皆為正數,作線段 $AC=a$,延長 AC 至 B,使 $CB=b$. 以 AB 為直徑作半圓,過 C 作 $CD\perp AB$ 交半圓周於 D,由幾何性質可知 $CD^2=AC\cdot CB=ab$.(如圖 1 − 4).

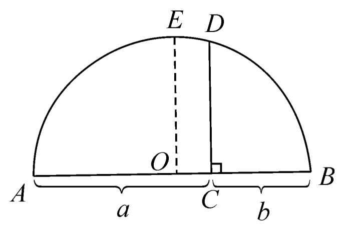


圖1−4

$\therefore CD=\sqrt{ab}$.

過圓心 O 作 $OE\perp AB$ 交半圓周於 E,

$\therefore OE=\dfrac{a+b}{2}$. ①

當 $a\neq b$ 時,$OE>CD$,$\therefore \dfrac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$.

當 $a=b$ 時,則 CD 就是 OE,

故 $\dfrac{a+b}{2}=\sqrt{ab}$. ②

由 ①,② 可得 $\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$,證畢.

〔**註**〕不難看出,利用**幾何圖形性質**來證明這個**重要不等式**,既簡便,又直觀.

〔**例 5**〕如圖 1 − 5,圓的三條弦 PP_1,QQ_1,RR_1,兩間相交,交點分別為 A、B、C,若 $AP=BQ=CR$,$AR_1=BP_1=CQ_1$,則 $\triangle ABC$ 是正三角形.

〔**證明**〕設 $AP = BQ = CR = m, AR_1 = BP_1 = CQ_1 = n, BC = x, CA = y, AB = z.$ 根據圓內相交弦定理有

$$\begin{cases} n(m+x) = m(n+y), \\ n(m+y) = m(n+z), \\ n(m+z) = m(n+x). \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} nx = my, \\ ny = mz, \\ nz = mx. \end{cases}$$

三式相加,從而得 $n(x+y+z) = m(x+y+z)$,

所以 $m = n, x = y = z$.

可見 $\triangle ABC$ 是正三角形.

眞正是"以數助形"皆稱好,"幾何問題"細入微.

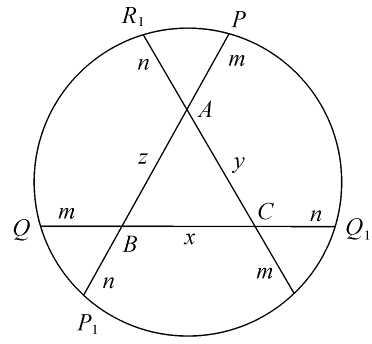


圖1−5

以上五個例子再一次印證了華羅庚這位數學大師的至理名言:"數缺形,難直觀;形缺數難入微;數形結合百般好。"

(二)從"一題多解見功底"入手。

善於利用 $A.P.$ 和 $G.P.$ 的定義、通項公式(及其變形和拓廣形式),前 n 項和公式,特別是相關的性質,都可以簡捷地解 $A.P.$ 和 $G.P.$ 的相關問題,甚至可以做到一題多解.

下面四個例題的一題多解,便是典型的案例.

〔**例** 1〕已知$\{a_n\}$為 $A.P.$, $a_3 = 9, a_9 = 12$,求 a_{15}, a_{21}, a_{22}.

〔**解法一**〕$\because$ $\{a_n\}$為 $A.P.$, $a_3 = 9, a_9 = 12$,

$$\therefore \begin{cases} a_1 + 2d = 9, \\ a_1 + 8d = 12. \end{cases} \quad \therefore a_1 = 8, d = \frac{1}{2}.$$

故 $a_{15} = a_1 + (15-1)d = 8 + 14 \times \frac{1}{2} = 15$,

$a_{21} = a_1 + (21-1)d = 8 + 20 \times \frac{1}{2} = 18$,

$a_{22} = a_1 + (22-1)d = 8 + 21 \times \frac{1}{2} = 18\frac{1}{2}$.

(此解法為**"通法"**——列方程組求解法,屬**基本的解法**,也是最常用的解法.)

〔**解法二**〕$\because$ $\{a_n\}$為 $A.P.$,且 $a_3 = 9, a_9 = 12$,又 $a_m = a_n + (m-n)d$,

$$\therefore d = \frac{a_m - a_n}{m-n} = \frac{a_9 - a_3}{9-3} = \frac{12-9}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2},$$

$\therefore$ $a_{15} = a_3 + (15-3)d = 9 + 12 \times \frac{1}{2} = 15$,

$a_{21} = a_3 + (21-3)d = 9 + 18 \times \frac{1}{2} = 18$,

$a_{22} = a_3 + (22-3)d = 9 + 19 \times \frac{1}{2} = 18\frac{1}{2}$.

(此解法運用了**等差數列通項公式的拓廣形式** $a_m = a_n + (m-n)d$ 及**變形公式** $d = \frac{a_m - a_n}{m-n}$,屬**“巧解法”**.)

〔**解法三**〕$\because$ $\{a_n\}$ 為 $A.P.$,且 $a_3 = 9, a_9 = 12$,又 3,9,15 成 $A.P.$,$\therefore$ a_3, a_9, a_{15} 成 $A.P.$,

$\therefore a_{15} = 2a_9 - a_3 = 2 \times 12 - 9 = 15$;

同理 9,15,21 成 $A.P.$,

$\therefore a_9, a_{15}, a_{21}$ 也成 $A.P.$,

$\therefore a_{21} = 2a_{15} - a_9 = 2 \times 15 - 12 = 18$;

由 $a_m = a_n + (m-n)d$,知

$$d = \frac{a_m - a_n}{m-n} = \frac{12-9}{9-3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore a_{22} = a_3 + (22-3)d = 9 + 18 \times \frac{1}{2} = 18\frac{1}{2}.$$

(此解法運用了**等差數列中等差中項的變形公式**——a_m, a_n, a_p 成 $A.P.$,則 $a_p = 2a_n - a_m$ 及**等差數列中通項公式的拓廣形式** $a_m = a_n + (m-n)d$ 之變形公式 $d = \frac{a_m - a_n}{m-n}$,屬**“妙解法”**,但屬**“特法”**,若 3,9,15;9,15,21 不成 $A.P.$,則此法不通.)

〔**解法四**〕$\because$ $\{a_n\}$ 為 $A.P.$,且 $a_3 = 9, a_9 = 12$,

$$\therefore \frac{a_{15} - a_9}{15-9} = d = \frac{a_9 - a_3}{9-3},$$

$$\therefore \frac{a_{15} - 12}{6} = \frac{12-9}{6},$$

$\therefore a_{15} = 3 + 12 = 15$;

同理 $\frac{a_{21} - a_9}{21-9} = d = \frac{a_9 - a_3}{9-3}$,

$$\therefore \frac{a_{21} - 12}{12} = \frac{12-9}{6},$$

$a_{21} = 2 \times 3 + 12 = 18$;

同理 $\frac{a_{22} - a_9}{22-9} = d = \frac{a_9 - a_3}{9-3}$,

$$\therefore \frac{a_{22} - 12}{13} = \frac{12-9}{6},$$

$$\therefore a_{22} = \frac{1}{2} \times 13 + 12 = 18\frac{1}{2}.$$

(此解法運用了等差數列的通項公式 $a_m = a_n + (m-n)d$ 之變形公式 $\frac{a_m - a_n}{m-n} = d = \frac{a_p - a_q}{P-q}$,設 d 而不求 d,**“聲東擊西”** 去解題,屬**“巧妙解法”**,且此解法具普遍性.)

〔**例 2**〕有四個數,前三數成 $A.P.$, 後三個數成 $G.P.$,並且等一個數與第四個數之和為 16,第二個數與第三個數之和為 12,求這四個數.

〔**解法一**〕根據題意,可設四個數分別為 $x-d, x, x+d, y$,

則有
$$\begin{cases} x+(x+d)=12, & (1) \\ (x-d)+y=16, & (2) \\ (x+d)^2=xy, & (3) \end{cases}$$

$x-d$	x	$x+d$	y
第一數	第二數	第三數	第四數

由(1),可得 $d=12-2x$,分別代入(2),(3) 得
$$\begin{cases} 3x+y=28, & (4) \\ (12-x)^2=xy, & (5) \end{cases}$$

由(4),可得 $y=28-3x$,代入(5) 得
$$(12-x)^2=x(28-3x),$$

即 $x^2-13x+36=0$, $(x-4)(x-9)=0$,
$$\therefore x_1=4, x_2=9,$$
$$y_1=16, y_2=1,$$
$$d_1=4, d_2=-6.$$

$\therefore$ 所求的四個數分別為 0,4,8,16 或 15,9,3,1.

(此解法設三個未知數 x, y, d, 並借助於框圖表達出第四個數,列三元一次方程組求解.)

〔**解法二**〕根據題意,可設四個數分別為 $x, y, 12-y, 16-x$,

則有
$$\begin{cases} 2y=x+(12-y), & (1) \\ (12-y)^2=y(16-x). & (2) \end{cases}$$

x	y	$12-y$	$16-x$
第一數	第二數	第三數	第四數

由(1),可得 $x=3y-12$,代入(2),得
$$(12-y)^2=y(28-3y),$$

即 $y^2-13y+36=0$, $(y-4)(y-9)=0$,

$\therefore x_1=0, x_2=15,$

$y_1=4, y_2=9.$

$\therefore$ 所求的四個數分別為 0,4,8,16 或 15,9,3,1.

(此解法設兩個未知數 x, y, 並借助於框圖表達出其他兩個數,列二元二次方程組求解.)

〔**解法三**〕根據題意,可設四個數分別為 $16-xq^2, x, xq, xq^2$,

則有 $$\begin{cases} x + xq = 12, & (1) \\ 16 - xq^2 + xq = 2x. & (2) \end{cases}$$

$16-xq^2$	x	xq	xq^2
第一數	第二數	第三數	第四數

由(1),可得 $x = \dfrac{12}{1+q}$,代入(2),得

$$16 - \frac{12}{1+q} \cdot q^2 + \frac{12}{1+q} \cdot q = \frac{24}{1+q}.$$

即 $3q^2 - 7q + 2 = 0, (3q-1)(q-2) = 0$,

$\therefore q = 2$,或 $q = \dfrac{1}{3}, x = 4$,或 $x = 9$.

$\therefore$ 所求的四個數分別為 0,4,8,16 或 15,9,3,1.

(此解法設兩個未知數 x, q,並借助於框圖表達出其他兩個數,列二元二次方程組求解.)

〔**解法四**〕根據題意,可設四個數分別為 $3y-12, y, 12-y, 16-(3y-12)$,

則有 $$(12-y)^2 = y(28-3y),$$

$3y-12$	y	$12-y$	$16-(3y-12)$
第一數	第二數	第三數	第四數

即 $y^2 - 13y + 36 = 0, (y-4)(y-9) = 0$,

$\therefore y_1 = 4$,或 $y_2 = 9$.

$\therefore$ 所求的四個數分別為 0,4,8,16 或 15,9,3,1.

(此解法設一個未知數 y,並借助於框圖表達出其他三個數,列一元二次方程組求解.)

〔**解法五**〕根據題意,可設四個數分別為 a, b, c, d.

則有 $$\begin{cases} a + d = 16, & (1) \\ b + c = 12, & (2) \\ 2b = a + c, & (3) \\ c^2 = bd. & (4) \end{cases}$$

a	b	c	d
第一數	第二數	第三數	第四數

由(1)+(2),得

$$a + b + c + d = 28, \qquad (5)$$

把(3)代入(5),得

$$d = 28 - 3b.$$

又由(1),又可得

$$a=16-d=-12+3b.$$

由(2),得 $c=12-b$,代入(4),可得

$$(12-b)^2=b(28-3b),$$

$\therefore b^2-13b+36=0,(b-4)(b-9)=0,$

$\therefore b_1=4$,或 $b_2=9$;$c_1=8$,或 $c_2=3$;

$a_1=0$,或 $a_2=15$;$d_1=16$,或 $d_2=1$.

$\therefore$ 所求的四個數分別為 0,4,8,16 或 15,9,3,1.

(此解法設四個未知數 a,b,c,d 分別表達四個數,列出四元一次方程組求解.)

〔**註**〕上述五種解法中,顯然(解法五)易設且易列方程組,但解方程組就較難、較繁;而(解法四)雖然"難設元",但易列方程,易解方程,應屬最好的解法. 上述解法中,都借用了框圖表達四個數,方便解題,有可取之處.

〔**例 3**〕在 $\triangle ABC$ 中,A,B,C 的對邊分別是 a,b,c,已知 a^2,b^2,c^2 成 $A.P.$,

求證:$\dfrac{cosA}{a},\dfrac{cosB}{b},\dfrac{cosC}{c}$ 成 $A.P.$.

〔**證法一**〕在 $\triangle ABC$ 中,a^2,b^2,c^2 成 $A.P.$,

$\therefore -2a^2,-2b^2,-2c^2$ 也成 $A.P.$,

$\therefore a^2+b^2+c^2-2a^2,a^2+b^2+c^2-2b^2,a^2+b^2+c^2-2c^2$ 也成 $A.P.$,

即 $b^2+c^2-a^2,a^2+c^2-b^2,a^2+b^2-c^2$ 也成 $A.P.$.

又 $abc\neq 0$,

$\therefore \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2abc},\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2abc},\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2abc}$ 也成 $A.P.$,

即 $\dfrac{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{a},\dfrac{\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}}{b},\dfrac{\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}{c}$ 也成 $A.P.$,

$\therefore \dfrac{cosA}{a},\dfrac{cosB}{b},\dfrac{cosC}{c}$ 成 $A.P.$.

(此證法屬**綜合法**,利用等差數列的性質結合余弦定理證題.)

〔**證法二**〕在 $\triangle ABC$ 中,a^2,b^2,c^2 成 $A.P.$,

$\therefore a^2+c^2=2b^2,$

又 $cosA=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc},cosB=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac},cosC=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab},$

$$\therefore \frac{cosA}{a}+\frac{cosC}{c}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2abc}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2abc}=\frac{2b^2}{2abc}=\frac{2(2b^2-b^2)}{2abc}$$

$$=\frac{2(a^2+c^2-b^2)}{2abc}=2\times\frac{\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}}{b}=2\times\frac{cosB}{b},$$

故 $\frac{cosA}{a},\frac{cosB}{b},\frac{cosC}{c}$ 成 $A.P.$.

(此證法也屬**綜合法**,利用等差中項的充要條件——"a^2,b^2,c^2 成 $A.P. \Leftrightarrow 2b^2=a^2+c^2$",代數式的恆等變形結合余弦定理證題.)

〔**證法三**〕在 $\triangle ABC$ 中,a^2,b^2,c^2 成 $A.P.$,$\therefore a^2+c^2=2b^2$,

又 $a^2=b^2+c^2-2bccosA,b^2=a^2+c^2-2accosB,c^2=a^2+b^2-2abcosC$,

$\therefore b^2+c^2-2bccosA,a^2+c^2-2accosB,a^2+b^2-2abcosC$ 也成 $A.P.$,

$\therefore (b^2+c^2-2bccosA)+(a^2+b^2-2abcosC)=2(a^2+c^2-2accosB)$,

則 $bccosA+abcosC=2accosB$,

從而 $bccosA,accosB,abcosC$ 成 $A.P.$,

又 $abc\neq 0$,

故 $\frac{cosA}{a},\frac{cosB}{b},\frac{cosC}{c}$ 成 $A.P.$.

(此證法屬**綜合法**,利用等差中項的充要條件,代數式的恆等變形結合余弦定理證題.)

〔**證法四**〕在 $\triangle ABC$ 中,a^2,b^2,c^2 成 $A.P.$,

$\therefore a^2+c^2=2b^2$,

又 $\frac{(b^2+c^2-a^2)+(a^2+b^2-c^2)}{2}=b^2=2b^2-b^2=a^2+c^2-b^2$,

$\therefore b^2+c^2-a^2,a^2+c^2-b^2,a^2+b^2-c^2$ 成 $A.P.$,

又 $abc\neq 0$,

$\therefore \frac{b^2+c^2-a^2}{2abc},\frac{a^2+c^2-b^2}{2abc},\frac{a^2+b^2-c^2}{2abc}$ 也成 $A.P.$,

即 $\frac{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{a},\frac{\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}}{b},\frac{\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}{c}$ 也成 $A.P.$,

$\therefore \frac{cosA}{a},\frac{cosB}{b},\frac{cosC}{c}$ 成 $A.P.$.

(此證法屬**綜合法**,利用等差中項的充要條件,等差數列的性質,代數式的恆等變形結合余弦定理證題.)

〔**證法五**〕在 $\triangle ABC$ 中,要證明 $\frac{cosA}{a},\frac{cosB}{b},\frac{cosC}{c}$ 成 $A.P.$,只需證 $\frac{cosA}{a}+\frac{cosC}{c}=\frac{2cosB}{b}$,

根據余弦定理知,只需證

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2abc}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2abc}=2\times\frac{a^2+c^2-b^2}{2abc},$$

又只需證$(b^2+c^2-a^2)+(a^2+b^2-c^2)=2(a^2+c^2-b^2)$,

即只需證 $a^2+c^2=2b^2$,

也即只需證 a^2,b^2,c^2 成 $A.P.$,

而 a^2,b^2,c^2 成 $A.P.$(已知),且以上各步,步步可逆,

$\therefore \dfrac{cosA}{a},\dfrac{cosB}{b},\dfrac{cosC}{c}$ 成 $A.P.$.

（此證法屬**分析法**，利用等差中項的充要條件，代數式的恆等變形結合余弦定理證題.）

〔**證法六**〕在 $\triangle ABC$ 中，要證明 $\dfrac{cosA}{a},\dfrac{cosB}{b},\dfrac{cosC}{c}$ 成 $A.P.$，

只需證 $\dfrac{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{a},\dfrac{\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}}{b},\dfrac{\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}{c}$ 成 $A.P.$，

這只需證 $\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2abc},\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2abc},\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2abc}$ 成 $A.P.$，

這又只需證 $b^2+c^2-a^2,a^2+c^2-b^2,a^2+b^2-c^2$ 成 $A.P.$，

也即只需證 $(b^2+c^2-a^2)-(a^2+b^2+c^2)$，$(a^2+c^2-b^2)-(a^2+b^2+c^2)$，$(a^2+b^2-c^2)-(a^2+b^2+c^2)$ 成 $A.P.$，

即 $-2a^2$，$-2b^2$，$-2c^2$ 成 $A.P.$，

也即只需證 a^2,b^2,c^2 成 $A.P.$，

而 a^2,b^2,c^2 成 $A.P.$（已知），且以上各步，步步可逆，

$\therefore \dfrac{cosA}{a},\dfrac{cosB}{b},\dfrac{cosC}{c}$ 成 $A.P.$.

（此證法屬**分析法**，利用等差數列的性質，代數式的恆等變形結合余弦定理證題.）

（三）從“巧思妙證換角度”入手。

證明數學問題總希望得到最“漂亮”的證法，即簡捷、新奇、有回味的證法，而只有**“巧思”**才會有**“妙證”**.

〔**例 1**〕證明凸 n 邊形的外角和為 $360°$，內角和為 $(n-2)\times180°$.

德國物理學家馬赫用一根足夠長的鐵絲給出了下列直觀證法.

將鐵絲 OL 的一端 O 與凸多邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的 A_n 重合，如圖 3－1，OL 放置在 A_nA_1 邊上，將鐵絲伸出多邊形的部分 A_1L 繞 A_1 點順時針旋轉到與邊 A_1A_2 重合，設旋轉的角度為 α_1；再將伸出多邊形的鐵絲 A_2L 繞 A_2 點順時針旋轉到 A_2A_3，旋轉角度為 α_2；如此繼續下去，直到鐵絲轉到 A_nL，再繞 A_n 順時針旋轉到 A_nA_1，旋轉角度為 α_n，這時，鐵絲正好順時針方向轉了一周，於是 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=360°$，即凸多邊形的外角和為 $360°$.

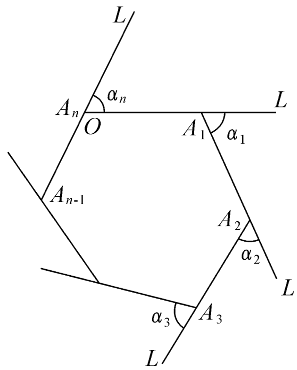


圖3−1

又因為多邊形的每一個外角與相鄰的內角互補，所以

$\alpha_1=180°-\angle A_nA_1A_2$，$\alpha_2=180°-\angle A_1A_2A_3$，$\cdots\alpha_n=180°-\angle A_{n-1}A_nA_1$，

代入外角和公式得

$\angle A_{nA1}A_2 + \angle A_1A_2A_3 + \cdots + \angle A_{n-1}A_nA_1 = (n-2) \times 180°$,

即凸 n 邊形內角和等於$(n-2) \times 180°$.

（四）從"轉換圖形巧計算"入手。

幾何中求面積問題,常常需要分解觀察對象,將一個非規則的圖形轉化為幾個規則圖形的面積之和差.

〔**例** 1〕如圖 4－1,在 $\odot O$ 的直徑 AB 上任意取兩點 P、Q,分別以 AP、AQ 為直徑在 AB 的同一側畫半圓,以 BQ、BP 為直徑,在 AB 的另一側畫半圓。

求證:陰影部分的面積與 $\odot O$ 面積的比等於 $PQ:AB$.

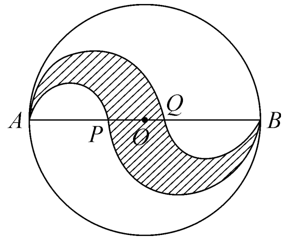


圖4－1

〔**解**〕$S_{陰影} = S_{半圓AQ} + S_{半圓PB} - S_{半圓AP} - S_{半圓QB}$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\frac{AQ^2}{4} + \frac{PB^2}{4} - \left(\frac{AP^2}{4} + \frac{QB^2}{4}\right)\right]$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\frac{AQ^2}{4} - \frac{QB^2}{4} + \left(\frac{PB^2}{4} - \frac{AP^2}{4}\right)\right]$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\frac{AQ+QB}{2} \cdot \frac{AQ-QB}{2} + \frac{PB+AP}{2} \cdot \frac{PB-AP}{2}\right]$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{AB}{2} \cdot \left(\frac{AQ-QB}{2} + \frac{PB-AP}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{4}AB \cdot PQ.$$

而 $S_{\odot O} = \frac{\pi}{4}AB^2$, $\therefore S_{陰影} : S_{\odot O} = PQ : AB$.

（五）從"大膽推廣求超越"入手。

〔**例** 1〕關於乘法公式$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 的推廣.

公式$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 的表述是無可非議的. 但如果換一個角度加以展示,便可以出現**"新天地"**. 事實上,$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.

它可理解為,**"兩數和的平方,等於這兩數的平方和再加上這兩數之積的 2 倍."**

而$(a+b+c)^2 = [(a+b)+c]^2 = (a+b)^2 + c^2 + 2(a+b)c$

$$= a^2 + b^2 + 2ab + c^2 + 2ac + 2bc$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

它可理解為**"三數和的平方,等於這三數的平方和再加上每兩數積的 2 倍."**

進而又有:

$(a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd.$

進而又有:

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2+2a_1a_2+2a_1a_3+\cdots+2a_1a_n+\cdots+2a_{n-1}a_n.$$

〔**例 2**〕1987 年第五期美國《數學教師》(*Mathematics teacher*) 發表了《**韋利克定理**》一文,此文的作者是美國赫維茨老師,韋利克是他的學生的名字,這是怎麼回事呢?

原來,赫維茨在上幾何課時,提出了這樣一個問題:

如圖 5 - 1,求正六邊形的兩條對角線相交所成的 $\angle 1$ 的度數.

韋利克認眞地解完了此題,得到答案是 120°. **他猜想**:對於任何正多邊形,$\angle 1$ 的大小總是等於正多邊形的一個內角. 赫維茨老師在《**韋利克定理**》一文中介紹了韋利克的發現,並且通過角度的計算,證明了這個猜想.

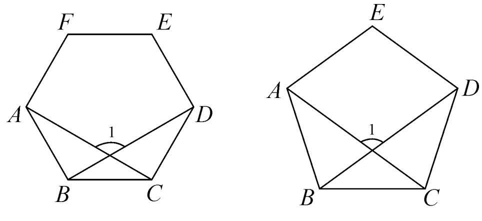


圖5-1

我們先看幾種特殊情形.

當正多邊形是正方形時,兩條對角線互相垂直,交角是 90°,猜想成立.

當正多邊形是正五邊形時,由於 $ABCDE$ 是正五邊形,則 $AB=BC$,那麼,$\angle BAC=\angle ACB=\frac{1}{2}(180°-108°)=36°$. 同理可得 $\angle CBD=36°$,$\angle ABD=72°$,$\angle 1=180°-36°-36°=108°=$ 正五邊形的一個內角.

當是正 n 邊形時,正 n 邊形的每一個內角 $=\frac{(n-2)\times 180°}{n}$,$\angle BCA=\angle ACB=\angle CBD=\frac{1}{2}\times\left(180°-\frac{(n-2)\times 180°}{n}\right)=\frac{180°}{n}=$,$\angle 1=\frac{(n-2)\times 180°}{n}-\frac{180°}{n}+\frac{180°}{n}=\frac{(n-2)\times 180°}{n}=$ 正 n 邊形的一個內角.

但又想想,如果 $n=3$ 時,正三角形沒有對角線,則猜想不成立,因此,應規定 $n\geq 4$,且 n 是自然數.

韋利克由一道很普通的習題,做出了大文章,難怪他的老師要以他的名字作為文章的標題. 其實,要做到韋利克這樣,並不難. 我們只要做有心人,掌握一定的方法,就完全可以辦得到,說不定也會出現以我們中學生的名字命名的新定理.

“踏破鐵鞋無覓處,得來全不費功夫.” 能夠有所發現的功夫,全在平時訓練中提高. 比如,對一個幾何題,如果在特殊三角形中成立,就想想在一般三角形中是否成立,進而想想在三稜錐、四面體中又是否成立;如果是一個代數問題,對某些具體數值成立,再換成其他數值看是否成立,進而換成字母時,結論又如何 ……

(六) 從“深刻理解絕對值”入手。

〔**例 1**〕已知 $a<b<c$,x 代表實數,求 $|x-a+x-b+x-c|$ 的最小值(1998 年上海市

數學競賽初三級試題).

〔**解**〕$|x-a|$的幾何意義是:在數軸上,表示實數 x 與實數 a 的兩個點之間的距離.

於是,求 $|x-a|+|x-b|+|x-c|$的最小值的意義就是在數軸上求一點(對應實數 x),使它到對應實數 a,b,c 的三個點 A,B,C 的距離之和最小,那麼,如圖 6 − 1 所示,當這個點 x 取在點 B 的位置時,它到 A,B,C 三點的距離之和最小,其和為 $c-a$.

因為,點 x 取在 B 以外的任何位置時,三條線段 $|x-a|$,$|x-b|$,$|x-c|$都有重複部分,因而總長度大於 $c-a$,如圖 6 − 2.

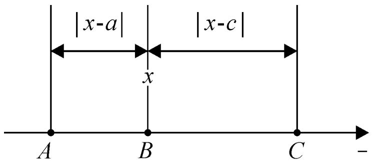


圖6−1

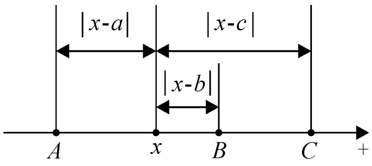


圖6−2

這個解法多麼漂亮,大大簡捷於其他的解法![註]

為什麼能得到這個簡捷的解法呢?

原因之一是,對絕對值概念的多方位認識,因而理解深刻,應用靈活;

原因之二是,面對問題,從代數到幾何,換了個思考角度;

原因之三是,把“三個絕對值和”理解為“三個距離之和”;

從而有“四兩破千斤”的思維方法,巧妙地求解.

[**註**] 參看鄭志民、鄧海棠編著之《薪火相傳育英才》P157〔例 52〕之三種不同解法.

(七)從“糾偏思維求真諦”入手。

〔**例 1**〕已知 $A=\{y \mid y=x^2-4x+3, x\in R\}$, $B=\{y \mid y=-x^2-2x+3, x\in R\}$, 求 $A\cap B$.

〔**分析**〕有的同學一看見是求交集,就由聯立方程組

$\begin{cases} y=x^2-4x+3, \\ y=-x^2-2x+2, \end{cases}$ 消去 y,得方程

$x^2-4x+3=-x^2-2x+2$, 即$2x^2-2x+1=0$.

由於方程的判別式 $\triangle=(-2)^2-4\times2\times1=-4<0$, 故方程無解,因而 $A\cap B=\phi$.

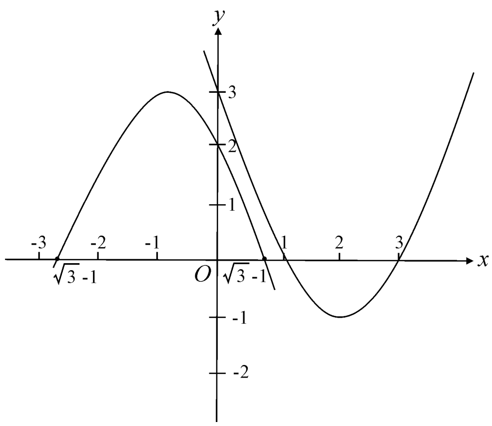


圖7−1

畫出兩條拋物線的圖象(如圖 7 − 1 所示)亦可看到,它們確實沒有交點.

但是,這種解法是錯誤的. 它既有知識性的錯誤,又有心理性的錯誤,知識性的錯誤是未能弄清楚 A,B 的元素是什麼, 把“數”y 誤認為“數

對”(x,y),把“值域”誤認為整條拋物線;心理性的錯誤是未能認真審題,憑老習慣,以為“求交集”就是“解方程組”,就是“求曲線的交點”,其實本題是求兩值域的交集,即兩個關於 y 為元素的兩個集合的交集.

〔**解**〕由 $y = x^2 - 4x + 3 = (x-2)^2 - 1$, 可知 $y \geq -1$.

又由 $y = -x^2 - 2x + 2 = 3 - (x+1)^2$, 可知 $y \leq 3$.

$\therefore A = \{y \mid y \geq -1\}$, $B = \{y \mid y \leq 3\}$,

$\therefore A \cap B = \{y \mid -1 \leq y \leq 3\}$.

〔**反思**〕學習集合必須抓住**“元素”**這個關鍵,集合是由元素確定的,空集、子集、交集、並集、補集和差集等也都是通過元素來定義的,**集合的基本性質(確定性、互異性、無序性)**便是針對元素描述的,集合的分類與表示方法等亦全都是通過元素來刻畫的. 遇到集合問題,首先要**弄清“元素是什麼”**. **“不弄清”(心理性的錯誤)**或**“弄不清”(知識性的錯誤)**都會產生對問題的**“分析”**出現**“似是而非”**的錯誤.

(八)從“霸位飲茶”求軌跡入手。

“代點法”是求軌跡方程的一種好方法.

“代點法”用於求解軌跡方程特別好用. 用**“代點法”**解題需要有三個條件:(1)有一個已知的軌跡 $f(x_1,y_1) = 0$;(2)點 $P_1(x_1,y_1)$ 在已知軌跡 $f(x,y) = 0$ 上,因此有 $f(x_1,y_1) = 0$;(3)所求的軌跡上的點 $P(x,y)$ 與 $P_1(x_1,y_1)$ 有密切的聯繫,可以表示成 $x = g(x_1)$, $y = \varphi(y_1)$ 的關係式;(3)並可得 $x_1 = g^{-1}(x)$, $y_1 = \varphi i - 1(y)$,代入方程 $f(x_1,y_1) = 0$,即可得所求的軌跡方程.

作者根據澳門人的生活習慣,把這種方法俗稱為**“霸位飲茶法”——“你霸位,我飲茶”**——這種方法需要(1)有可以飲茶的茶樓,並有飲茶位可霸;(2)有人(甲)願意替飲茶人(乙)去霸位;(3)甲霸到位後,會讓乙去飲茶. 作者在澳門濠江中學教授“解析幾何”時,用到此法,深受學生歡迎.

“代點法”實質上是“多參數法”. 有的把它稱為“轉移法”,或“轉移代入法”.

〔**例 1**〕已知點 P 是圓 $O(x^2 + y^2 = a^2)$ 上的動點, $A(2a,0)$ 是定點, $\angle POA$ 的平分線 OT 交 PA 於 T,求點 T 的軌跡方程.(圖 8 - 1)

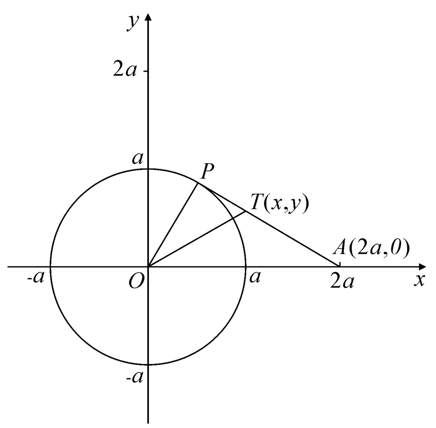


圖8-1

〔**解**〕(**代點法**)設 $T(x,y)$ 是軌跡上任一點(圖 8 - 1), P 點的坐標為 $P(x_p,y_p)$,

$\because OT$ 平分 $\angle POA$,

$\therefore \dfrac{|AT|}{|TP|} = \dfrac{|OA|}{|OP|} = 2$,

即 T 分 AP 成定比 $\lambda = 2$,由定比分點坐標公式,得

$$\begin{cases} x = \dfrac{2a + 2x_p}{1+2}, \\ y = \dfrac{0 + 2y_p}{1+2}; \end{cases} \begin{cases} x_p = \dfrac{3x - 2a}{2}, \\ y_p = \dfrac{3y}{2}. \end{cases}$$

$\because P$ 在曲線 $x^2 + y^2 = a^2$ 上,

$\therefore \left(\dfrac{3x - 2a}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{3y}{2}\right)^2 = a^2$,

即$\left(x - \dfrac{2}{3}a\right)^2 + y^2 = \left(\dfrac{2}{3}a\right)^2$ 為所求的點 T 的軌跡方程.

〔**例** 2〕已知 $\triangle ABC$ 兩頂點坐標為 $B(-2,0)$, $C(3,0)$,第三個頂點 A 在直線 l:$2x + 3y - 12 = 0$ 上滑動,求三角形 ABC 的重心軌跡方程. (圖 8 - 2)

〔**解**〕設 $\triangle ABC$ 的重心坐標為 $P(x,y)$,頂點的坐標為 $A(m,n)$,據三角形重心坐標公式,得

$$x = \frac{-2 + 3 + m}{3}, \ y = \frac{0 + 0 + n}{3}.$$

解之,得 $m = 3x - 1$, $n = 3y$.

由於點 $A(m,n)$ 在直線 l 上滑動,所以其坐標適合方程 $2x + 3y - 12 = 0$,於是有

$2(3x - 1) + 3(3y) - 12 = 0$,

即 $6x + 9y - 14 = 0$,為所求的重心的軌跡方程.

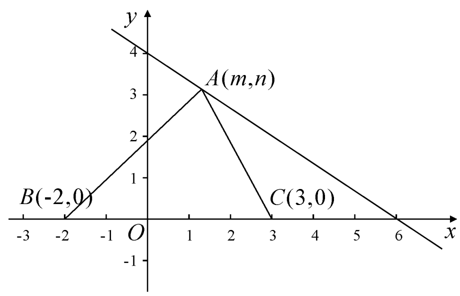


圖8−2

〔**例** 3〕設橢圓的方程是$\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1$,點 A 的坐標是$(m, -2)$,點 B 是橢圓上任意一點,點 P 分$\overline{BA}$所成的比為2,已知當 B 在橢圓上移動時,點 P 的軌跡關於直線 $x = 1$ 對稱,求 m 的值及點 P 的軌跡方程(91 年國內重點高校入學試題、理科)(圖形見 8 - 3).

〔**解**〕(**代點法**)設點P的坐標為$P(x,y)$,點B的坐標為$B(x_0,y_0)$,

$\because$ 點 P 分$\overline{BA}$ 所成的比為 2,$\therefore \lambda = \dfrac{BP}{PA} = 2$.

點 $P(x,y)$ 的坐標為

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_0 + \lambda m}{1 + \lambda} = \dfrac{x_0 + 2m}{3}, \\ y = \dfrac{y_0 + \lambda \times (-2)}{1 + \lambda} = \dfrac{y_0 - 4}{3}, \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x_0 = 3x - 2m, \\ y_0 = 3y + 4, \end{cases}$$

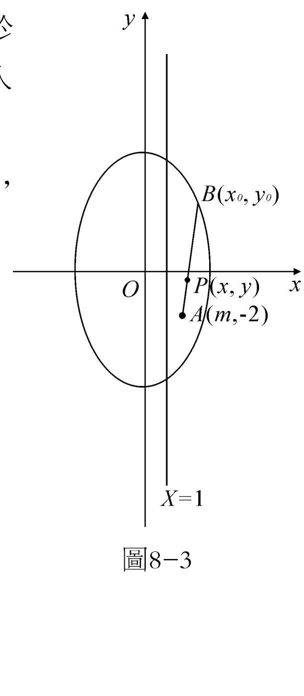


圖8−3

$\because B(x_0, y_0)$ 在橢圓上,$\therefore \dfrac{x_0^2}{9} + \dfrac{y_0^2}{16} = 1$,

則 $$\frac{(3x - 2m)^2}{9} + \frac{(3y + 4)^2}{16} = 1 .$$

整理,得 $(x - \dfrac{2}{3}m)^2 + \dfrac{(y + \frac{4}{3})^2}{\frac{16}{9}} = 1.$ ①

$\because$ 點 P 的軌跡關於直線 $x = 1$ 對稱,

$\therefore$ 橢圓 ① 的中心$(\dfrac{2}{3}m, -\dfrac{4}{3})$ 在直線 $x = 1$ 上,

$\therefore \dfrac{2}{3}m = 1, m = \dfrac{3}{2}.$

因此,點 P 的軌跡方程為

$$(x - 1)^2 + \frac{(y + \frac{4}{3})^2}{\frac{16}{9}} = 1.$$

(九)從"構圖解題展妙招"入手。

如果問題的條件中數量關係有明顯的幾何意義;或者用某種方式可與幾何圖形(體)建立聯繫,則可設法構造圖形或幾何體,將題設條件中的數量關係直接在形(體)中實現,用構造的圖形(立體)尋找要求解、求證的結論.

構造圖形法(構圖法) 解題過程的模式是:

題設條件特點分析 —幾何作用/幾何意義— **構造圖形** —在圖形中尋找間接推理→ **所求結論**

〔**例 1**〕已知 a、b、c 為正數,求證 $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} > \sqrt{2}(a + b + c)$.

〔**分析**〕從$\sqrt{2}(a + b + c)$ 來看,可以設想它是邊長為 $a + b + c$ 的正方形的對角線. 而 $\sqrt{a^2 + b^2}$、$\sqrt{b^2 + c^2}$、$\sqrt{c^2 + a^2}$ 可以分別看作以 a 和 b、b 和 c、c 和 a 為鄰邊的矩形的對角線. 因此可在以 $a + b + c$ 為邊的正方形內尋找三個矩形的對角線與正方形對角線間的關係.

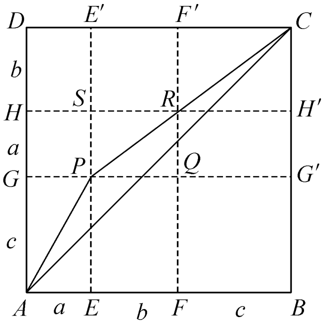


圖9−1

〔**證明**〕如圖 9 − 1 所示,以 $a + b + c$ 為邊作正方形 $ABCD$,在 AB 上順次截取 $AE = a$、$EF = b$、$FB = c$. 在 AD 上順次截取 $AG = c$、$GH = a$、$HD = b$,分別過 E、F、G、H 作對邊的垂線,垂足

依次為 E'、F'、G'、H'，這四條垂線有交點 P、Q、R、S，如圖所示，則 $AC = \sqrt{2}(a+b+c)$，且 $AP = \sqrt{a^2+c^2}$，$PR = \sqrt{a^2+b^2}$，$RC = \sqrt{b^2+c^2}$.

因為 $AP + PR + RC > AC$，

$\therefore \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2} > \sqrt{2}(a+b+c)$.

〔**註**〕不難看出，利用幾何圖形性質來證明這不等式，既簡便，又直觀.

〔**例 2**〕已知 a、b 為正數，求證 $\sqrt{ab} \le \dfrac{a+b}{2} \le \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$（當 $a = b$ 時取等號）.

〔**分析一**〕若把 $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ 作為一條線段，則這條線段是以 $\dfrac{a+b}{2}$ 和 $\dfrac{a-b}{2}$ 為兩直角邊的直角三角形的斜邊. 為此，取線段 $PA = a$，並在 PA 上截取 $PB = b$. 若 AB 的中點為 O，則 $OP = \dfrac{a+b}{2}$，$OA = \dfrac{a-b}{2}$，於是只要過 O 作 PO 的垂線，並在垂線上截取 $OC = OA$，則得直角三角形 $\triangle POC$，且其斜邊 $PC = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$. 在這種理解的基礎上，再着眼於 $\sqrt{ab}$，不難猜測它是從 P 點向以 AB 為直徑的圓的切線，這樣就可以在這個圖形中尋求解題的途徑了.

〔**證法一**〕作線段 $PA = a$. 在 PA 上截取 $PB = b$（這裏 $a \ge b$，並不失一般性）. 以 AB 為直徑作圓 O，過 O 作半徑 $OC \perp AB$，連結 PC，再過點 P 作圓 O 的切線，得切點為 D，則可推得：

$PO = \dfrac{a+b}{2}$，$OC = OA = \dfrac{a-b}{2}$，$PD = \sqrt{PA \cdot PB} = \sqrt{ab}$.

$PC = \sqrt{PO^2 + OC^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$，

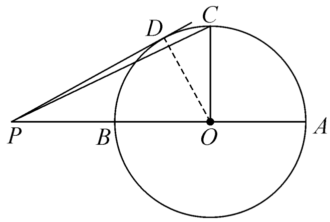


圖9−2

根據三角形中大角對大邊的定理，從圖中可知

$PD \le PO \le PC$.

其中當 A、B 兩點重合（即 $a = b$）時取等號.

故 $\sqrt{ab} \le \dfrac{a+b}{2} \le \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$.

〔**分析二**〕觀察結論中有 $\dfrac{a+b}{2}$ 和 $\sqrt{ab}$，聯想到直角三角形中，弦上的高的相關定理. 可以理解 $\sqrt{ab}$ 是以 a、b 為勾影和股影（即勾、股在弦上的射影）的弦上的高，於是在這個直角三角形中去探討表示 $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ 的線段，估計通過所構造的圖形可以達到.

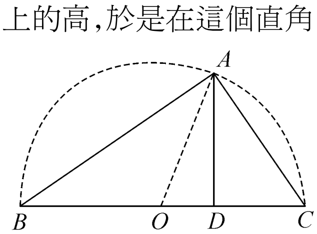


圖9−3

〔**證明二**〕以 $BC = a + b$ 為直徑作半圓 O，在 BC 上取點 D，使 $BD = a$，則 $DC = b$. 過 D 作 BC 的垂線交半圓於 A，連結 AB、

AC,則 $\triangle ABC$ 是直角三角形,且 AD 為弦上的高. 於是

$$OA = OB = OC = \frac{a+b}{2},$$

$$AD = \sqrt{BD \cdot DC} = \sqrt{ab}.$$

連結 OA,由勾股定理可得:

$$\sqrt{OA^2 + OD^2} = \sqrt{2 \times OA^2 - AD^2} = \sqrt{2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

從圖上可知:$\sqrt{OA^2 + OD^2} \geq OA \geq AD$(當 O、D 重合即 $a = b$ 時取等號).

故$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, 即$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

〔**分析三**〕上面兩種解法,構形後都從線段間的關係來考慮. 當然,也可以從面積的關係來構圖.

〔**證明三**〕作等腰直角三角形 $\triangle ABC$,使其斜邊 $BC = a + b$, 在 BC 上截取 $BD = a$, 則 $DC = b$. 過 D 作 BC 的垂線,交 AC 於 E,交 BA 的延長線於 F, 則

$$DE = DC = b, DF = BD = a.$$

是過 E 作 BC 的平行線交 AB 於 L,交斜邊上的高 AG 於 H,過 L 作 $LM \perp BC$ 於 M,則 $EL = a - b$.

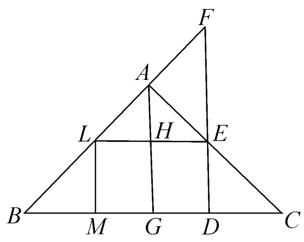


圖9−4

於是 $S_{\triangle DBF} = \frac{1}{2}a^2$, $S_{\triangle CDE} = \frac{1}{2}b^2$.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}(a+b) \cdot \frac{a+b}{2} = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2.$$

$$S_{\text{梯形}BCEL} = \frac{1}{2}[(a-b)+(a+b)] \cdot b = ab.$$

由於 $S_{\triangle DBF} + S_{\triangle CDE} \geq S_{\triangle ABC} \geq S_{\text{梯形}BCEL}$(當 D、G 重合時,即 $a = b$ 時,等式成立),

$$\therefore \frac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab.$$

$$\therefore \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \text{ 即} \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

〔**註**〕從上面三種解法可以看出,構圖的設想來源於問題的結論. 而幾何圖形最基本的元素是點、線、面(體),構形後可以通過點的位置、線段的關係或面積(體積)的關係等方面來探討如何解決具體問題.

(十)從"構形求取極大極大(小)值"入手。

求極值的有些問題並非容易求解. 但如果巧用構造圖形後,便可以輕快地加解決.

〔**例 1**〕已知 a、b、c 均為正數. 求 $y = \sqrt{x^2 + a} + \sqrt{(c-x)^2 + b}$ 的極小值.

〔**分析**〕這是一個相當麻煩的求極值問題,運用一般代數方法無疑要經歷令人煩惱的繁雜而又冗長的運算過程.

但是,由於所給條件 a、b、c 均為正數,並且函數關係式是兩個都化為平方和的算術平方根之和的形式,因此,使得利用兩個直角三角形斜邊之和的平面幾何途徑解決這個問題成為可能.

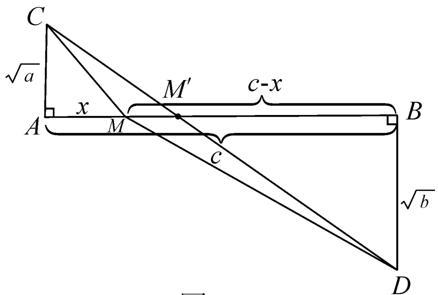


圖10-1

〔**解**〕如圖 10 - 1,取 $AB = c$,作 $AC \perp AB$,取 $AC = \sqrt{a}$,作 BD 反向垂直 AB,取 $BD = \sqrt{b}$.

設 $AM = x$, 則 $MB = c - x$.

在直角 $\triangle AMC$ 中,$CM = \sqrt{x^2 + a}$,

在直角 $\triangle BMD$ 中,$DM = \sqrt{(c - x)^2 + b}$.

顯然有 $y = CM + DM$,即 y 表示 M 到 C、D 距離之和;當 C、M、D 三點在一直線時,M 到 C、D 距離之和為最小,此時 M 應在 M' 處.

由 $\triangle ACM' \backsim \triangle BDM'$,得 $\dfrac{AM'}{M'B} = \dfrac{AC}{BD}$, 即 $\dfrac{x}{c - x} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

解之,得$x = \dfrac{c \cdot \sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$,並代入函數關係式得:

$$y_{極小} = \sqrt{\frac{ac^2}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} + a} + \sqrt{\frac{bc^2}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} + b}.$$

〔**例 2**〕已知 $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$,求 $\sqrt{x^2 + y^2}$ 的極大值與極小值.

〔**分析**〕因為原點在圓外(圓心到原點的距離大於半徑). 這個問題利用平面幾何性質極好解決. 我們只須把原點和圓心連結起來並延長,此線與圓的兩個交點即是圓上到原點最大距離與最小距離的點了. 分別算出它們的距離,問題即可解決.

當然,在算它們的距離時,我們只要求得原點到圓心的距離和圓的半徑,切不可機械地先去求直線與圓的交點,然後再用兩點間的距離公式求解. 具體解法如下:

〔**解**〕如圖 10 - 2 所示,$\because x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$, 經配方得:

$$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 4.$$

這是圓心為 $C(4,3)$,半徑為 $R = 2$ 的圓.

$\because$ $\sqrt{x^2 + y^2}$ 是圓周上的點到原點的距離,

$\therefore$ 連 OC 並延長交圓於 A、B.

$\because$ C 點坐標為$(4,3)$, $\therefore$ $|OC| = 5$.

故$|OA| = 5 - 2 = 3$, $|OB| = 5 + 2 = 7$.

即$\sqrt{x^2 + y^2}$ 的極大值為 7,極小值為 3.

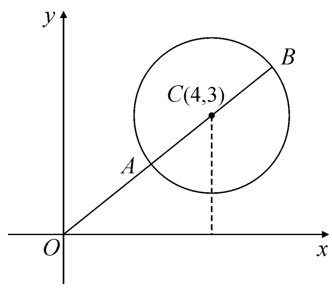


圖10-2

〔註〕從此例不難看出,運用構形法,運用幾何圖形的性質,這個函數極值問題的解決是何等的輕快!

(十一)從"解析方法助解題"入手。

"以數助形"方法多,"解析方法"屬典範.

〔**例1**〕在等腰直角三角形 ABC 中,P 為斜邊 BC 的中點,D 為 BC 上任一點,$DE \perp AB$,$DF \perp AC$,E、F 為垂足,則 $PE \perp PF$.

〔**證明**〕坐標系的選取如圖11-1,設等腰三角三角形的腰長為$2a$,則有$B(2a,0)$,$C(0,2a)$.

$\because DF \perp AC$, $\therefore \triangle CFD$ 也是等腰直角三角形,設它的腰長為 b.

$\because DE \perp AB$,則$|AE| = |FD| = b$, $|AF| = |AC| - |FC| = 2a - b$.

故有 $E(b,0)$, $F(0,2a-b)$.

$\because P$ 為 BC 的中點,$\therefore$ 有 $P(a,a)$.

$\because k_{PE} = \dfrac{a}{a-b}$, $K_{PF} = \dfrac{a-(2a-b)}{a} = \dfrac{b-a}{a}$.

$\therefore k_{PE} \cdot K_{PF} \dfrac{a}{a-b} \cdot \dfrac{b-a}{a} = -1$.

故 $PE \perp PF$.

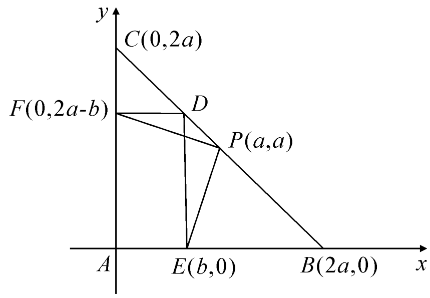


圖11-1

〔**例2**〕AD 為 $\triangle ABC$ 的中線,若 $AB > AC$, 則 $\angle BAD < \angle CAD$.

〔**證明**〕以 D 為原點,BC 為 x 軸建立直角坐標系如圖11-2,設A、B、C各點坐標分別為(a,b)、$(-c,0)$、$(c,0)$、(a、b、c 均為正數),則

$$k_{AB} = \frac{b}{a+c},\ k_{AD} = \frac{b}{a},\ k_{AC} = \frac{b}{a-c},$$

於是 $tg\angle BAD = \dfrac{k_{AD} - k_{AB}}{1 + k_{AD} \cdot k_{AB}} = \dfrac{bc}{a^2+b^2+ac}$;

$tg\angle CAD = \dfrac{k_{AC} - k_{AD}}{1 + k_{AC} \cdot k_{AD}} = \dfrac{bc}{a^2+b^2-ac}$.

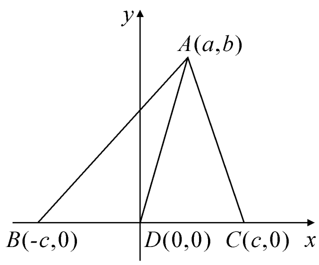


圖11-2

$\because AB > AC$,

$\therefore \sqrt{(a+c)^2+b^2} > \sqrt{(a-c)^2+b^2}$,

$\therefore ac > -ac$, $a^2+b^2+ac > a^2+b^2-ac$.

$\therefore \dfrac{bc}{a^2+b^2+ac} < \dfrac{bc}{a^2+b^2-ac}$.

則 $tg\angle BAD < tg\angle CAD$.

由於 $\angle BAD$ 與 $\angle CAD$ 都小於$180°$,

故 $\angle BAD < \angle CAD$.

〔**例3**〕$\triangle ABC$一邊BC延長至D,使$CD = BC$,自B作BC的垂線與DA的延長線交於E,若$AD = 3AE$,問$\triangle ABC$是何種三角形?

〔**解**〕坐標系的選取如圖11－3所示,設B,C的坐標分別為$B(0,0),C(b,0)$.

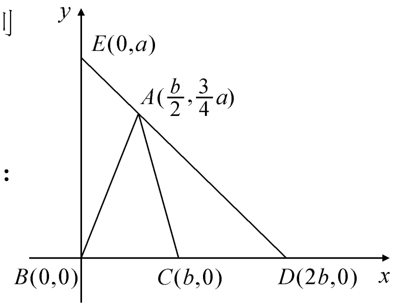


圖11－3

$\because CB = BC$, $\therefore$ 有$D(2b,0)$, 又設E的坐標為$E(0,a)$.

$\because AD = 3AE$, $\therefore$ 由線段定比分點公式,可得A點的坐標:

$$\begin{cases} x = \dfrac{2b + 3 \times 0}{1 + 3} = \dfrac{b}{2}, \\ y = \dfrac{0 + 3a}{1 + 3} = \dfrac{3}{4}a. \end{cases}$$

$\therefore$ 有$A(\dfrac{b}{2},\dfrac{3}{4}a)$.

$\therefore AB^2 = \dfrac{b^2}{4} + \dfrac{9}{16}a^2$, $AC^2 = \dfrac{b^2}{4} + \dfrac{9}{16}a^2 \neq b^2 = BC^2$.

故$AB^2 = AC^2$, 即$AB = AC \neq BC$.

$\therefore$ $\triangle ABC$是等腰三角形.

〔**例4**〕如圖11－4,P是正方形$ABCD$內一點,$PA = 5$, $PB = 8$, $PC = 13$. 求正方形$ABCD$的面積.

〔**思路**〕顯然本例即要求正方形的一邊長. 題中給出了若干線段長,若設正方形的邊長為a, 則a要借助這些線段長來求出. 為此,可借助這些線段長建立有關a的方程來求. 顯然可由解析法入手.

〔**解**〕如圖,以點B為原點,B方向為x軸正方向建立直角坐標系. 設A的坐標為$A(a,O)$, 則C的坐標為$C(O,a)$、D的坐標為$D(a,a)$. 又設P的坐標為$P(x,y)$, 則由$PA = 5$,得

$$(x - a)^2 + y^2 = 5^2; \qquad ①$$

由$PB = 8$,得

$$x^2 + y^2 = 8^2; \qquad ②$$

由$PC = 13$,得

$$x^2 + (y - a)^2 = 13^2. \qquad ③$$

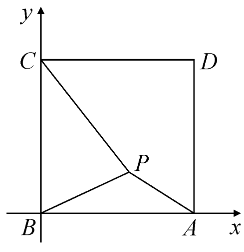


圖11－4

將②與①、③聯立分別得

$$x = \frac{a^2 + 39}{2a}, \ y = \frac{a^2 - 105}{2a}.$$

再代入②,得

$$(\frac{a^2 + 39}{2a})^2 + (\frac{a^2 - 105}{2a})^2 = 8^2.$$

解得 $a^2 = 153$ 或 $a^2 = 41$.

因為 $AC > PC$，所以 $\sqrt{2}a > 13$，則 $a^2 > 84.5$.

所以 $a^2 = 153$，即正方形 $ABCD$ 面積為 $a^2 = 153$.

（十二）從“三角方法巧解題”入手。

把幾何論證題或計算題轉化為三角問題，可使得思路明確，易於入手. **“幾何，三角”相結合，“三角方法”易解題**.

〔**例 1**〕如圖 12－1 所示，$\triangle ABC$ 中，$AB > AC$，CF、BE 分別是 AB 和 AC 上的高.

〔**求證**〕$AB + CF \geq AC + BE$.

〔**思路**〕三角形中邊的不等關係的問題，往往是較難解答的．本題中待證不等式中的四條線段一時難以歸入某個三角形中處理，用幾何方法就更顯困難．

注意到 BE、CF 是高，故有 $BE = ABsinA$、$CF = ACsinA$. 則待證不等式即為 $AB + ACsinA \geq AC + ABsinA$，也即 $AB(1 - sinA) \geq AC(1 - sinA)$.

顯然由 $sinA$ 的有界性(即 $|sinA| \leq 1$) 容易證得這一結果，從而原不等式可證.

〔**證明**〕如圖 12－1，因為 BE、CF 分別是 $\triangle ABC$ 的高，所以在 $Rt\triangle ABE$ 中，$BE = ABsinA$，在 $\triangle ACF$ 中，$CF = ACsinA$.

又因為 $\angle A$ 是 $\triangle ABC$ 的內角，

所以　$0 \leq sinA \leq 1$.

因為　$AB > AC$，所以 $AB - AC > 0$.

所以　$AB - AC \geq (AB - AC)sinA$.

即　$AB - AC \geq ABsinA - ACsinA$.

也即　$AB + ACsinA \geq AC + ABsinA$.

故　$AB + CF \geq AC + BE$.

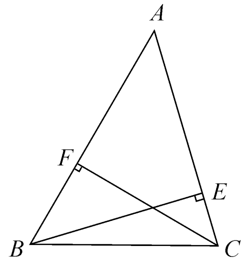


圖12−1

〔**例 2**〕試證明：三角形的各邊中點，各頂點引對邊垂線的垂足及各頂點與垂心連結線段的中點，這九個點在一個圓上.

〔**分析**〕如圖 12－2，可分成下面三組，分別證明各組中的六點共圓.

由 $AP \cdot AF = AD \cdot AX = AE \cdot AR$，證明 F、P、D、X、E、R 共圓；由 $BF \cdot BP = BE \cdot BY = BD \cdot BQ$，證明 F、P、E、Y、D、Q 共圓，再由 $CD \cdot CQ = CF \cdot CZ = CE \cdot CR$，證明 Q、D、E、F、R、Z 共圓. 最後再證這三個圓重合.

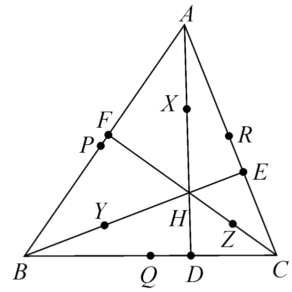


圖12−2

〔**證明**〕設 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑為 R，則由 $Rt\triangle A$

$$AP \cdot AF = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot cosA = \frac{1}{2}bccosA.$$

據正弦定理，知

$$\frac{b}{sinB} = \frac{c}{sinC} = 2R,$$

則 $\quad b = 2RsinB,\ c = 2RsinC.$

$\therefore \quad AP \cdot AF = 2R^2 \cdot cosA \cdot sinB \cdot sinC \qquad ①$

同理由 $Rt\triangle AEB$,得

$$AE \cdot AR = AB \cdot cosA \cdot \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}bc \cdot cosA.$$

$\therefore \quad AE \cdot AR = 2R^2 \cdot cosA \cdot sinB \cdot sinC \qquad ②$

又由 $Rt\triangle ADB$,得

$$AD \cdot AX = \frac{1}{2}AD \cdot AH = \frac{1}{2}C \cdot sinB \cdot AH.$$

而 $\angle FAH = 90° - \angle ABD,$

由 $Rt\triangle AFH$,知

$$AF = AH \cdot cos\angle FAH = AH \cdot cos(90° - \angle ABD) = AH \cdot sinB.$$

由 $Rt\triangle ACF$,知

$$AF = AC \cdot cos\angle CAF = b \cdot cosA,$$

$\therefore AH = \frac{AF}{sinB} = \frac{b \cdot cosA}{sinB}.$

$$\begin{aligned}\therefore AD \cdot AX &= \frac{1}{2}AD \cdot AH = \frac{1}{2}c \cdot sinB \cdot \frac{b \cdot cosA}{sinB} \\ &= \frac{1}{2} \times 2RsinC \times 2RsinB \cdot cosA \\ &= 2R^2cosA \cdot sinB \cdot sinC. \qquad ③\end{aligned}$$

由①、②、③,知

$AP \cdot AF = AE \cdot AR = AD \cdot AX$

故 F、P、E、R、D、X 六點共圓.

同理 F、P、D、Q、E、Y 及 D、Q、E、R、F、Z 六點也共圓.

由於這三個圓中,任意兩個圓各有三個公共點,根據三點確定圓的定理,可知這三個圓重合. 因此這九代上點同在一個圓上.

〔註〕這個圓叫作三角形的**九點圓(或稱歐拉圓)**. 19 世紀初葉被發現後,百年間人們對它研究很盛行. **三角形的九點圓與三角形的內切圓內切,並與三個旁切圓外切,這是平面幾何學最著名的定理之一,它是費爾巴哈(*Feuerbach*,1800—1834)於 1822 年首先發現的.**

(十三)從"歸納猜想探結論"入手。

有的數學問題的結論要靠我們用數學方法去推出. 歸納,猜想是對事物發展進程做出預測性的一種思維活動. 合理的猜想可以發現解題的有效途徑. 大膽猜想,細心求證,有希

望得出正確的結論. 歸納猜想,嚴格論證的過程將有助於培養學生思維的主動性.

〔**例** 1〕計算 $\sqrt{\underbrace{44\cdots4}_{n\text{個}}\underbrace{88\cdots8}_{n\text{個}}9}$.

〔**解**〕當 $n=1$ 時, $\sqrt{49}=7$,

當 $n=2$ 時, $\sqrt{4489}=67$,

當 $n=3$ 時, $\sqrt{444889}=667$,

……

進而猜想,本題的結論可能是 $\underbrace{666\cdots6}_{n\text{個}}7$

事實上,
$$\begin{aligned}\sqrt{\underbrace{44\cdots4}_{n\text{個}}\underbrace{88\cdots8}_{n\text{個}}9} &= \sqrt{\underbrace{44\cdots4}_{n\text{個}}\times10^n+2\times\underbrace{44\cdots4}_{n\text{個}}+1}\\ &=\sqrt{\underbrace{44\cdots4}_{n\text{個}}\times(\underbrace{99\cdots9}_{n\text{個}}+1)+2\times\underbrace{44\cdots4}_{n\text{個}}+1}\\ &=\sqrt{4\times9\times(\underbrace{11\cdots1}_{n\text{個}})^2+3\times\underbrace{44\cdots4}_{n\text{個}}+1}\\ &=\sqrt{[6\times(\underbrace{11\cdots1}_{n\text{個}})]^2+2\times6\times(\underbrace{11\cdots1}_{n\text{個}})\times1+1^2}\\ &=\sqrt{[6\times(\underbrace{11\cdots1}_{n\text{個}})+1]^2}\\ &=6\times(\underbrace{11\cdots1}_{n\text{個}})+1\\ &=\underbrace{666\cdots6}_{n\text{個}}7.\end{aligned}$$

〔**例** 2〕證明數列 12,1122,111333,… 的每一項都是相鄰兩個整數之積.

〔**證明**〕$12=3\times4$,

$1122=33\times34$,

$111222=333\times334$.

我們猜想
$$\underbrace{11\cdots1}_{n\text{個}}\underbrace{22\cdots2}_{n\text{個}}=\underbrace{33\cdots3}_{n\text{個}}\times(\underbrace{33\cdots3}_{n\text{個}}+1).$$

下面證明這個猜想的正確性:
$$\begin{aligned}a_n&=\underbrace{11\cdots1}_{n\text{個}}\underbrace{22\cdots2}_{n\text{個}}\\ &=\underbrace{11\cdots1}_{n\text{個}}\times10^n+2\times\underbrace{11\cdots1}_{n\text{個}}\\ &=\underbrace{11\cdots1}_{n\text{個}}\times(10^n+2).\end{aligned}$$

令 $m=\underbrace{11\cdots1}_{n\text{個}}$,則 $10^n+2=\underbrace{99\cdots9}_{n\text{個}}+3=9m+3$.

所以 $a_n=m(9m+3)=3m(3m+1)=3\times11\cdots1\times(3\times11\cdots1+1)$

$=\underbrace{33\cdots3}_{n\text{個}}\times(\underbrace{33\cdots3}_{n\text{個}}+1)$.

〔**例** 2〕所寫的猜想過程可以略去,因為題目已明確提出所要證明的結論,但我們還是寫下**“試驗 —— 歸納 —— 猜想”** 這三步,目的是讓我們學會這種歸納推理的思考方法,〔**例**

1〕和〔**例** 2〕之證明用的是**演繹法**.

（十四）從"幾何變換顯神通"入手。

幾何變換包括平移,旋轉,(軸)對稱它們都屬於合同變換.

巧用平移,旋轉,和(軸)對稱方法解幾何題是一種好方法.**"幾何變換"顯神通,"幾何問題"難變易**!

〔**例** 1〕(幾何變之平移法)在 $\triangle ABC$ 中,$AB = AC$,延長 AB 到 D,使 $BD = AB$,E 是 AB 的中點.

[求證] $CD = 2CE$.

〔**證法一**〕作 $BF /\!/ AC$,交 AC 延長線於 F(圖 14 – 1).

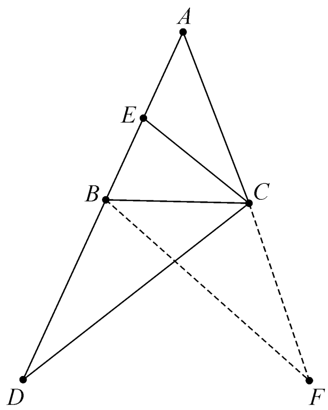


圖14-1

$\because E$ 是 AB 的中點,$\therefore EC = \dfrac{1}{2}BF$.

$\therefore BF = 2CE$ 且 $AC = CF$.

而 $AC = AB = BD$,

$\therefore BD = CF$ 且 $\angle ABC = \angle ACB$.

$\therefore \angle DBC = \angle FCB$.

又 $BC = BC$,

$\therefore \triangle BDC \cong \triangle FCB$,

$\therefore CD = BF$

則 $CD = 2CE$.

〔**評註**〕本題屬線段倍分問題,證明所用的是**"加倍法"**. 欲證一條線段是另一條的兩倍,可先將短的線段加倍,然後證明加倍後得到的線段和長的線段相等.

〔**證法二**〕取 CD 的中點 M,連結 BM(圖 14 – 2).

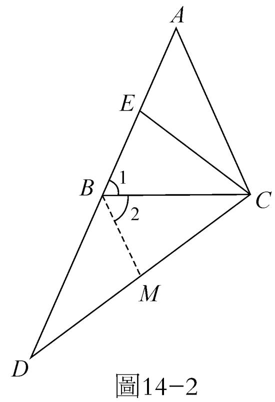


圖14-2

$\because AB = BD$,

$\therefore BM /\!/ AC$,$\therefore \angle ACB = \angle 2$.

且 $BM = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{1}{2}AB = BE$.

$\because AB = AC$, $\therefore \angle ACB = \angle 1$.

$\therefore \angle 1 = \angle 2$,

又 $BC = BC$,

$\therefore \triangle BMC \cong \triangle BEC$.

$\therefore CM = CE$,則 $CD = 2CE$.

〔**評註**〕這裏用的是**"折半法"**. 欲證一條線段是另一條線段的兩倍,可先將長的線段折半,然後證明折半後的線段和短的線段相等.

〔例 2〕A,B 兩鎮位於河的兩岸(如圖 14 - 3).規定河寬為定値,要在河上垂直於河岸 l_1 及 l_2 的河寬上建造一座橋,問橋應修在什麼地方,才能使得由 A 經過橋到達 B 的路程最短?

〔解〕如圖,作 $BG \perp l_1$,且使 $BG = d$(等於河寬). 連結 AG 交 l_2 於 C 點. 再作 $CD \perp l_1$ 於 D, 連結 BD. 則 CD 為橋的位置,此時路線 $ACDB$ 為最短.

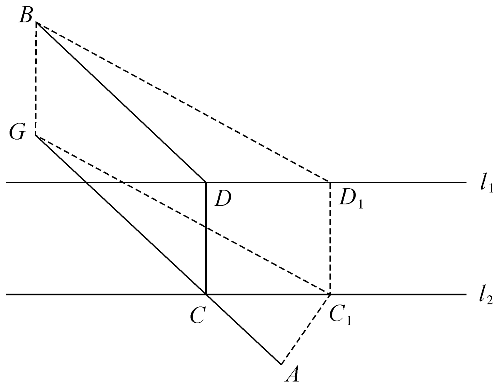


圖14−3

〔證明〕設橋架於 CD 處,D、C 兩點分別在橋的兩岸 l_1 和 l_2 上,則 $CD \perp l_1$, $CD \perp l_2$,且 $BDCG$ 為平行四邊形,$BD = GC$,$BG = DC$(長度為橋寬).

再設 D_1,C_1 兩點,分別在橋的兩岸 l_1 和 l_2 上,且 $C_1D_1 \perp l_1$, $C_1D_1 \perp l_2$, 今連結 C_1G,D_1B,則 BGC_1D_1 也為平行四邊形,$BD_1 = GC_1$,

連結 AC_1,則有

$BD_1 + D_1C_1 + C_1A = GC_1 + BG + C_1A = GC_1 + C_1A + BG$

$> GA + BG = GC + CA + BG = BD + CA + DC = DD + DC + CA.$

$\therefore$ 路線 $ACDB$ 比路線 AC_1D_1B 為短,

故路線 $ACDB$ 為所求. 也即 CD 是符合題意之架橋位置.

〔例 3〕(幾何變換之旋轉法) 已知 P 為正三角形 $\triangle ABC$ 內的一點,且 $PA = 3$,$PB = 4$,$PC = 5$,求三角形 $\triangle ABC$ 的邊長 X 之值.

〔解〕如圖 14 - 4 所示,把正三角形 $\triangle PAB$ 繞 B 旋轉到 $\triangle P_1CB$ 的位置,連 PP_1,

則 $\angle PBP_1 = 60°$,且 $P_1B = PB = 4$,

$\therefore \triangle PBP_1$ 為正三角形,

從而 $PP_1 = 4$, $\angle BPP_1 = 60°$,

而 $P_1C = PA = 3$, 且 $PC = 5$.

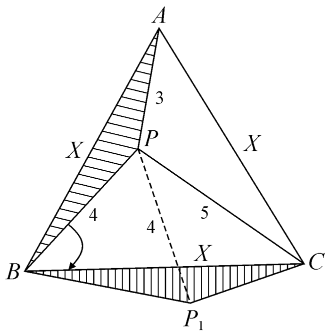


圖14−4

$\therefore \triangle PP_1C$ 為 $Rt\triangle$, $\angle BP_1C = \angle BP_1P + \angle PP_1C = 60° + 90° = 150°$.

$\therefore BC^2 = P_1B^2 + P_1C^2 - 2P_1B \times P_1C \times cos150° = 4^2 + 3^2 - 2 \times 4 \times 3 \times cos150° = 25 + 12\sqrt{3}$.

$\therefore BC = \sqrt{25 + 12\sqrt{3}}$, 即 $x = \sqrt{25 + 12\sqrt{3}}$.

〔例 4〕已知:如圖 14 - 5,邊長為 1 的正方形 $EFOH$ 繞着與它邊長相等的正方形 $ABCD$ 的對角線交點 O,旋轉任意角度,求圖中兩正方形重疊部分 $BQOR$ 的面積.

〔**解**〕今把正方形 $EFOH$ 繞正方形 $ABCD$ 的交角線交點 O. 旋轉至 $MNOP$ 的位置,則正方形 $EFOH$ 之邊 GH 合於正方形 $MNOP$ 的邊 OP 上,FO 合於正方形 $MNOP$ 的邊 ON 上.

由此,可知 $\triangle OBQ \cong \triangle OAR(A.A.S)$,

則 $S_{四邊形BQOR} = S_{\triangle ABO} = \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{4}$.

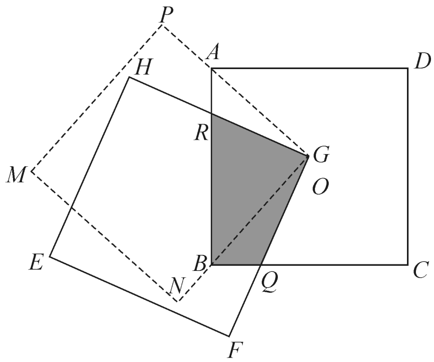


圖14−5

(十五)從“以退為求進破僵局”入手。

華羅庚教授曾告訴我們:“善於‘退’,足夠地‘退’,‘退’到最原始而不失去重要性的地方,是學好數學的一個訣竅.”又云:“先足夠地退到我們最容易看清楚的地方,認透了,鑽深了,然後再上去.”這就是**以退求進的解題思想.**

當我們在探求某些數學問題的解法時,碰到一些疑惑費解或難於入手的困難,不妨把複雜的問題退到較為簡單易解的地步,從中找出能反映問題本質屬性的東西,或獲得答案,或產生解題靈感,以達到認識上的飛躍,使原問題化難為易而獲解. 這種**“以退求進”**的思想是我們解證數學問題時的唯物辯證思想的一種體現.

“以退求進”探思路,**“解題步伐”**健而穩.

“以退求進”的解題目方法包括:

(一)從抽象退到具體;

(二)從一般退到特殊;

(三)從多元(項)退到少元(項);

(四)從高維退到低維;

(五)從整體退到局部等等。

〔**例**1〕若 n 為大於2的整數,則對任意直角三角形,a、b 為直角邊,c 為斜邊,則 $a^n + b^n < c^n$.

〔**證明**〕在直角三角形中,$c > a, c > b$,且 $a^2 + b^2 = c^2$;又 $n > 2$,

從而有 $c^{n-2} > a^{n-2}$, $c^{n-2} > b^{n-2}$,

$\therefore c^n = c^2 \cdot c^{n-2} = (a^2 + b^2) \cdot c^{n-2} = a^2 \cdot c^{n-2} + b^2 \cdot c^{n-2} > a^2 \cdot a^{n-2} + b^2 \cdot b^{n-2}$

$= a^n + b^n$.

故 $a^n + b^n < c^n$.

〔**例**2〕橢圓 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > 0, b > 0)$ 的切線交 x 軸於 A,交 y 軸於 B,則 $|AB|$ 的最小值為(　　).

(A) $2\sqrt{a^2 + b^2}$　　(B) $a + b$　　(C) $\sqrt{2ab}$　　(D) $4\sqrt{ab}$

〔**解**〕配方,得橢圓的標準方程

$$\frac{(x-m)^2}{5}+\frac{(y-2m)^2}{4}=1.$$

可知其中心軌跡為直線 $y=2x$,故與該直線平行的直線在這些橢圓上截得的線段都相等.

設所求的直線為 $y=2x+b$,依題設要求,橢圓系中的每一橢圓在直線 $y=2x+b$ 上截得的弦長都為$\frac{5\sqrt{5}}{3}$,不妨取其中的一個特殊位置的橢圓,其中心在原點(即 $m=0$),方程為 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$.

由$\begin{cases} y=2x+b \\ \frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1, \end{cases}$

消去 y,得

$24x^2+20bx+5b^2-20=0.$

$$\begin{aligned} \text{弦長 } d &= \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{5}\,|x_1-x_2| \\ &= \sqrt{5}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2} \\ &= \sqrt{5}\cdot\sqrt{\left(\frac{-20b}{24}\right)^2-4\times\frac{5b^2-20}{24}} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{6}\sqrt{120-5b^2}. \end{aligned}$$

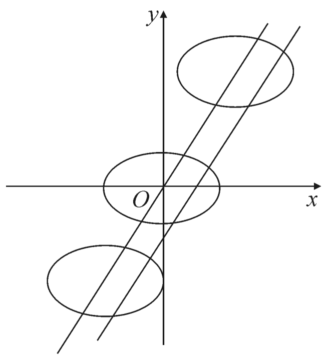


圖15-1

由$\frac{\sqrt{5}}{6}\sqrt{120-5b^2}=d=\frac{5\sqrt{5}}{3}$,

解得 $b=\pm 2$.

故所求直線方程為 $y=2x\pm 2$.

〔**註**〕這裏是將橢圓系中的圖形特殊化,在取特殊位置時既不失一般性,又便於計算.

〔**例** 3〕函數 $f(x)$ 的定義域關於原點對稱,且滿足以下條件:

① x_1,x_2 是 $f(x)$ 定義域中的數,且

$$f(x_1-x_2)=\frac{f(x_2)f(x_1)+1}{f(x_2)-f(x_1)}$$

② $f(a)=1\ (a>0)$;

③ 當 $0<x<2a$ 時,$f(x)>0$.

(1) 判定 $f(x)$ 的奇偶性;

(2) 判定 $f(x)$ 是否是周期函數,若是周期函數,求出周期 .

(1986 年上海市高中數學競賽試題).

〔**分析**〕由條件 ① 容易聯想到兩角差的餘切公式

$$ctg(\alpha-\beta)=\frac{ctg\alpha ctg\beta+1}{ctg\beta-ctg\alpha}$$

由 $ctg\frac{\pi}{4}=1$,猜想 $a=\frac{\pi}{4}$. 不難發現題設條件類似餘切函數的運算法則和性質,故可將題中的函數從抽象退到具體了,"退" 為 $f(x)=ctgx$,由此猜想此題中的結論.

(1) $f(x)$ 為奇函數,

(2) $y=ctgx$ 的週期為 $\pi=4\times\frac{\pi}{4}$,猜想 $f(x)$ 為週期函數,其期為 $4a$.

〔**證明**〕(1) 令 $x=x_1-x_2$,因為 $f(x)$ 的定義域關於原點對稱,所以 $-x=x_2-x_1$,也在其定義域內,且

$$f(-x)=f(x_2-x_1)=\frac{f(x_1)f(x_2)+1}{f(x_1)-f(x_2)}=-\frac{f(x_1)f(x_2)+1}{f(x_2)-f(x_1)}=-f(x_1-x_2)=-f(x).$$

故 $f(x)$ 為奇函數.

(2) $\because f(a)=1(a>0)$

$$\therefore f(x+a)=\frac{f(x)f(-a)+1}{f(-a)-f(x)}=\frac{-f(x)f(a)+1}{-f(a)-f(x)}=\frac{1-f(x)}{-1-f(x)}=\frac{f(x)-1}{f(x)+1}.$$

$$\therefore f(x+2a)=f[(x+a)+a]=\frac{f(x+a)-1}{f(x+a)+1}=\frac{\frac{f(x)-1}{f(x)+1}-1}{\frac{f(x)-1}{f(x)+1}+1}=\frac{-2}{2f(x)}=-\frac{1}{f(x)}.$$

$$f(x+4a)=f[(x+2a)+2a]=\frac{1}{f(x+2a)}=f(x).$$

$\therefore f(x)$ 為週期函數,且其週期為 $4a$.

〔**註**〕**在構造具體模型時一定要注意不要改變問題的實質性條件**.

在解題過程中,將抽象問題退到具體問題,僅有利於啟迪思維,找到抽象問題的具體模型. 但在具體解題過程中仍應就其抽象性進行嚴格論證.

關於用**"以退求進"** 的解題方法解題的其他典型例題,可參閱鄭志民、鄧海棠編著之**《薪火相傳育英才》**$P187$ 至 $P196$ 各相關例題.

參考資料:

[1] 鄭志民、鄧海棠編著:《薪火相傳育英才》,中國社會科學出版社,2017 年 12 月版。

[2] 成松柳編著:《觀察的方法》,湖南人民出版社,2002 年 3 月出版。

[3] 申建春編著:《發現的方法》,湖南出版社 2002 年 3 月版。

[4] 趙雄輝編著:《證明的方法》,湖南出版社 2002 年 3 月版。

澳門培正中學小學部數學教改的跟蹤研究

汪甄南　邵　敏

一. 概況

1. 學校

一八八九年,培正學校創辦於廣州,是中國第一所由華人基督徒開辦的新型學校。一九三八年一月,為逃避戰亂,學校由廣州遷澳,是澳門培正中學之始。培正於戰亂之中弦歌不輟,實有賴澳校的維持。戰後澳校設辦小學,於一九四七年重辦初中,一九五三年開辦高中,澳門培正中學遂成為一所完整的非牟利私立中學。一百三十年來,歷盡艱辛,校務日晉,不斷發展。

該校秉承「至善至正」的校訓,堅持「德智體群美靈,六育均衡發展」的教育目標,積極貫徹「提高教學質量,改善學習環境,保持嚴謹校風」的辦學方針。歷年蒙神的眷顧,政府的關懷,家長、校友以及社會人士的支持,全校師生的努力合作,校務迅速發展。

「十年樹木,百年樹人」,擁有近一百三十年歷史的培正中學,是一所兼具中國傳統嚴謹治學態度及西方自由開放探究精神的學校。澳門培正中學向來秉承「至善至正」的校訓,以培養培正人追求「至善至正」為辦學目標。以「提高教學質量,改善學習環境,保持嚴謹校風」為辦學方針,重視落實學生以德為先的教育理念。同時該校著重學生在德、智、體、群、美、靈六育之均衡發展,透過各項活動的開展,保障學生在各教育階段獲得多元、均衡且完整的學習經驗。期望培養有愛心、有責任感、有國際視野、有批判性思維、有競爭力、綜合素質良好的愛國愛澳青少年。

該校向來傳承優良傳統,植根過去,立足現在,放眼未來,發揮具時代特色的教育策略,確立學校可持續發展、與時並進的理念。面對瞬息萬變的社會變化,該校一直配合特區政府對教育的發展方向,按照提高品質、育人為本、促進公平的方針,肩負起培養優秀人才的社會責任,不斷完善硬件和軟件的教育項目,努力優化辦學條件,完善教師的專業素養,全面關顧學生的心智與健康需要,務求為學生提供適合個人身心發展的平臺,使其發揮所長,提升整體素質和競爭能力。該校為一條龍學校,歷年來得到政府、家長、校友以及社會人士對教學理念的支持和信任。在全校師生的努力合作下,校務迅速發展。

2. 班級,學生

該校包括幼稚園、小學及中學部,學制上,幼稚園實施三年制、小學六年制及初、高中各

三年制。2019 年度幼稚園三個年級,每個年級四個班,每班四十二位學生,共 504 位學生;小學六個年級,每個年級五個班,每個班四十餘位學生,共 1260 位學生;中學六個年級,初一初二各六個班,初三至高三每個年級五個班,共 1362 位學生,全校學生人數 3126 位。

3. 教師隊伍

教職員逾三百位,其中小學教師有一百位左右,小學數學教師從 2018 年度的 17 位增加到 2019 年度的 22 位,學校在小學數學教學改革上的人力資源投入也是有目共睹的。

二. 教改歷程

1. 簡述回歸前後的數學教學

近 500 年來,澳門是中西文化交流互補,多元文化共存的社會結晶。澳門已成為近代中西文化接觸最早、最多、最重要的地方。

澳門的教育從開埠到現在,都存在著"官校"(由政府所辦的學校)和"私校"(各類私人或社團性質的學校)之分,這為澳門不同階層的家長提供具有不同教育要求的選擇。1999 年之前,澳門尚未回歸祖國,學校教育是在葡萄牙政府的教育司管治之下,學校教育一般都是各自為政,從小學數學學科的教學情況來看,其教材一般都用香港或臺灣出版的教材,教學方法也極其傳統,一般都是以教師講解為主的注入式教學方式,存在更為突出的情況是沒有教研活動,老師之間各教各的書,各上各的課,學校之間或者本校同事之間基本沒有"觀課"活動,誰都不會主動讓其他老師來觀課或拒絕其他老師來聽自己上課。回歸之後,在教青局和學校領導的積極鼓勵之下,在國內同行和政府部門的大力支持之下,培正的老師走遍和訪問了國內的先進學校,學習了優秀的教學方法,大大地充實和提高了教師們的教學素養和數學功底。

『教育制度綱要法』是澳門政府歷史上在教育領域制訂的第一部綱領性文件,培正中學的小學數學教改,是在老師們積極學習文件精神,明確小學數學教育的指導思想是:"致力於培養有能力面向世界未來的各種人材,以迎接日趨緊密的全球聯繫所帶來的挑戰和機遇,全面提升其科學人文素養,使眞正具有創新精神,批判意識,可持續發展觀念及實踐能力……"結合培正小學老師和學生具有較強的活動能力和創新意識,在小學數學教改過程中,在學校領導的有力帶領下,向學生們提供了豐富多彩的校內和校外活動,使教改呈現出長足發展的勢頭,並在各項活動中取了優異的成績。

2. 學習"小學數學基本學力要求",拓展改革思路

澳門"小學數學基本學力要求"(以下簡稱"學力要求")是特區政府教育暨青年局在 2013 年向全澳門正式頒布的教學法規,它類似於內地的學科教學大綱,"學力要求"向老師們指明了小學數學教學的目標和方向。特別是在"基本理念"方面,提出了:"小學數學是一

門具備基礎性和實用性的科目,其課程內容應兼顧學科基礎和時代發展需要,通過"數與運算"、"圖形與空間"、"度量與應用"、"數據統計與概率"、"代數初步知識"五個範疇的學習,讓學生獲得所需的知識和技能,並能應用到日常生活中,在教學過程中,重視發展學生的思維能力、計算能力、空間想像能力,初步發展學生邏輯思維能力、歸納演繹能力,使學生懂得欣賞數學,建立學習數學的信心及積極向上的價值觀,為其終身學習奠定基礎。"

有了"學力要求"的提出,老師們對數學教學有了明確的目標,他們不僅僅落實好數學基礎知識的教學,同時認眞做好寓教育於教學之中,例如把教學與澳門的發展相結合,使小朋友們知道,長大了要為建設澳門好好學習。

3. 新思維數學教材的選用

澳門使用的是"多元化"辦學體制,在"尊重學校教學自主"的前提下,學校和老師們研究決定,要改變學生教材的使用,否則將會影響"基本學力要求"的落實,因為之前學生所用的數學教材一般都是由香港專家所編寫的,其內容基本是以香港社會背景為主選,以香港學生為對象,所以無論在教育、學情、環境、經濟、商貿都與澳門有一定的差異。

從 2015 年 9 月起,培正的老師們決定選用由澳門學者編寫的《新思維數學》教材,要確定改用新教材,對老師們來說困難很大,因為他們必須放下已教了多年的、甚為熟悉的舊教材,在工作十分繁忙的情況下,毫無怨言地再去研究新教材,這是一種多麼難能可貴的優秀的教育素養,教材的改變使他們邁出的步伐是艱辛的,但是培正的老師做到了,並且在教學效果上,取得了可喜的成果。

《新思維數學》教材的特色是:既適合澳門社會的生活特色,又完全符合特區政府所提出的"小學數學基本學力要求",其最大亮點是對學生極為重視"數學思維能力的培養",同時著眼於使學生學會運用數學的思維方法去分析問題和解決問題。

更重要的是,"新思維數學"教材重視對學生進行愛國主義教育,在六年級上學期施教"簡易測量"內容中,教材特別安排了五星紅旗的升旗情境,充分體現澳門是中華人民共和國不可分割的一部分,讓培正小朋友知道五星紅旗是我們的國旗。

4. 學先進,改教法,提興趣,助解難

澳門在回歸之後,在教育領域掀起了去內地學校或去香港,臺灣,新加坡等地的參觀交流活動,培正學校也積極努力地組織教師赴內地先進學校參觀交流,老師們不但看到了許多十分優秀的課例,同時也學到了不同流派的先進的教學理念和方法。

(1) 從"滿堂灌"到啟發式教學

"滿堂灌"是澳門教育史上存在歷史最久的一種教學模式,這是一種上課完全由教師講解的一種教學方式或者說老師在課堂上只是向學生講述灌輸,不會注意調動學生的思維和學習自覺性的一種教學方法,我們通常也稱之為"塡鴨式"教學方法。在這樣的學習環境下,學生只能被動地接受知識,它帶來的後果只會是嚴重影響學生融會貫通地掌握知識和

影響他們提高發現問題和分析問題、解決問題的能力。不少澳門老師很自信自己的講課能力,而且整堂課都會滔滔不絕地向學生灌輸。通過學習交流,不少培正老師學到了上課必須給學生多留時間,要給學生有思考的空間,把“課堂留給學生”和“以學生為主體”的教學理念,是老師們通過交流學習的最大收獲。

通過交流學習,老師們學到了“啟發式”教學,知道在教學過程中,應該從學生實際出發,採用多種方式,以啟發學生的思維能力,調動學生的學習積極性與主動性,從而能更好地完成學習任務。

(2)從“愉快教學”到“活動教學”

在應用啟發式教學取得了較好的教學效果之後,老師們又從香港、新加坡等地學習了更為貼近澳門學子的教學方法,因為澳門的學生他們活潑好動,不但有較強的活動能力,而且善於發問,善於探究。而“愉快教學”是“調動”學生內在的學習動力,變“要我學”為“我要學”,“教”與“學”是老師和學生的雙邊活動,所以“調”是教師的“教”起主導作用,而“學生內在的動力”是指“學生的學”是起“主體”作用。老師們掌握了“主導”和“主體”在教學過程中的眞正互動關係,正確發揮了“愉快教學”的有效作用。改變了“傳統教學”,使學生在發揮情感過程中,激發了他們的求知欲。

除了“愉快教學”,老師們也喜歡應用活動教學上課,大家知道,沒有愛就沒有教育,有了愛,才會有興趣;有了興趣,才會有動力;有了動力,才會促成飛躍。雖然“教無定法”,但在課堂教學上想達到理想效果,一般都會用遊戲形式來營造課堂情境。例如,老師們在教分數概念的時候都會用一個分蛋糕的活動,來吸引學生的興趣,有這樣一個愉悅、輕鬆、活潑的課堂氛圍,就能更好地調節師生情緒並迸發思維火花,“活動”能最大限度地激發學生潛能,圓滿地完成教學目的。所設計符合教學要求的各種活動是“活動教學”的基本要求。

(3)“嘗試教學”的真諦是什麼?

在2007年之後,培正老師第一次接觸到“嘗試教學法”,那時澳門尚未開始應用,但在國內已轟轟烈烈開展了“嘗試教學法”的推廣和研究活動,大家對這一全新的教學方法甚感興趣,後來有的老師在澳門大學教育學院學習時,聽到汪甄南老師在講課中積極推薦“嘗試教學法”,從而引起老師們的廣泛關注,並在教學實踐中加以研究。

嘗試教學法以“先練後講”的教學模式,可以說顛覆了幾個世紀以來澳門傳統的“先講後練”的教學模式,現在老師們最熟悉的一句教學用語是:“試嚇先(先試下)”,培正的老師也紛紛以新的教學方法去備課和設計教案,並以小組形式安排學生課堂座位,目前已普及全澳門的小學,“小組討論”從培正開始,目前已成為澳門小學數學課堂教學中的一大亮點,這是“嘗試教學法”在澳門普及最具特色的標誌之一。

(4)電子化教學新嘗試

小學數學“電子化”教學,是培正中學小學部在數學教改過程中另一大亮點。近年來,該校有序地進行課程改革,從2009年開始籌備進行新一輪的教學改革,引進了eclass平臺推動電子學習,在籌備過程中校領導們付出了很大的心力,首先要向全校家長進行宣傳講

解,希望能與家長有效溝通,得到家長的理解;然後需要向老師們介紹,同時進行培訓,讓老師們的課堂能更有效。到 2013 年小學數學老師們開始使用 powerlesson 進行課堂教學,培養學生自主學習能力。2014 年學校為了讓學生們能更好地利用小平板電腦(iPad)學習,開始在小學推行 BYOD(Bring Your Own Device),一人一機,更加提高了運用電子學習的效率,改善了在借機還機時間上的支出。

以下是近三年各年級使用電子學習次數的統計:

年級	2016－2017	2017－2018	2018－2019
小一	47	114	246
小二	109	248	438
小三	118	375	578
小四	153	406	668
小五	63	638	691
小六	59	278	576
總數	549	2059	3197

在各級使用電子學習次數統計中可以發現,使用電子學習的次數是每年在遞增,2017 年度比 2016 年度增加了約 2.8 倍,而 2018 年度比 2016 年度增加了約 4.8 倍,可見無論是學生還是老師都越來越樂於使用電子學習。而數學科 2018 年度使用電子學習的次數達到了 1075 次,約佔所有科目的 34%。

根據 2018 年度全級全年使用電子功能次數統計:課前預習的觀看短片功能 236 次,課前預習的自學簡報內容 79 次,翻轉頻道 114 次,教學內容(影片)176 次,教學內容(網頁)94 次,教學內容(簡報)316 次,討論(錄音)165 次,討論(錄影)52 次,討論(拍照)199 次,討論(文字)226 次,上載課文/練習 133 次,開放性問題 188 次,練習測驗 299 次,答題紙 57 次,$Q^2$91 次,power pad 功能 86 次,投票 110 次,評估工具 371 次,Apps 功能 66 次。可知評估工具使用最多,通過評估工具老師可以更快速地了解學生上課學習的成效;其次是教學內容(簡報)使用比較多,用簡報展示學習內容能讓學生更直觀了解學習內容;然後是練習測驗,在數學課堂上學習完成後都需要進行練習或小測驗,以便老師及時糾正學生的錯誤;課前預習使用相對也挺多的,因為在課堂之前做好預習工作能讓課堂效率得以提高。

5. 用電子化手段進行教學

在該校引入的電子學習平臺的 power lesson 中有影片,教學內容,網頁,討論,開放式問題,練習測驗,power pad,答案紙,翻轉頻道,Q2 等功能,老師們會在課前播放一些與教學內容有關的片段,還有一些小問題讓學生解答,這樣學生可以提前在家進行預習,上課時能心中有數,老師也能通過學生的回答提前了解學生預習的情況,提高學習效率;在課中會進行一些小探究,讓學生分組進行討論研究,開動腦子進入學習狀態,當學生把探究成果放上平

臺的時候,老師和其他同學都能進行及時評價,讓學生有被關注的幸福感;在課後老師會有一些延伸的內容,讓學生回家能繼續鞏固課堂所學。對於個別上課還沒完全明白的學生可以回家將課堂的學習程序再自己學習一遍,將知識學得更牢固,而老師們也能及時跟進學生課後的學習狀況。

在 2019 年 4 月 14 日,澳門培正中學小學數學邵敏老師應主辦單位(中國管理科學研究院培訓部,常州大學嘗試教育科學研究院,北京睿師育人教育科技研究院)的邀請參加了『全國首屆小學數學名師新時代課堂觀摩研討會暨著名教育家邱學華數學思想研討會』的示範課展示。課題為『圓的認識』。這堂課首先讓學生分成若干小組進行小組討論,互相幫助,發揮小組學習的優勢,將小平板電腦(iPad)巧妙運用到課堂中,讓學生學得輕鬆,玩得愉快,在課堂中讓學生選擇性地使用一些工具(食品盒,繩子,三角尺,直尺),運用小組合作的模式讓學生量度圓柱體底面直徑,讓學生人人都能動手試一試,動腦想一想,同時在學生不確定的時候,隨機把一段測量視頻借助 iPad 直觀地呈現出來,學生可以在自己的 iPad 上進行觀看。當學生受到啟發時,再讓學生運用錄音功能進行配音遊戲,可以多次嘗試在小組完成,然後再向全體同學展示,這個環節充分激發了孩子們的興趣,讓他們在思考中進行合作學習,而 iPad 的應用讓孩子們更大膽地表現自己。接著在下一個階段讓孩子們利用攝影功能進行量度過程的拍攝,為膽小的孩子們提供了一個敢於嘗試的機會,而孩子們也沒有讓老師失望,做影片的時候很認眞仔細投入。最後,在孩子們都掌握了度量方法後進行了一場大比拼,讓孩子們以小組為單位以全場為範圍找物件進行量度,這是個教育學生互相幫助,待人接物要有禮的好機會。於是這堂課在一片歡聲笑語中圓滿結束。

該校亦積極為學生創建平臺,透過區域合作、國際評估,以科學檢視方法來收集及分析大數據,開展適才教學及分層學習,為不同潛能的學生提供多元化課程。2018 年在小學數學教學中引進了編程的課程,2019 年在小學數學教學中又落實了 AI 課程,勇於創新,培養學生綜合能力,堅持育人為本。更積極落實個性化分層教學,因材施教。透過開展多元化的課程,發展具校本特色的小班教學,發掘學生潛能,從而提升學生整體素質並減少水平差異。

6. 參觀交流,學習展示

為促進學校與其他地區的教育互動,該校與以下學校簽訂了合作協議成為友好學校:(按筆劃排序)四川省綿陽南山中學,北海市第二實驗學校,江蘇南京金陵小學,江蘇常州武進區實驗小學,青島銀海教育集團,珠海市第一中學,深圳南山實驗教育集團,國家教育行政學院附屬實驗學校,葡萄牙里斯本市拉蘭熱拉斯區學校聯會,江蘇省常州高級中學,南通市通州區育才中學,清華大學附屬小學,William Jessup University, USA,Adcote School for Girls, UK,Myddelton College, UK,上海市光明中學,上海市建平中學西校,上海市浦東新區竹園小學,上海西南位育中學,廣東仲元中學,廣東廣雅中學,惠州市惠陽區實驗小學。

校方鼓勵教職員業餘進修,參加教學研討,又經常邀請專家學者來校為教師作專題講座;不少國內外教育團體蒞校參觀訪問,座談交流,均具有啟發和促進作用。

提高教師質素,建立與時代同步的教師隊伍,是保證教學質量重要的一環。學校多次組織老師們出外參觀交流,包括:北京,上海,南京,廣州,深圳,惠州,河南洛陽,香港,新加坡,日本等地。同時亦有許多國家地區的學校、團體前去該校參觀訪問,有廣州市加拿大國際教育機構,婦聯學校來訪(小三數學課展示),江蘇省通州育才中學,四川綿陽南山中學,日本名古屋大學,英國中學,Northwest Christian University, USA,University of Guelph, Canada ,臺北市立成淵高中,廣州培正,深圳南山實驗教育集團,江門市景賢中學來訪,“第十四屆亞太資優教育大會”專家考察團,德國 Jacbos University ,內地優秀教師,香港南丫北段公立小學,葡國科英布拉大學,聖保羅男女中學附屬小學,香港迦密聖道中學等。

三. 在落實基礎教學的同時積極開展競賽數學的培訓

1. 在學校領導的大力支持下,積極開辦奧林匹克數學訓練班

奧數包涵了發散思維、收斂思維、換元思維、反向思維、逆向思維、邏輯思維、空間思維、立體思維等等二十幾種思維方式,眾所週知,思維能力是一個孩子的智力的核心,如果一個孩子在小學階段,思維能力得到了充分的鍛鍊,就能夠快速有效、全面提高孩子的智商;學習奧數可以促進學生在校成績的全面提高,培養學生良好的四位習慣,使學生獲得心理上的優勢,培養自信,有利於學生智力的開發,數學是理科的基礎,學習奧數對於學生進入初中後的學習物理化學都非常有好處。學習奧數還能發展孩子的情商。奧數題基本上都是比書上的知識有所提高的內容,當孩子在做題的過程中遇到困難,想辦法戰勝它時,那種來自內心深處的喜悅是其他人無法體會的。在學習、比賽中,有失敗、有成功,讓孩子從小就明白:不經歷風雨怎能見彩虹的道理,總之,奧數讓孩子學會面對挫折、戰勝困難,學會永不言敗的精神,建立良好的自信。

對於奧林匹克數學的訓練,學校一直是不遺餘力的,學校為了讓對數學非常喜愛的學生能夠學到更多更廣的數學知識,培養他們更高的解決數學問題的能力,大力投入各種資源,開設奧數培訓班,開設數學進階班,組織學生參加世界各地和本地的數學賽事,給予學生更大更多的平臺去發揮自己的數學能力。

2. 家長的鼓勵和配合

該校學生們的家長對於學生參加數學競賽也是用他們的實際行動在支持。2018 年 11 月 23 日至 27 日在馬來西亞舉行的 2018MIMO 國際數學奧林匹克競賽就有十三位家長隨行,2019 年 4 月 14 日在深圳舉行的華夏杯決賽就有二十多位家長陪同前往,2019 年 7 月 16 日在日本福岡舉行的 WMI2019 總決賽也有二十多位家長一同前往。

由此可見本校家長們對學生教育的關心和對學校的支持。

3. 主要賽事獲獎記錄

(1)2017WMTC 世界數學團體錦標賽:金獎 2 位;銀獎 3 位;銅獎 3 位。

(2)2018WMI 世界數學邀請賽初賽:學校團體冠軍;金獎 10 位;銀獎 10 位;銅獎 25 位。

(3)2018 校際數學比賽:一等獎 5 位,二等獎 2 位。

(4)2018 小學數學精英大賽:一等獎 5 位;學校團體季軍。

(5)2018 港澳數學奧林匹克公開賽(澳門區):學校團體總冠軍;全場冠軍 2 位;金獎 14 位;銀獎 12 位;銅獎 7 位。

(6)2017 世界數學及解難評估 2018 精英邀請賽:金獎 2 位。

(7)2018 亞太小學數學奧林匹克:冠軍 1 位;金獎 3 位;銀獎 3 位;銅獎 4 位。

(8)2018 全港數學大激鬥:冠軍 3 位;亞軍 3 位;季軍 2 位;金獎 11 位;銀獎 5 位;

(9)2018 三維杯環亞太國際數學邀請賽:金獎 4 位;銀獎 6 位;銅獎 18 位。

(10)WMI 世界數學邀請賽 2018 韓國總決賽:金獎 2 位;銀獎 5 位;銅獎 2 位。

(11)2018AIMO 港澳盃總決賽:金獎 3 位;銀獎 1 位。

(12)2018MIMO 第五屆馬來西亞國際數學奧林匹克競賽:學校團體金獎;學校團體銀獎金獎 3 位;銀獎 10 位;銅獎 8 位。

(13)2019 華夏杯全國數學奧林匹克邀請賽初賽:一等獎 32 位;二等獎 73 位;銅獎 57 位。

(14)Eye Level 國際數學解難大賽 2018(澳門區):金獎 3 位;銀獎 4 位;銅獎 1 位。

(15)2019WMI 世界數學邀請賽:學校團體冠軍;金獎 15 位;銀獎 22 位;銅獎 41 位。

(16)2018WMTC 世界數學團體錦標賽:銀獎 5 位;銅獎 4 位。

(17)2019 亞太小學數學奧林匹克(澳門區):金獎 2 位;銀獎 2 位;銅獎 5 位。

(18)2019 數學大王初賽:冠軍 1 位;一等獎 15 位;二等獎 18 位;三等獎 26 位。

(19)2019 環亞太杯國際數學進階選拔賽:冠軍 4 位;特等獎 3 位;一等獎 6 位;二等獎 18 位;三等獎 23 位。

(20)2019 港澳數學奧林匹克公開賽(澳門區):學校團體總冠軍;冠軍 3 位;金獎 21 位:銀獎 8 位;銅獎 7 位。

(21)2019 學年學界數學比賽:一等獎 6 位。

(22)2019 數學思維大激鬥:學校團體冠軍;冠軍 5 位;亞軍 2 位;季軍 3 位;金獎 25 位;銀獎 18 位;銅獎 13 位。

4. 數學精英從競賽中成長

數學精英們不但在各大賽事中取得優異的成績,獲得了寶貴的經驗,從中學到了很多課堂上無法學到的知識和能力,更可貴的是在日常學習中能夠把在進階班課堂中所學的知識與其他同學分享,盡自己所能去幫助其他同學。這里特別要介紹一位在學校一系列數學競賽活動中成長起的周昊天同學,他在唸初二時就被選拔參加 ARML(全美高中數學比賽)澳門代表隊的成員,而且年年參加賽事,澳門代表隊也曾兩次在美國榮獲國際組冠軍,周昊天同學功不可沒。特區政府也曾兩次為澳門代表隊頒發榮譽獎狀。

5. 參賽足跡遍及國際社會

該校非常重視「第二課堂」活動的開展，校方每學年均舉辦多類型、常規性的校內活動及比賽，既提高了學生的學習興趣和運用知識的能力，培養了學生的責任感和自信心，又奠定了同學們參與各項校際或公開比賽的基礎。不少同學不但取得優異成績，奪得獎項，更獲選為澳門代表，參加埠際以至國際性比賽，2015 年有兩位同學獲選澳門代表參加在中國長春舉行的國際數學競賽；2016 年有十三位學生參加馬來西亞國際數學奧林匹克賽取得五金三銀一銅的好成績，並有四位同學獲選澳門代表參加在香港舉行的全港小學數學比賽 2016 全國邀請賽獲團體季軍；在 2018 年有四位小學同學獲選澳門代表參加在保加利亞舉行的國際數學競賽，同時獲選澳門代表參加在香港舉行的保良局小學數學世界邀請賽，並有兩位同學作為澳門代表參加在新加坡舉行的亞太小學數學奧林匹克競賽；在 2019 年也有四位小學同學獲選澳門代表參加在南非舉行的國際數學競賽，同時獲選澳門代表參加在香港舉行的保良局小學數學世界邀請賽，並有一位同學作為澳門代表參加在新加坡舉行的亞太小學數學奧林匹克競賽，為學校爭光，為澳門取得榮譽。

澳門數學教育研究學會

聯絡地址:澳門殷皇子大馬路 11 號群發花園第一座 14 樓 A
電話:853 - 28965253,853 - 66878553 傳真:853 - 28788259
E - mail: macaumath@ yahoo. com. hk , inwmacau@ yahoo. com. hk
Website:http://www. mathsmo. com/

會務活動紀錄

2002 年

6 月 17 日	在氹仔海島公證署辦理本會註冊手續。

2003 年

6 月 7 日	舉辦“中國數學教學的雙基原理—2002 年數學教育高級研討班”——會議精神傳達報告會。
12 月 13、14 日	舉行中小學“數學開放題教學”專題研討會及示範課。
12 月	《澳門數學教育》創刊號出版。

2004 年

4 月 17 日	舉辦“DM_Lab 和動態數學教學”講座。
9 月 30 日	赴杭州拜訪教育研究中心,訪問海寧市崇文實驗學校及杭州市南宛小學。
10 月 9、10 日	舉行“數學情景與提出問題教學”專題研討會及示範課。

2005 年

3 月 24 - 28 日	赴貴陽、興義市參觀和交流,訪問興義八中和延安路小學。
4 月 16 日	與教育出版社合辦“突破兒童數學思維空間”研討會及《新思維數學》教材展覽會。
11 月 26、27 日	舉行“全國小學特級數學男教師教學風采展示”專題研討會及示範課。
12 月 20 - 28 日	前往武漢訪問華中師範大學第一附屬中學、東方紅小學以及育才第二小學。

2006 年

3 月 4 日	舉辦“因材施教、拔尖保底——如何幫助數學差生學習”專題研討會。

4 月 14、15 日　赴廣東省河原市第二小學和河源市中學觀課。

6 月 25 – 29 日　前往山東濟南參觀濟南第十二中學和解放路第一小學。

12 月 9 – 10 日　舉行"國家數學教育高級研修班'數學教師教育'澳門會議"。

2007 年

4 月 28、29 日　與全國嘗試教學理論研究會合辦"兩岸四地小學數學課堂教學觀摩及說課比賽"。

7 月 4、5 日　與澳門大學教育學院合辦"有效的數學教學:一個國際視角"及"有效數學教學實務:美國的經驗"講座。

7 月 30 日至
8 月 3 日　訪問陝西省西安市吉祥路小學、西安市第一中學、西北工業大學附小。

9 月 1 日　舉辦"創造性數學的想法及方法運用"講座。

2008 年

11 月 1 日　舉辦"小學數學專家講座"。

11 月 22 日　舉辦"中學數學教育改革成功經驗介紹暨課堂教學展示"專題會議。

2009 年

5 月 29 日、30 日　前往美國參加第 34 屆美國高中數學競賽(ARML),榮獲國際組第一名。

8 月 15 日 ~20 日　訪問內蒙古包頭市鐵路二中。

11 月 14 日　舉辦"數學教學的有效性與開放性" 研討大會及示範課。

12 月 5 日、6 日　舉辦"第一屆澳門小學數學優質課堂教學" 評比大會。
(慶祝祖國成立 60 週年,澳門回歸 10 週年,本會成立 5 週年活動)

2010 年

6 月　成立"澳門數學奧林匹克學會",政府憲報刊登該會章程。

11 月 26 日、27 日　組織 18 名數學優秀學生前往北京參加首屆世界數學團體錦標賽。

1 月 18 日　華東師範大學聘請汪會長擔任華東師範大學國際數學奧林匹克研究中心澳門實驗培訓基地主任。

2011 年

1 月 28 日　「美國高中數學競賽」澳門區代表隊榮獲澳門特區政府頒授功績獎狀。

9 月 27 日、28 日　與澳門大學教育學院合辦"國際著名教育家蘇霍姆林斯基教育理念介紹會"。

2012 年

6 月 9 日　舉辦“如何激發學生數學創造力講座暨中學數學課堂教學展示”公開課。

8 月 1 – 6 日　赴吉林、延邊中、小學進行學術交流。

11 月 3 – 4 日　舉辦“全國小學數學四大教學流派課堂教學展示課”。

11 月 3 日晚上　舉行慶祝本會成立十週年晚宴,十週年成果展。

2013 年

4 月 6 日　舉辦亞太區小學奧數(澳門區)選拔賽。

4 月 14 日　進行中學第二十四屆、小學第十一屆“希望杯”澳門地區第二試決賽。

4 月 16 日　名譽會長陳明金先生宴請本會,表示對本澳數學教育的支持和鼓勵。

5 月 11 日　舉辦“幼兒教育理論講座與幼兒教學實踐示範課”。

6 月 1 日　赴新加坡參加 2013 亞太小學數學奧林匹克總決賽。

5 月 31、6 月 1 日　前往美國參加第 38 屆美國高中數學競賽(ARML),澳門隊第二。

6 月 15 – 19 日　舉辦數學實驗——統計與概率工作坊。

7 月 10 日　澳門基金會為 ARML 澳門隊凱旋而歸的健兒舉行慶功宴。

7 月 18 日　舉行希望杯、亞太區小學奧數(新加坡)、數學大王賽頒獎禮暨(ARML)美國高中數學競賽成果滙報會。

8 月 1 – 7 日　赴哈爾濱、鷄西中、小學進行學術交流。

11 月 16 – 17 日　與澳門大學教育學院合辦「嘗試教學理論研究華人論壇」和幼兒教育報告會。

12 月 7 – 9 日　舉辦「中學、小學數學奧林匹克教練員考級証書培訓班」。

12 月　《澳門數學教育》第十一期出版。

2014 年

1 月 11 日　舉行「幾何王」初中平面幾何學習軟件介紹會。

4 月 3 日　拜訪澳門基金會。

4 月 13 日　進行中學第二十五屆、小學第十二屆“希望杯”澳門地區第二試決賽。

4 月 15 日　拜訪澳門教育暨青年局。

4 月 17 日至 21 日　赴臺灣澎湖、高雄參訪活動。

4 月 26 日　舉辦“史豐收速算法”介紹會。

5 月 30 – 31 日　前往美國參加第 39 屆美國高中數學競賽(ARML),澳門隊第二。

6 月 14 日　舉行「領導數學科組工作經驗介紹會暨瀋陽七中教學展示課」活動。

7 月 11 日　舉行「幾何王」初中平面幾何學習軟件培訓班。

7 月 12 日	舉行希望杯、亞太區小學奧數(新加坡)、數學大王賽、環亞太杯國際數學賽、中小學數學奧林匹克教練員考級証書頒獎禮暨(ARML)美國高中數學競賽成果滙報會。
8 月 10 – 16 日	派學生前往四川西昌參加澳門基金會教科文中心航天團。
10 月 18 日	舉辦“熟能生巧數學觀點講座暨高中數學教學展示課”。
11 月 22 – 23、29 – 30 日	舉辦“史豐收速算法”導師培訓班。
12 月 6 日、7 日	舉辦“第五屆澳門小學數學優質課堂教學”評比大會暨全國協作區孔子杯小學數學課堂教學大賽(澳門賽區)。
12 月	《澳門數學教育》第十二期出版。

2015 年

1 月 16 日	拜訪澳門基金會。
1 月 31 日	舉行成立“史豐收速算法”培訓基地新聞發佈會。
4 月 12 日	進行中學第二十六屆、小學第十三屆“希望杯”澳門地區第二試決賽。
4 月 19 日	拜訪澳門教育暨青年局。
5 月 10 日	汪會長參加上海“小學數學教師教育高級研修班”。
5 月 23 日	舉行「任勇的數學教學主張」講座。
5 月 28 – 31 日	前往新加坡參加第 26 屆亞太區小學數學奧林匹克賽決賽。
5 月 29 – 30 日	前往美國參加第 40 屆美國高中數學競賽(ARML),澳門隊重獲冠軍。
6 月 13 日	舉行希望杯、亞太區小學奧數(新加坡)、數學大王賽、環亞太杯國際數學賽暨(ARML)美國高中數學競賽成果滙報會。
6 月 3 – 7 日	澳門大學教育學院與本會合辦“數學整數教育"專題研討會。
6 月 6 日	邀請意大利幾何學專家和捷克數學家教育專家舉行講座。
6 月 27 日	往港參加史豐收速算兩岸三地比賽。
7 月 11 日	與澳門大學教育學院、香港資優教育學會合辦「環亞太杯國際數學邀請賽總決賽」。
8 月	《兩岸三地升大數學教程》出版。
8 月 8 – 12 日	澳門隊赴桂林參加 WMI 世界數學邀請賽。
8 月 15 – 20 日	赴陝西省進行學術交流。
10 月 17 日	舉辦“幼兒教育報告會及幼兒史豐收速算法演示課”。
12 月 5 日、6 日	舉辦“第一屆小學新思維數學“澳門杯”課堂教學大賽評比大會”。
12 月 7 日	獲澳門特別行政區授予團隊功績獎狀。
12 月	《澳門數學教育》第十三期出版。

2016 年

1 月 17 日　　舉辦“兒童資優培育” 介紹會。
3 月 5 日　　舉辦“希望杯數學競賽試題分析”講座。
3 月 19 日　　合辦 “中、小學數學實驗和智力發展”專題講座。
5 月 26 – 29 日　前往新加坡參加第 27 屆亞太區小學數學奧林匹克賽決賽。
6 月 3 – 4 日　前往美國參加第 41 屆美國高中數學競賽（ARML），澳門隊獲亞軍。
6 月 18 日　　舉行希望杯、亞太區小學奧數（新加坡）、數學大王賽、環亞太杯國際數學賽暨（ARML）美國高中數學競賽成果滙報會。
10 月 22 日　　舉辦“雲南麗江市教育局講座暨中學示範課”。
11 月 19 日　　舉辦“四川省成都市成華小學示範課”。
11 月 25 – 29 日　前往馬來西亞參加 MIMO 馬來西亞國際奧數競賽。
12 月 10 – 11 日　舉辦第二屆小學“新思維數學”澳門杯課堂教學比賽。
12 月　　《澳門數學教育》第十四期出版。

2017 年

3 月 11 日　　慶祝十五周年會慶暨春茗聚餐。
5 月 25 – 28 日　前往新加坡參加第 28 屆亞太區小學數學奧林匹克賽決賽。
6 月 2 – 3 日　前往美國參加第 42 屆美國高中數學競賽（ARML）。
6 月 17 日　　希望杯、亞太區小學奧數（新加坡）、數學大王賽、環亞太杯國際數學賽暨（ARML）美國高中數學競賽成果滙報會。
7 月 8 – 9 日　舉行首辦「首屆奧林匹克數學三維杯環亞太國際邀請賽賽（2017）」。
9 月 12 日　　拜訪譚俊榮司長。
11 月 4 日　　舉辦“海峽兩岸小學數學課堂教學交流展示”。
12 月 9 日、10 日　舉辦第三屆小學“新思維數學”澳門杯課堂教學比賽。
12 月　　《澳門數學教育》第十五期出版。

2018 年

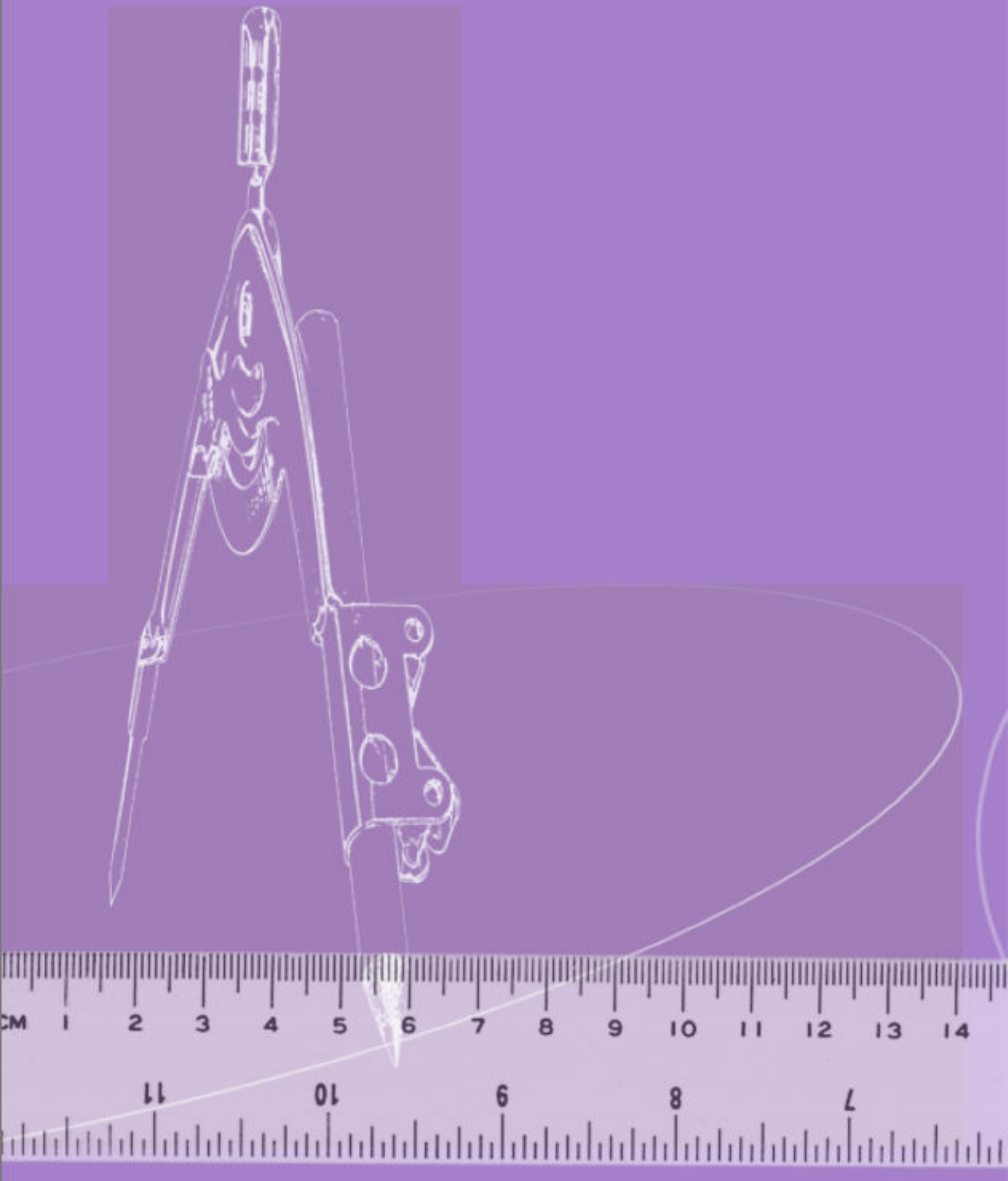
1 月 28 日　　前往中山拜訪華星幼稚園。
4 月 28 日　　舉辦「世界七大數學死題破解演講會」。
5 月 24 – 29 日　前往新加坡參加第 29 屆亞太區小學數學奧林匹克賽決賽。
6 月 1 – 2 日　前往美國參加第 43 屆美國高中數學競賽（ARML）。
6 月 30 日 –
7 月 2 日　　合辦 2018 三維杯環亞太國際數學邀請賽（香港舉行）。
7 月 7 日　　希望杯、數學大王國際邀請賽、環亞太杯國際數學賽暨（ARML）美國高中數學競賽成果滙報會。

5 月 25 – 28 日　前往新加坡參加第 28 屆亞太區小學數學奧林匹克賽決賽。
6 月　為香港名創教育(文達出版社)編輯的澳門基力數學探知 1A 和 1B 出版。
6 月 16 – 17 日　前往深圳出席 2018 全國史豐收數學速算法大獎賽。
10 月 13 日　舉辦「使用漫畫進行數學教學 — 來自新加坡的經驗」講座。
11 月 10 日　舉辦「世界數學難題一尺解第二次講座」。
11 月 23 – 27 日　前往馬來西亞力行華小學參加第 5 屆 馬來西亞國際數學奧林匹克競賽。
12 月 8 – 9 日　第二十八屆「滙業盃中學生常識問答比賽」數學命題,為協辦單位。
12 月 15 日、16 日　舉辦常港澳小學「新思維數學」課堂教學邀請賽。
12 月　《澳門數學教育》第十六期出版。

2019 年

6 月 1 日　前往新加坡參加第 30 屆亞太區小學數學奧林匹克賽決賽,邵敏老師帶領葉豪翔同學(培正)和許睿翔同學(濠江小學),葉豪翔同學獲榮譽獎,爲澳門學界爭光。
5 月 30 日 –
6 月 8 日　組織本澳 19 名數學優秀學生前往美國拉斯維加斯內華達大學拉斯維加斯校區(UNLV)參加第 44 屆美國高中數學競賽(ARML),澳門隊領隊、教練、施振雄、金鑫,導師賀彩珍、劉淑華、吳琍玲,隊員包括 (濠江)高偉盛、袁浩軒、容逸朗、李俊傑、鄭嘉茵、黃月祺、(鏡平)楊昊、鄧穎瑤、羅俊熙、袁中原、劉子鵬、(勞校)余文焯、何啟成、孔繁銘、(培道)廖汶鋒、葉穎超。比賽完畢後,遊覽 apple 總部和舊金山等景點。澳門隊於國際排名榜排名第四。
7 月 5 – 8 日　主辦 2019 金蓮花杯國際數學邀請賽,共 418 名中小學生參加。
澳門學校成績:
培正中學在小一團體賽獲冠、亞和季軍、小二團體賽獲冠軍和亞軍、小三團體賽獲冠軍、小五團體賽獲冠軍和季軍、小六團體賽獲亞軍和季軍、初一團體賽獲冠軍、高中團體賽獲亞軍。
濠江中學附屬小學在小六團體賽獲冠軍、獲全場小學冠軍獎杯。
濠江中學在初一團體賽獲亞軍、初二團體賽獲冠軍、初三團體賽獲冠軍、高中團體賽獲冠軍、獲全場中學冠軍獎杯。
濠江英才學校在初一團體賽獲季軍、初二團體賽獲亞軍、初三團體賽獲亞和季軍、高三團體賽獲季軍。
勞校在初二團體賽獲季軍。

7 月 7 日	於萬豪軒酒樓舉行金蓮花杯國際數學邀請賽、數學大王國際邀請賽、環亞太杯國際數學賽暨(ARML)美國高中數學競賽成果滙報會。
6 月	為香港名創教育(文達出版社)編輯的澳門基力數學探知 2A 和 2B 出版。
11 月 22－25 日	汪甄南和劉淑華老師帶領 69 位培正小學生和家長前往馬來西亞力行華小學參加第 6 屆 馬來西亞國際數學奧林匹克競賽。
12 月 6－7 日	鄧海棠博士為第二十八屆「滙業盃中學生常識問答比賽」數學命題,本會為協辦單位。
11 月 30 日、 12 月 1 日	於濠江中學附屬小學禮堂舉辦「慶回歸－－海峽兩岸小學新思維數學課堂教學大賽」。 進入決賽老師: 濠江中學附屬小學郭倩瑩老師,課題:小五〈長方體和正方體的認識〉 化地瑪聖母女子學校洪麗老師,課題:小三〈 位置與方向〉 天津徐長青老師,課題:小三〈重疊問題〉 四川李志軍老師,課題:小四〈一般應用題的遊戲〉 臺灣黃慧琳老師,課題:小四〈打開潘朵拉的盒子(正方體解密)〉 評委:方運加教授(首都師範大學數學系)、邱學華院長(常州大學嘗試教育科學研究院)、廖本煌副校長(臺灣高雄師大)、葛蘊春校長(常州市花園小學)、胡月媚(澳門數學教育研究學會理事)。 評選結果: 一等獎:黃慧琳老師、郭倩瑩老師、洪麗老師 優秀教案獎:(英才)湯倩盈老師、(德明)梁麗容老師、(明愛)羅俊彥老師、蔣雅濤老師、許錦超老師、林麗燕老師。
12 月	《澳門數學教育》第十七期出版。


CM 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14