第十五期 No.15
ISSN 1814-2176

Educação Matemática de Macau

澳門数学教育

——张奠宙 题

Mathematics Education in Macau

澳門數學教育研究學會

ISSN 1814-2176
9 771814 217007

澳門數學教育研究學會出版
2017年12月

拜訪特區政府社會文化司
（2017 年 9 月 12 日）

社會文化司譚俊榮司長與本會領導合照

現任全體理監事會骨幹成員合照

幹事們慶祝會慶、同賀汪會長生日

澳門數學教育（第十五期） 2017 年 12 月

目　　錄

澳門教育暨青年局
澳　門　基　金　會　贊助

澳門數學教育研究學會出版
澳門新聞局編號：2877
地址：澳門南灣街 107 號
刊頭題詞：張奠宙教授
排版：廣源紙業文具行
印刷：文寶印務有限公司
刊號：ISSN 1814－2176

親和的接見,殷切的希望

——譚司長晤數研會交流人才培育

澳門數學教育研究學會　鄧海棠

社會文化司司長譚俊榮於九月十二日接見澳門數學教育研究學會一行,會面期間,雙方討論澳門數學教育的未來發展,坦誠交換意見.譚司長肯定該會過去工作,並表示支持澳門數學實驗室項目,期望短期內能合作開展相關籌備工作.

譚俊榮與數學教育研究學會負責人合照

譚司長接見數學會會長和理事

譚司長親切的講話

提昇師生數學水平

會長汪甄南及副會長李寶田回顧十五年工作成果,采取“走出去,請進來”的策略,帶領本澳數學教師走出澳門,探訪及學習各地的先進教育理念和課堂教育教學技巧;同時也邀

請到中國、德國及俄羅斯等地方的數學教育專家對廣大的數學教師進行講座、研討會、工作坊等活動，提昇本澳數學教師的教學水平；學會舉行**“數學優質課堂教學大賽”**和**“優質數學課堂教案評比”**，給各校教師展現示範性的優質課例和教案；爲教青局的年度**“教學設計獎勵計劃”**擔任評委，提供專業性、學術性的評鑒. 秘書長鄧海棠及理事施振雄匯報了該會組織、選拔、培訓本澳學生參與**“全美高中數學競賽國際賽(ARML)”**情況，並在國際數學舞臺上榮獲兩次國際組總分第一名，爲澳門贏得崇高的國際數學榮譽. 副理事長劉明藝、財務金鑫介紹了推動數學實驗室的工作，並將加入 STEM 系統元素. 理事林鬆孝、伍劍佐補充了數學實驗室的理念及目標.

支持建數學實驗室

譚司長表示，特區政府不斷創造條件讓學生接受良好的教育，並將精準培養資優學生. 他讚揚研究學會過去十五年的出色表現，特區政府十分重視數學教育，支持建立數學實驗室，推動澳門中小學生拓寬學習領域，培養他們的思維能力和實踐能力，令學生透過數學實驗室**“動手實踐、自主探索與合作交流”**，激發學生學習興趣和潛能. 在會務發展上，司長鼓勵學會持續舉辦數學活動及參與國際比賽，爲本澳數學教師及學生提供更好的學習訓練及比賽機會，特區政府會繼續支持，共同促進本澳數學教育的良好發展.

參與會見的人員包括社會文化司司長辦公室顧問惠程勇、林曉白等.

首屆奧林匹克數學“三維杯”環亞太國際邀請賽啟事錄

澳門數學教育研究學會　鄧海棠

首屆奧林匹克數學“三維杯” 環亞太國際邀請賽(2017) 即 *OLYMPICS MATHEMATIC 3D CUP PAN – ASIA PACIFIC INTERNATIONAL INVITATION COMPETETION* 2017?(*3D CUP PAP* 2017) 於2017 年7 月7 日至10 日在澳門濠江中學順利進行,圓滿落幕,完美收官.

奧林匹克數學“三維杯” 環亞太國際邀請賽是澳門數學教育研究學會聯同香港資優教育學會和馬來西亞數學奧林匹克學研中心發起並成立的一項賽事. 圖標中心的 M,H,M 字樣分別是澳門 *Macau*、香港 *Hong Kong*、馬來西亞 *Malaysia* 這三個創始成員的英文名稱中的第一個字母. 外圍的三段弧線意指“三維”,即是數學學術的競賽交流是無分國界地域、無分男女性別、無分時空界限的知識融匯和促進.

這是一項每年舉辦之國際數學比賽,有中國大陸、澳門、香港、臺灣、馬來西亞、越南、印尼、澳洲等國家及地區的中小學生參加競賽活動,目的是讓數學教育工作者、老師和學生進行經驗分享與交流,建立跨國友誼,促進世界和平. 今年是首屆舉行,由澳門數學教育研究學會主持主辦,明年將移師香港進行第二屆賽事.

奧林匹克數學“三維杯” 環亞太國際邀請賽是一項甚具國際影響力的數學比賽,有近 20 個國家和地區參與了本次的首屆比賽,包括來自中國兩岸四地的澳門、香港、上海、廣東深圳、四川成都、四川綿陽、臺灣高雄等地以及越南、菲律賓、馬來西亞、印度尼西亞等亞太區國家.

這是澳門有史以來規模最大、參與地區與人數最多、由澳門數學教育研究學會主持並一力承擔從出卷、改卷、評獎和組織報名、安排食宿、籌劃參訪、交通接送等全部環節的第一次本土國際奧林匹克數學邀請賽. 是次賽事,爲數學教育工作者、教師、家長、學生之間提供了進行難得的經驗分享與交流的寶貴機會,深得參

加賽事的諸多人士的認可和較高評價.

是次比賽活動按年級分爲初小、中小、高小、初中、高中共五大組,每個級別分爲個人賽和團體賽兩個類別. 個人賽采取塡空題的形式,分爲三個部分,分別爲 6 題(每題 5 分);7 題(每題6分);4 題(每題7 分)共17 題,時長爲70 分鐘,滿分爲 100 分. 團體賽則要把過程及正確答案塡在試題紙上,共10題,每題10分,時長爲70分鐘,滿分爲100分. 每個參賽的學生可以選用繁體中文、簡體中文或者是英文進行題目解答,每份題目卷也都配備了上述三種文字的題目. 所有題目不超出相關的中小學數學課程範圍的適當延伸,一般包括代數、幾何、數論和組合數學四大類.

沿用國際奧林匹克數學競賽獎項設置規則,個人賽設一等獎(金牌)、二等獎(銀牌)、三等獎(銅牌)共三個層次,團體賽設冠軍、亞軍、季軍共三組級別,比例都是大致爲 1:2:3;獲獎者總數不能超過參賽學生的半數,當然,**獲獎的標準也參考競賽的成績及試題的深淺難易情況**. 它不僅可以提昇學生學習數學的興趣,發揮他們的數學潛能,同時也能提昇學生的邏輯推理能力及解決數學問題的能力,培養其團隊合作精神.

個人賽方面,**上海的劉昱辰**同學獲得初小組冠軍;**四川綿陽的陳奕文**同學奪得中小組冠軍;**成都的程浩**同學勇奪高小組冠軍;**澳門濠江中學的高偉盛**同學喜得初中組冠軍;**澳門培道中學的廖汶鋒**同學榮獲高中組冠軍.

團體賽的冠軍有:**初小組是香港隊;中小組是四川綿陽隊;高小組是澳門培正中學隊;初中組是澳門濠江中學隊;高中組是澳門菜農中學隊**.

參與頒獎的嘉賓們有教育暨青年局陸榮輝先生;濠江中學的尤端陽校長、周明助理校長,浸信中學李焯堅校長,菜農子弟學校許錫添副校長,澳門大學江春蓮教授,香港資優教育學會鄭會長,文達名創出版社溫經理等人士.

事情到了這裏也就完結了,但是深入想想,似乎意猶未盡,覺得總有些什麼要說說.

國際奧林匹克數學競賽創辦於 1959 年,有**"數學世界盃"**之稱,每年舉辦一次,由參賽國輪流主辦. 目的是爲了發現並鼓勵世界上具有數學天份的青少年,爲各國進行科學教育交流創造條件,增進各國參賽師生間的友好關係. 國際奧林匹克數學競賽是國際科學奧林匹克歷史最長的賽事,是國際中學生數學大賽,在世界上影響非常之大.

中國四川省成都市成華區人民政府網站上的公開信息:"我區雙林小學、成華實驗小學、雙慶小學、列五書池小學以及華林小學的11 名同學組隊參加了 2017 奧林匹克數學三維杯環亞太國際邀請賽. 在這次比賽中,雖然同學們來自不同的學校,但此刻卻凝聚成了一股力量,有了共同的目標 —— 爲成都成華區而戰. 個人比賽中,賽出自己的風采,團隊比賽中,精誠合作,攻克一個個難題,在面對各國各地區選手時(中國澳門特別行政區、中國香港特別行政區、菲律賓、馬來西亞、印尼等等),同學們自信、從容、鬥智鬥勇,取得了不俗的成績.

隨著此次活動的圓滿結束,孩子們收穫的不僅僅是獎牌. 在比賽的過程中更是結交了國內外的好友,學習怎樣用不同的思維和語言去交流. 孩子們嘗試分工協作共同面對困難,培養了團隊意識. 也遊覽了澳門、香港,飽覽了祖國美景,眞正做到了在玩中學,在學中玩. ”

由此可見,**奧林匹克數學“三維杯” 環亞太國際邀請賽**完全達成了國際奧林匹克數學競賽的目的,即是**“為了發現並鼓勵世界上具有數學天份的青少年,為各國進行科學教育交流創造條件,增進各國師生間的友好關係. ”**

這次賽事,體現了從**“澳門數學走向國際”** 到**“國際數學走向澳門”** 的轉變. 以前,大家總是想方設法、刻苦訓練,爲的是能夠走出澳門到其他國家和地區參加各種各樣的數學賽事. 如今,伴隨澳門數學教育研究學會在國際數學界知名度的不斷提昇,培訓競賽水平的日益強大,承辦國際賽事能力的完善,將會有更多的國際數學賽事走向澳門. 這是澳門特區的國際盛譽,是澳門市民的國際盛譽.

從此,這將有機會成爲一種數學競賽的新常態:澳門的學生不用再舟車勞苦、千裏迢迢、萬裏跋涉到海外去客場作戰,面對時差逆轉、晝夜顛倒、水土不服、天氣極差等等不利自然環境的影響,而是主場作戰,盡享天時地利人和之便利,繼續爲澳門特區爭取更大、更多的榮譽. 同時,特區政府和市民也能一盡地主之誼,把歷史文化遺產的東西方文化、美食等等展現給來自各個國家和地區的國際數學比賽的參賽者.

易數組研究初步

李祥立

（引子:2017 年 1 月 2 日至 4 日全國初等數學研究會第十屆學術研討會於廣州舉行. 在全國參加評比論文共 302 篇中, 抽作兩篇分別名列第一和第十一, 同獲一等獎. 下列爲經修訂而成的其中一篇.）

《周易》是我國古代群經之首,其所述之八卦及由此衍生出之六十四卦,相傳爲伏羲從河圖和洛書中得到靈感所創. 其相關占卜法之部份內容如朱熹《周易本義》所述:“次以右手四揲左手之策…次歸其所餘之策,或一、或二、或三、或四而扐之左手無名指間. ”又王夫之《周易內傳・繫辭上傳》:”過揲,審七八九六之變. ”簡言之,六十四卦中之每一卦有 6 爻,每一爻都是經 1,2,3,4 而得出 6,7,8,9 這四個數字之一以決定之,因此這八個數字之拚合蘊涵着無窮變化. 又由此可見數字 4(四揲) 和數字 5(抽離) 深具獨特性.

我們的祖先據此發現數組 592,576,534,518 與數組 594,572,538,516 有下列關係[1]:

$592^n + 576^n + 534^n + 518^n = 594^n + 572^n + 538^n + 516^n (n = 1,2,3)$

更令人驚嘆者,他們又發現下列一對數組亦有相同的和、相同的平方和,及有相同的立方和[1]:

$$92134768,84213976,71342689,63421897$$

$$93124867,81243679,74312986,62431798$$

即使在今天,以我們手邊之計算器或家用電腦都會因超位而難以處理這麼大的數字,何況在遠古年代?他們是如何發現的呢?筆者做了一些初步的研究如下文所示,文中所述河圖、洛書之圖像,在古籍或互聯網上甚易覓得,筆者不贅列.

定義 1:一對數組(每組 4 個非零整數) 若有相同的和、相同的平方和,又有相同的立方和,稱此一對數組成一對易數組(簡稱易數組).

爲方便闡述,我們常會用數列方法處理. 若數列 a_1,a_2,a_3,a_4 與數列 b_1,b_2,b_3,b_4 有 $\sum_{k=1}^{4} a_k = \sum_{k=1}^{4} b_k$ 且 $\sum_{k=1}^{4} a_k^2 = \sum_{k=1}^{4} b_k^2$ 且 $\sum_{k=1}^{4} a_k^3 = \sum_{k=1}^{4} b_k^3$ 之關係,則成一對易數組,記爲 $\{a_k;b_k\}$ $(k = 1,2,3,4)$,有時簡記爲 $\{a;b\}$,其中 a 表數列 a_1,a_2,a_3,a_4 或其第 k 項 a_k,餘類推. 留意:$\{a;b\} = \{b;a\}$.

從洛書之圖象得九宮圖如下列圖 1 左方之圖,將數字 5 抽離,並將之圓化後,得圖 1 右方

之圖(稱爲洛書圓化圖).

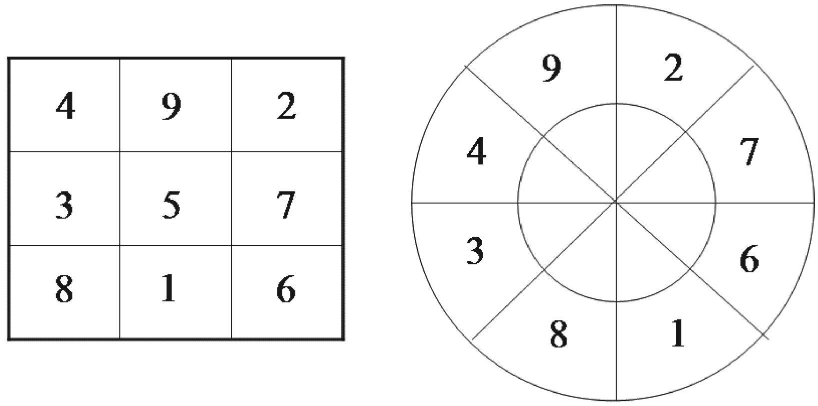


圖1

下面是利用洛書圓化圖找出若干對易數組.

(一) 左一右一

(a) 取十位數字爲奇數

構造不含數字 5 之兩位數(要各位數字不同),若由最大奇數 9 開始(也可由最小奇數 1 開始),觀察其在洛書圓化圖中左邊和右邊相鄰的數字 2,4,取爲個位數字,拼成 92,94,得一對數組的第一對相應數. 9 之相鄰奇數是 7,依同樣法則得第二對相應數 76,72. 依同理,分別得第三、第四對相應數字 34,38 和 18,16. 於是得一對數組如下:

92,76,34,18

94,72,38,16

經驗證可知其亦成一對易數組.

(b) 取十位數字爲偶數

由最大偶數 8 開始(也可由最小偶數 2 開始),依同法可得

83,61,49,27

81,67,43,29

經驗證可知其亦成一對易數組.

(二) 左二右二(方法類似,從略)

(三) 左三右三(方法類似,從略)

綜合共得 6 對易數組,列表如下:

左一右一	左二右二	左三右三
92,76,34,18 94,72,38,16	97,71,39,13 93,79,31,17	96,78,32,14 98,74,36,12
83,61,49,27 81,67,43,29	84,68,42,26 86,62,48,24	89,63,47,21 87,69,41,23

另一方面,還有以其他方式得到之易數組,例如(用後面所述之河洛圖法:轉半圈):

92,84,71,63

93,81,74,62

下面表1列出10對易數組(最上6對是用前述洛書圓化圖推出者).

表1. 兩位數易數組的例子

92,76,34,18 94,72,38,16	83,49,61,27 81,43,67,29
97,71,39,13 93,79,31,17	84,68,42,26 86,62,48,24
98,74,36,12 96,78,32,14	87,41,69,23 89,47,63,21
92,84,71,63 93,81,74,62	47,39,26,18 48,36,29,17
97,89,76,68 98,86,79,67	42,34,21,13 43,31,24,12

定理1:$\{a_k;b_k\}\Rightarrow\{c+da_k;c+db_k\}$,其中 c,d 爲常數(c,d 是整數).

證明:$\{a_k;b_k\}$ 即 $\sum_{k=1}^{4}a_k=\sum_{k=1}^{4}b_k$, $\sum_{k=1}^{4}a_k^2=\sum_{k=1}^{4}b_k^2$, $\sum_{k=1}^{4}a_k^3=\sum_{k=1}^{4}b_k^3$,

則 $\sum_{k=1}^{4}(c+da_k)=4c+d\sum_{k=1}^{4}a_k=4c+d\sum_{k=1}^{4}b_k=\sum_{k=1}^{4}(c+db_k)$,

$\sum_{k=1}^{4}(c+da_k)^2=4c^2+2cd\sum_{k=1}^{4}a_k+d^2\sum_{k=1}^{4}a_k^2=4c^2+2cd\sum_{k=1}^{4}b_k+d^2\sum_{k=1}^{4}b_k^2=\sum_{k=1}^{4}(c+db_k)^2$,

$\sum_{k=1}^{4}(c+da_k)^3=4c^3+3c^2d\sum_{k=1}^{4}a_k+3cd^2\sum_{k=1}^{4}a_k^2+d^3\sum_{k=1}^{4}a_k^3=4c^3+3c^2d\sum_{k=1}^{4}b_k+3cd^2\sum_{k=1}^{4}b_k^2$ $+d^3\sum_{k=1}^{4}b_k^3=\sum_{k=1}^{4}(c+db_k)^3$,

由此得 $\{c+da_k;c+db_k\}$.

設 a_k 是一個 n 位數(各位數字都非0),若對其每一位數字取補(換以其與10之差)後,所得之數爲 $c-a_k$,則 $c=\frac{10^{n+1}-1}{9}-1$. 例如:將83之各位數字取補後,所得之數爲27(=100−83).

定理2:$\{a_k;b_k\}\Rightarrow\{c-a_k;c-b_k\}$,其中 a_k 是一個 n 位數(各位數字都非0),$c=\frac{10^{n-1}-1}{9}-1$.(即將一對易數組之各位數字取補後,仍爲一對易數組)

證明:由定理1,取 $c=\frac{10^{n-1}-1}{9}-1$,$d=-1$ 即得.

例 1：將易數組（表 1 中的一對）

92，84，71，63

93，81，74，62

之各位數字取補後（即由定理 2），得易數組

18，26，39，47

17，29，36，48

例 2：將易數組

92，84，71，63

93，81，74，62

之各數加 500，得數組

592，584，571，563

593，581，574，562

由定理 1（$c = 500, d = 1$）知其亦成一對易數組.

例 3：將易數組

92，84，71，63

93，81，74，62

之各數乘以 10 後再加 5，得數組

925，845，715，635

935，815，745，625

由定理 1 知其亦成一對易數組.

以下研究如何將兩對 n 位數之易數組接合成一對 $2n$ 位數之易數組. 兩組數的接合，最方便是第一項接合第一項，第二項接合第二項，餘類推，這樣，就與各數在其所屬組中之排列順序有關，須將每一組數嚴格視同數列處理.

以 a 表數列 a_1, a_2, a_3, a_4，餘類推，並設諸數列中各數都是 n 位數，以 $10^n a + c$ 表數列 $10^n a_1 + c_1, 10^n a_2 + c_2, 10^n a_3 + c_3, 10^n a_4 + c_4$，$\sum a$ 表 $\sum_{k=1}^{4} a_k$，$\sum (10^n a + c)$ 表 $\sum_{k=1}^{4} (10^n a_k + c_k)$，餘類推，因

$\sum (10^n a + c)^2 = 10^{2n} \sum a^2 + \sum c^2 + 2 \cdot 10^n \sum ac$

$\sum (10^n a + c)^3 = 10^{3n} \sum a^3 + \sum c^2 + 3 \cdot 10^{2n} \sum a^2 c + 3 \cdot 10^n \sum ac^2$，容易得知下列定理成立：

定理 3：$\{a;b\}, \{c;d\}, \sum ac = \sum bd, \sum a^2 c = \sum b^2 d, \sum ac^2 = \sum bd^2 \Rightarrow \{10^n a + c; 10^n b + d\}$

將 $\{a;b\}, \{c;d\}$ 依 $10^n a + c$ 和 $10^n b + d$ 之方式接合後，所得各數若數位太多，不便驗證（例如，手邊之計算器因超位不能處理）時，定理 3 提供一個降低位數計算之驗證法，但定理 3 所述之條件只是充分條件，不是必要條件.

定義 2:符合定理 3 之條件的接合稱爲完美接合.

例 4:設$\{A;B\}$表兩位數易數組

$$92,84,71,63$$
$$93,81,74,62$$

則$\{A;B\}$乃一位數易數組$\{a;b\}$:

$$9,8,7,6$$
$$9,8,7,6$$

與一位數易數組$\{c;d\}$:

$$2,4,1,3$$
$$3,1,4,2$$

依 $10a+c$ 和 $10b+d$ 之方式接合而成. 容易驗證得此爲完美接合(可用 *Excel* 驗證).

留意:表 1 之每一對易數組都是某兩對一位數易數組依完美接合所得者. 前述利用洛書圓化圖的方法可幫助我們找到一些完美接合之例子.

自表 1 中取若干對易數組依 10^2a+c 和 10^2b+d 之方式接合,可得部份四位數易數組如表 2 所示(表中之例子均爲完美接合):

表 2. 四位數易數組的例子(僅舉出 16 對)

9216,7638,3472,1894 9418,7234,3876,1692	9814,7432,3678,1296 9612,7836,3274,1498
9218,8426,7139,6347 9317,8129,7436,6248	4763,3971,2684,1892 4862,3674,2981,1793
9713,8921,7634,6842 9812,8624,7931,6743	4268,3476,2189,1397 4367,3179,2486,1298
9816,7438,3672,1294 9618,7834,3276,1492	9213,8421,7134,6342 9312,8124,7431,6243
4713,3921,2634,1842 4812,3624,2931,1743	4768,3976,2689,1897 4867,3679,2986,1798
9742,8934,7621,6813 9843,8631,7924,6712	1368,2176,3489,4297 1267,2479,3186,4398
4263,3471,2184,1392 4362,3174,2481,1293	6847,7639,8926,9718 6748,7936,8629,9817
9292,7676,3434,1818 9494,7272,3838,1616	6397,7189,8476,9268 6298,7486,8179,9367

表 3. 不成易數組之接合例子

9727, 8961, 7649, 6883 9829, 8667, 7943, 6781	1383, 2149, 3461, 4227 1281, 2443, 3167, 4329
8763, 4171, 6984, 2392 8962, 4774, 6381, 2193	2347, 6939, 4126, 8718 2148, 6336, 4729, 8917

定理 4: 自一位數組接合成二位數組開始,層層都用完美接合,最後所得之易數組(如表 2 中之易數組都是經兩重完美接合所得),若將每一數刪去其首位數字,所得之數組亦是易數組,且依原來方式完美接合. [又刪去其末位元數字(或次末位元數字) 亦有類似結果]

證明: 僅以一對經兩層完美接合所得之四位數易數組 $\{A;B\}$ 爲例證之. 設 A 之通項首兩位數字爲 x,y,餘下之兩位數爲 b;B 之通項首兩位數字爲 u,v,餘下之兩位數爲 d,則

$$\sum[10^3x+(10^2y+b)]^3=\sum[10^3u+(10^2v+d)]^3.$$

將易數組 $\{A;B\}$ 之每一數刪去其首位數字,即令 $x=u=0$ 代入上式,得

$\sum(10^2y+b)^3=\sum(10^2v+d)^3$,同理可證

$\sum(10^2y+b)^2=\sum(10^2v+d)^2$, $\sum(10^2y+b)=\sum(10^2v+d)$.

又因 $\sum(10x+y)b^2=\sum(10u+v)d^2$,令 $x=u=0$ 代入,得 $\sum yb^2=\sum vd^2$.

同理可證: $\sum y^2b=\sum v^2d$, $\sum yb=\sum vd$,故仍依原來方式完美接合.

例 5: 將表 2 左欄內之第一對易數組

9216, 7638, 3472, 1894

9418, 7234, 3876, 1692

之每一數刪去其首位數字,得數組

216, 638, 472, 894

418, 234, 876, 692

由定理 4 知此爲一對易數組,且是易數組 $\{a,b\}$:

2, 6, 4, 8

4, 2, 8, 6

與易數組 $\{c;d\}$:

16, 38, 72, 94

18, 34, 76, 92

依 10^2a+c 和 10^2b+d 之方式的完美接合.

下表是將表 2 內各數刪去首位數字後所得之三位數易數組(其中有兩對於刪去首位數字後變成相同之一對,故僅有 15 對).

表 4. 三位數易數組的例子(僅舉出 15 對)

216,638,472,894 418,234,876,692	713,921,634,842 812,624,931,743	768,976,689,897 867,679,986,798
814,432,678,296 612,836,274,498	268,476,189,397 367,179,486,298	742,934,621,813 843,631,924,712
218,426,139,347 317,129,436,248	816,438,672,294 618,834,276,492	263,471,184,392 362,174,481,293
763,971,684,892 862,674,981,793	213,421,134,342 312,124,431,243	292,676,434,818 494,272,838,616
397,189,476,268 298,486,179,367	368,176,489,297 267,479,186,398	847,639,926,718 748,936,629,817

自表2中取若干對易數組依 10^4a+c 和 10^4b+d 之方式接合,可得部份八位數易數組如表 5 所示(表中之例子均爲完美接合,驗算時可運用定理 3,以降低位數計算):

表 5. 八位數易數組的例子(僅舉出 9 對)

92161894,76383472,34727638,18949216 94181692,72343876,38767234,16929418
92134768,84213976,71342689,63421897 93124867,81243679,74312986,62431798
97421368,89342176,76213489,68134297 98431267,86312479,79243186,67124398
47686342,39767134,26898421,18979213 48676243,36797431,29868124,17989312
92131897,84212689,71343976,63424768 93121798,91242986,74313679,62434867
47136397,39217189,26348476,18429268 48126298,36247486,29318179,17439367
47631298,39712486,26843179,18924367 48621397,36742189,29813476,17934268
48126397,36247189,29318476,17439268 47136298,39217486,26348179,18429367
94726183,72618394,61839472,83947261 94836172,83617294,61729483,72948361

例 6: 若將表 5 之第 3 對八位數易數組

97421368, 89342176, 76213489, 68134297

98431267, 86312479, 79243186, 67124398

之每一數刪去其首位數字,可得七位數易數組

7421368, 9342176, 6213489, 8134297

8431267, 6312479, 9243186, 7124398

例 7: 若將例 6 所得之七位數易數組

7421368, 9342176, 6213489, 8134297

8431267, 6312479, 9243186, 7124398

之每一數刪去最前兩位數字,得五位數易數組

21368, 42176, 13489, 34297

31267, 12479, 43186, 24398

例 8: 試找出兩對九位數易數組,要各位數字不同.

解: 由定理 1,將表 5 之第 3 對八位數易數組

97421368, 89342176, 76213489, 68134297

98431267, 86312479, 79243186, 67124398

之各數加 $5 \cdot 10^8$,可得一對九位數易數組(1 至 9 之數字全用且各位數字不同):

597421368, 589342176, 576213489, 568134297

598431267, 586312479, 579243186, 567124398

又或將原先之八位數易數組各數乘以 10 再加 5,得另一對九位數易數組:

974213685, 893421765, 762134895, 681342975

984312675, 863124795, 792431865, 671243985

定理 5: 自一位數組接合成二位數組開始,層層都用完美接合,最後所得之 2^n 位數易數組中,若將每一數交換其首兩位數字,所得之數組亦是易數組,且依原來方式完美接合. [可推廣至:若將每一數分爲 2^m $(m < n)$ 節,則交換任一節之首兩位數字亦可;又交換每一數之首兩節亦可、次兩節亦可,餘類推.]

證明: 僅以一對經兩層完美接合所得之四位數易數組 $\{A;B\}$ 爲例證之. 設 A 之通項首兩位數字爲 x, y, 餘下之兩位數爲 b; B 之通項首兩位數字爲 u, v, 餘下之兩位數爲 d, 且 $[10^2(10x + y) + b]$ 和 $[10^2(10u + v) + d]$ 是完美接合.

每一數交換首兩位數字後,即第一組數中 x, y 互換,第二組數中 u, v 互換,得 $[10^2(10y + x) + b]$ 和 $[10^2(10v + u) + d]$,是否完美接合,視乎 $\sum x^2y = \sum u^2v$, $\sum xy^2 = \sum uv^2$, $\sum x^2b = \sum u^2d$, $\sum y^2b = \sum v^2d$, $\sum xb^2 = \sum ud^2$, $\sum yb^2 = \sum vd^2$, $\sum xyb = \sum uvd$ 是否都成立,但這些條件與 $[10^2(10x + y) + b]$ 和 $[10^2(10u + v) + d]$ 是否完美接合相同,由此得證.

例 9: 試找出 5 對八位數易數組,要各位數字不同.

解: 將表 5 中之第三對易數組

97421368,89342176,76213489,68134297

98431267,86312479,79243186,67124398

交換每一數之首兩位數字,得易數組

79421368,98342176,67213489,86134297

89431267,68312479,97243186,76124398

次將每一數分爲 2 節處理,交換第 2 節之首兩位數字,得易數組

79423168,98341276,67214389,86132497

89432167,68314279,97241386,76123498

再將每一數分爲 4 節處理,交換首 2 節,得易數組

42793168,34981276,21674389,13862497

43892167,31684279,24971386,12763498

再將每一數之首兩位數字交換,得易數組

24793168,43981276,12674389,31862497

34892167,13684279,42971386,21763498

以上各對易數組仍依原先形式層層完美接合.

若將洛書圓化圖內之數字 1,2,3,4 依河圖的規律(即依 $9-4=8-3=7-2=6-1$)移動入內圈,得下面圖 2 中之左圖,將空了的區域删去,修改成圖 2 中之右圖(簡稱爲河洛圖). 用河洛圖依下列方法(稱爲河洛圖法),可幫助我們覓得若干對 $2n$ 位數易數組(突顯出河圖、洛書的奧妙),其中 n 是正整數.

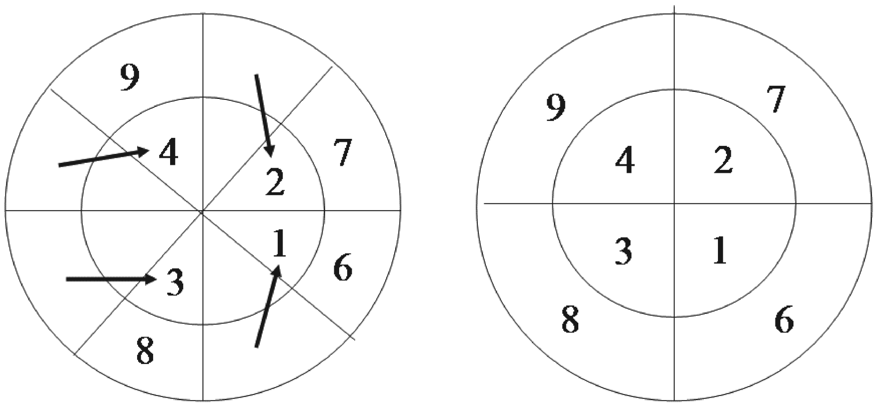


圖2

河洛圖法:對圖 2 之右圖,分别以過圓心之水平綫和垂直綫(各取定正負向)開始,其一順時針,另一逆時針,對稱地繞圓心轉圈,對稱地分别在其正向所經過之象限内拾取數字(每一象限内拾且僅拾取一個數字),拾取時可隨意從外圈轉入内圈或從内圈轉出外圈,轉半圈得一對兩位數易數組,轉一個圈得一對四位數易數組,轉一圈半得一對六位數易數組,轉兩個圈得一對八位數易數組,餘類推. 我們簡稱之爲河洛圖法.

下表舉出轉半圈的情況,得 4 對兩位數易數組(各均爲一位數易數組之完美接合):

97,76,68,89 98,79,67,86	92,71,63,84 93,74,62,81	42,21,13,34 43,24,12,31	47,26,18,39 48,29,17,36

下表舉出其中 4 種轉一圈的例子,所得之 4 對四位數易數組,每一對亦是兩對兩位數易數組(轉半圈所得)之完美接合.

9768,7689,6897,8976 9867,7986,6798,8679	4213,2134,1342,3421 4312,2431,1243,3124
9218,7139,6347,8426 9317,7436,6248,8129	4763,2684,1892,3971 4862,2981,1793,3674

下表舉出其中 4 種轉兩圈的例子,所得之 4 對八位數易數組,每一對亦是兩對四位數易數組(轉一圈所得)之完美接合.

97684213,76892134,68971342,89763421 98674312,79862431,67981243,86793124	13426897,34218976,42139768,21347689 12436798,31248679,43129867,24317986
92134768,71342689,63421897,84213976 93124867,74312986,62431798,81243679	92184763,71392684,63471892,84263971 93174862,74362981,62481793,81293674

以一對兩位數易數組爲例,設爲 $10a+b, 10a'+b'$,如均爲一位數易數組之完美接合,即 $\sum(10a+b)^n = \sum(10a'+b')^n (n=1,2,3)$ 且 $\sum a^n = \sum(a')^n$, $\sum b^n = \sum(b')^n (n=1,2,3)$, $\sum ab = \sum a'b'$, $\sum a^2 b = \sum(a')^2 b'$, $\sum ab^2 = \sum a'(b')^2$,則

$\sum[10(a \pm 5)+b] = \sum(10a+b \pm 50) = \sum(10a+b) \pm 200 = \sum(10a'+b') \pm 200 = \sum(10a'+b' \pm 50) = \sum[10(a' \pm 5)+b']$.

同理, $\sum[10a+(b \pm 5)] = \sum[10a'+(b^2 \pm 5)]$,又

$$\sum[10(a \pm 5)+b]^2 = \sum[10(a' \pm 5)+b']^2$$

$$\sum[10a+(b \pm 5)]^2 = \sum[10a'+(b' \pm 5)]^2$$

$$\sum[10(a \pm 5)+b]^3 = \sum[10(a' \pm 5)+b']^3$$

$$\sum[10a+(b \pm 5)]^3 = \sum[10a'+(b' \pm 5)]^3 \text{(證明類似)}.$$

在圖 2 之河洛圖中,因內圈是{1,2,3,4}中之各數,外圈是{6,7,8,9}中之各數,對應數字恰好相差 5,由上之討論知:對稱地隨意轉出外圈或轉入內圈,不會影響其成爲易數組之關係。

任意將一對 m 位數易數組和一對 n 位數易數組接合,不一定能成一對 $m+n$ 位數易數組,但若以河洛圖法推得之一對 $2p$ 位數易數組(p 爲使 $2p \geq m+n$ 成立之最小整數),設 $2p-(m+n)=d$,則將每一數刪去最前 d 位數字(即多次運用定理4),便成一對 $m+n$ 位數易數組.

河洛圖法的進一步修訂:因用河洛圖法所得之任何一對 $2n$ 位數易數組都可拆分爲若干對層層完美接合之易數組,由前述討論,知此法除可用以轉半圈和整數圈外,還可推廣至加入 $\frac{1}{4}$ 圈,使得一對 $2n-1$ 位數之易數組(n 爲正整數). 例如(對圖 2 之右圖而言):

若轉 $\frac{3}{4}$ 圈,可得若干對三位數易數組. 如:

921,713,634,842 931,743,624,812	926,718,639,847 936,748,629,817	971,763,684,892 981,793,674,862
976,768,689,897 986,798,679,867	426,218,139,347 436,248,129,317	421,213,134,342 431,243,124,312

若轉 $1\frac{1}{4}$ 圈,可得若干對五位數易數組,如:

97134,76342,68421,89213 98124,79312,67431,86243	92634,71842,63921,84713 93624,74812,62931,81743
92684,71892,63971,84763 93674,74862,62981,81793	92134,71342,63421,84213 93124,74312,62431,81243

餘類推.

又在拾取數字的過程中,也可以跳過一個數字(即在某一象限內不拾取數字),例如,在拾取數字構建 4 位數易數組的過程中,跳過一個數字(所轉圈數要相應增加 $\frac{1}{4}$):

跳過第 1 個數字的例	跳過第 2 個數字的例	跳過第 3 個數字的例
2634,1842,3921,4713 3624,4812,2931,1743	9134,7342,6421,8213 9124,7312,6431,8243	9734,7642,6821,8913 9824,7912,6731,8643

依同理,當然亦可跳過多個數字等,變化頗多,不贅.

參考文獻:

[1] *Herman Yeung.* 周易(易經) *Mathematics* 第 4 節 – 河圖洛書、周髀算經[*R/OL*]. (2014 – 04 – 30). *https://www.youtube.com/watch?v = u2e9dZ0 – zNE*

數學競賽中的數論問題

澳門大學教育學院　江春蓮
澳門濠江中學附屬小學　劉明藝

隨著數學競賽的發展,數學競賽已逐漸形成一門特殊的數學學科競賽數學. 它涉及數學競賽的內容、思想和方法;也涉及到數學競賽教育和數學課外教育的本質、方法、規律和途徑問題,課外學習與課內學習的關係問題,普及與提高問題,數學天才的發現和培養問題,輔道教師的專業進修和提高問題,命題和解題研究問題等等(裘宗滬,1996). 其以競賽數學爲主要內容,以解決問題爲基本形式、以開發學生數學思維爲根本目的. 競賽數學的內容涉及四個數學分支,它們是:代數、幾何、初等數論和組合數學(陳傳理,張同君,2005).

數學競賽培訓有兩種形式. 一種是分專題進行,而另一種是以歷年考題綜合訓練的形式進行. 前一種方法有利於學生系統學習一些知識和方法,而後一種則常用作考試前的適應性訓練. 但後者因覆蓋面廣,學生常難以在某些方面深入,所以經常先選用第一種方法學習完全系統的學習,競賽前再進行 1 – 2 次的適應性訓練.

2017 年 12 月 7 日,受澳門中華教育會學術部數學小組組長(總策劃)劉明藝老師邀請,舉辦了題爲“中小學數學競賽中的數論問題”的講座,吸引了近八十位來自各校中、小學的數學競賽培訓教練參加. 講座以 2006 年以來 12 年的全國“希望杯”競賽中的數論問題爲依據,和老師一起探討如何以淺顯易懂的方式讓不同數學水準的學生能找到屬於自己的解題思路,提高學生的數學學習興趣.

數論是數學競賽中除常規課程內容(競賽中又略高於普通課程的要求)之外最重要的部分,也是數學競賽中最經典的內容,約占各類競賽(如希望杯,美國八到十年級數學競賽分值的 25% (20 – 30% 左右). 這些題目看似很容易懂,可不是很容易能上手,所以引道學生找規律、找思路很關鍵.

數論部分涵蓋的內容包括整除性、同餘、不定方程、完全平方數、質數等. 我們不能期望在一次能將這 22 項中的所有問題講完,所以我們僅以其中部分題目爲例,討論這些問題的解題方法、教學方法和如何讓學生學會融會貫通的“一題多變”. 下面以幾個例題討論這些方法理念的運用.

一、整除性

〔**問題** 1〕設 $a = 10^9 + 38^3 - 2$,證明:a 是 37 的倍數. (2010 年初一)

〔分析〕要證明一個式子被質數 p 整除,可以考慮將其表示爲 $pm+pn$ 的形式.

〔略解〕$a=10^9+38^3-2=10^9-1+38^3-1$

$=(10^3-1)(10^6+10^3+1)+(38-1)(38^2+38+1)$

$=999\times(10^6+10^3+1)+37\times(38^2+38+1)$

$=37\times27\times(10^6+10^3+1)+37\times(38^2+38+1)$.

〔問題 2〕求證:若整數 a 不能被 2 和 3 整除,則 a^2+23 必能被 24 整除.(2015 年初一)

〔分析〕要證明一個式子可被一個合數 $p_1^{m_1}p_2^{m_2}p_3^{m_3}\cdots p_n^{m_n}$($p_1,\cdots,p_n$ 爲兩兩不等的質數)整除,可分別證明其被 $p_i^{m_i}(i=1,\cdots,n)$ 整除.

〔略解〕$a^2+23=a^2-1+24=(a-1)(a+1)+24$,$24=2^3\times3$.

因爲 a 不能被 2 整除,所以 a 爲奇數,$a-1$、$a+1$ 均爲偶數,又$(a+1)-(a-1)=2$,所以 $a-1$,$a+1$ 爲兩個連續的偶數,其中必有一個爲 4 的倍數. $\therefore(a-1)(a+1)$ 可被 8 整除.

因爲 a 不能被 3 整除,所以 a 被 3 除後餘 1 或 2. 當 a 被 3 除餘 1 時,$a-1$ 能被 3 整除;當 a 被 3 除餘 2 時,$a+1$ 能被 3 整除. 因此,$(a-1)(a+1)$ 可被 3 整除.

因爲$(3,8)=1$,所以 $24\mid(a-1)(a+1)$.

〔問題 3〕若矩形的長,寬和對角線的長度都是整數,求證:這個矩形的面積是 12 的倍數.(2011 年初一)

〔略证〕設矩形的長、寬和對角線分別爲 a、b、c,則有 $a^2+b^2=c^2$.

先證 a、b 中必有一個是 3 的倍數. 用反證法. 假設 a、b 均不被 3 整除,則 a^2、b^2 被 3 除後餘 1,所以 a^2+b^2 被 3 除後餘 2. 而 c^2 要麼可以被 3 整除,要麼被 3 除後餘 1,得出矛盾.

再證 ab 是 4 的倍數. 可對 a、b 被 4 除以後的餘數進行討論,我們不難求出對餘數分別爲 0、1、2、3 的數 m,則 m^2 被 4 除後的餘數依次爲 0、1、0、1,所以可以將 a^2+b^2 被 4 除後的餘數列表如下:

b \ a	0	1	2	3
0	0	1	0	1
1	1	2	1	2
2	0	1	0	1
3	1	2	1	2

該表中,黃色顯示的部分是使得對角線可爲整數的情形. 我們對這些情形分別進行討論.

第一行的數滿足 4 可整除,第一列的數滿足 4 可整除 a,此時均有 4 整除 ab.

第三行第三列的 0 是 a、b 均爲偶數得到的,此時也有 4 整除 ab.

考慮到 a、b 的對等性,所以只需討論 $a = 4k+2$、$b = 4l+1$ 和 $a = 4k+3$,$b = 4l+2$ 的情形.

當 $a = 4k+2$,$b = 4l+1$ 時,$a^2 = 16k^2 + 16k + 4 = 16k(k+1) + 4$;

$b^2 = 16l^2 + 8l + 1 = 8l(2l+1) + 1$,此時 $a^2 + b^2$ 被 8 除餘 5.

而 a 爲偶數,b 爲奇數時,c 必爲奇數,設 $c = 2s+1$,則 $c^2(2s+1)^2 = 4s(s+1) + 1$ 被 8 除餘 1(因爲 s、$s+1$ 爲兩個連續的自然數,其中必有一個爲偶數),所以此時 $a^2 + b^2 = c^2$ 無解.

當 $a = 4k+3$,$b = 4l+2$ 時,$a^2 = 8k(2k+3) + 8 + 1$.

$b^2 = 16l^2 + 16l + 4 = 16l(l+1) + 4$,所以此時 $a^2 + b^2$ 被 8 除餘 5. 仿上步可以證明此時 $a^2 + b^2 = c^2$ 無解.

所以上表中,四個紅色的 1 是不可能的.

綜上所述,4 整除 ab.

所以,12 整除 ab.

〔**回顧與反思**〕要證明一個式子被 t 整除,我們總可以用 t 的同餘類對所有的整數進行分類討論.

〔**問題 4**〕已知自然數 n 小於 50,且 $4n+5$ 和 $7n+6$ 有大於 1 的公約數,則所有 n 的可能值之和爲(　　).(2017 年初二)

(A)124.　　(B)114.　　(C)104.　　(D)94.

〔**分析**〕$4n+5$、$7n+6$ 看起來很簡單,可要尋找最大公約數可不能用通常的輾轉相除法,但可以用一個“連減”的近似方法,即多次用 n 的係數較小的式子去減 n 的係數較大的式子,而保留較小的那個不動.

〔**略解**〕. $(4n+5, 7n+6) = (4n+5, 3n+1) = (n+4, 3n+1) = (n+4, -11)$.

$\therefore (4n+5, 7n+6)$ 有公因數 11.

$\therefore 11 \mid (n+4)$

$\therefore n+4 = 11, 22, 33, 44$,此時 $n = 7, 18, 29, 40$. 所以答案爲 $7+18+29+40 = 94$,故選 D.

〔**問題 5**〕(1) 在用數字 1,2,3,4,5,6 組成的沒有重復數字的三位數中,是 9 的倍數的數有(　　).(2009 年初一)

(A) 12 個　　(B) 18 個　　(C) 20 個　　(D) 30 個

(2) 若一個十位數 $\overline{2016ab2017}$ 是 99 的倍數,則 $A + B =$ ________.(2017 年六年級)

〔**分析**〕第一題是 9 的倍數,被 9 整除的數的特點是各位上的數字和可被 9 整除. 怎麼證明的呢?

因爲$\overline{a_1 a_2 \cdots a_n} = a_1 \times 10^{n+1} + \cdots + a_{n-2} \times 10^2 + a_{n-1} \times 10^1 + a_n$

$$= a_1 \times (9+1)^{n-1} + \cdots + a_{n-2} \times (9+1)^2 + a_{n-1} \times (9+1) + a_n$$

$$\equiv a_1 + a_2 + \cdots + a_n (mod 9)$$

第二題討論的是 99 的倍數,與 99 最接近的是 100,所以我們可以考慮從右往左每兩個數字結合在一起.

$$\overline{\underline{20}\,\underline{16}\,\underline{ab}\,\underline{20}\,\underline{17}} = 20 \times 10^8 + 16 \times 10^6 + \overline{ab} \times 10^4 + 20 \times 100 + 17$$

$$= 20 \times (10^2)^4 + 16 \times (10^2)^3 + \overline{ab} \times (10^2)^2 + 20 \times 100 + 17$$

$$= 20 \times (99+1)^4 + 16 \times (99+1)^3 + \overline{ab} \times (99+1)^2 + 20 \times (99+1) + 17$$

$$\equiv 20 + 16 + \overline{ab} + 20 + 17 (mod 99)$$

$$\equiv 73 + \overline{ab} (mod 99).$$

$\therefore 73 + \overline{ab} = 99$,得$\overline{ab} = 26$,所以:$a + b = 2 + 6 = 8$.

二、因數分解

因數分解常作爲一種解決數論問題的方法,特別在出現了較多的數的乘法運算時.

〔問題6〕a,b,c,d是互不相等的正整數,且$abcd = 441$,那麼$a+b+c+d$的值是(　　)(2006 年初二)

(A) 30　　(B) 32　　(C) 34　　(D) 36

〔分析〕要從一個式子確定4個未知數的值,怎麼做呢?因式分解!因爲$441 = 3^2 \times 7^2$,所以 3 個不同的數可以是 3、7 和 21,還差一個怎麼辦?“1” 來湊!

$\therefore a + b + c + d = 1 + 3 + 7 + 21 = 32$.

〔回顧與反思〕此題可以變成 $1 \times 5 \times 7 \times 35$、$1 \times 7 \times 11 \times 77$ 等等.

三、同餘

〔問題 7〕若自然數 x 除以 3 餘 2,除以 4 餘 3,除以 5 餘 4,則 x 除以 15 所得餘數是________.(2012 年初一)

〔分析〕一看題目,我們可能會想到中國剩餘定理,也即“大衍求一術”. 但對不同數學能力水準的小學生,最好的辦法莫過於“列舉法”.

〔略解〕被 3 除餘 2 的數有 2,5,8,11,14,17,20,26,29,32,35,… 它們組成以 2 爲首項,3 爲公差的等差數列. 被 4 除餘 3 的數有 3,7,11,15,19,23,27,31,35,… 它們組成以 3 爲首項,4 爲公差的等差數列. 兩個數列中均有的項爲 11,23,35,… 它們組成以 11 爲首項,$12 = 3 \times 4$ 爲公差的等差數列.

此時,我們可以再加進“除以 5 餘 4” 的條件,我們可以考慮在 11,23,35,47,59,… 中找到第一個滿足所有條件的數 59,之後的數是在此基礎上加$3 \times 4 \times 5 = 60$. 所以此題的答案是 14.

〔**討論**〕對這一題,如果學生能注意到 $3-2=4-3=5-4=1$,就能得到 $x+1$ 可被 3、4、5 整除的結論,就可以更快得到結果.

〔**問題** 8〕已知 $m,n(m>n)$ 是正整數.

(1) 若 3^m 與 3^n 的末位數字相同,求 $m+n$ 的最小值;

(2) 若 3^m 與 3^n 的末兩位數字都相同,求 $m-n$ 的最小值.(2008 年初二)

〔**分析**〕p^m 的末位數、末兩位數是有規律的. 這些題最重要的方法是"**找規律**".

"**找規律**"是小學高年級數學競賽中最重要的方法.

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3^m 的個位數字	3	9	7	1	3	9	7	1	3	9

39713971… 的迴圈,所以第一題的答案爲 $1+5=6$.

類似地,m 從 1 起,3^m 的末兩位數字依次爲 03,09,27,81,43,29,87,61,83,49,47,41,23,69,07,21,63,89,67,01,03,09,27,…,迴圈節爲 20. 所以 $(m-n)_{min}=20$.

〔**回顧與反思**〕此題也可以變成 6^m、7^m 等等.

四、不定方程

〔**問題** 9〕使方程 $3x+2y=200$ 成立的正整數對 (x,y) 有(　　).(2008 年初二)

(A) 66 個　　(B) 33 個　　(C) 30 個　　(D) 18 個

〔**分析**〕這種方程有公式,但可以完全不記公式,而僅將係數較小的未知數表示出來,所以 $y=\dfrac{200-3x}{2}=100-x-\dfrac{1}{2}x$,這樣將整數部分分解出來以後就可以得出 $2\mid x$. 所以可設 $x=2t$,代入 $y=100-x-\dfrac{1}{2}x$ 得 $y=100-3t$. 所以 $\begin{cases}x=2t,\\ y=100-3t.\end{cases}$

要求其正整數解,只需求不等式 $\begin{cases}2t>0\\ 100-3t>0\end{cases}$ 的 t 的範圍 $0<t<33\dfrac{1}{3}$. 進而可以求出 t 可取 1,…,33 這 33 個正整數. 對應地,原方程有 33 組正整數解.

五、一題多變

〔**問題** 10〕將五位數""重復寫 403 次組成一個 2015 位數:"123451234512345…",從左往右,先刪去這個數中所有位於奇數位上的數字,得到一個新數;再刪去新數中所有位於奇數位上的數字;按上述規則一直刪下去,直到剩下一個數字爲止,則最後剩下的數字是________.(2015 年五年級二試)

〔**分析**〕①. 一個數是否被刪除僅與其位置有關,所以我們如果可以確定最後剩下的數

的位置序號,最後剩下的數就可以確定下來.

②. 2015 是個較大的數,如何解?簡單化!如將 2015 變成 20.

③. 對 1,2,3,……,20,第一次刪除了所有的奇數 1,3,……,19,剩下所有的偶數 2,4,……,20;第二次刪除了形如 $2(2n-1)$ 的數 2,6,10,18,剩下 4 的倍數 4,8,12,16,20;第三次刪除了形如 $4(2n-1)$ 的數,剩下 8 和 16;第四次刪除了 8,剩下 16.

④. 分析 16 的特點. 16 的質因數只有 2,而且是 1 - 20 中質因數分解後 2 的次數最高的項. 由此得出猜想:最後剩下的應該是質因數分解後 2 的次數最高的項. 可以取 40 個數檢驗一下看這個猜想是否成立.

⑤. 回到原題 1,2,…,2015 中 $2^10 = 1024$ 是 2 的次數最高的項,所以最後剩下的應該是第 1024 位上的數,該數是“4”.

〔**討論**〕(1)2015 年是考試當年的年份,考試中常出與年份有關的題,今年是 2017,就可以改成 2017,此時解答變了沒有?2018 呢?2019 呢?結果會改變的應是哪一個年份?(答案:2048)(2) 如果不是 12345 重復,而是 123456 重復呢?(因爲 1024 被 6 除餘 4,所以結果還是 4)1234567 呢?(1024 被 7 除餘 2,此時結果爲 2).

講座 3 個小時的時間過得很快,準備的講稿只討論到一半就結束了,希望以後有更多的機會跟老師交流,互相學習.

最後,劉明藝老師對講座進行了總結,他強調了兩點,一是數學競賽不應教學生硬套公式,這不僅是因爲公式易於忘記或記錯,而是因爲我們需要學生學會尋找公式的方法;二是對數論知識,除了運用以學過的中學及大學數學知識外,更應多做多練多想. **想要學生喜歡數學**,我們**數學老師自己就要“迷” 數學**!

以前高中階段的數學競賽才涉及的高斯函數、不定方程,排列組合等,如今也已變成小學生的玩意,我們教師需要與時俱進,才能爲澳門培養更多、更傑出的人才.

參考文獻:

陳傳理,張同君(2005). 競賽數學教程(第二版). 北京:高等教育出版社.

裘宗滬(1995). 競賽數學教程(第一版):序. 北京:高等教育出版社.

也談“數學的研究性學習”

澳門數學教育研究學會　鄭志民

什麼是“數學的研究性學習”?爲什麼要開展“數學的研究性學習”?如何開展“數學的研究性學習”?

古訓示之:“學而時習之”. 其意即學生(包括學者)除了學習——包括閱讀(觀看)、聆聽、欣賞,更重要的是:練書寫,練操作(彈、拉、吹、奏),練繪畫,練製作,練解題,練作文等.

但是,上述的各種活動都只是學生在學習中關於基礎知識和基礎技能(即雙基)的學習.

就**“三角形的五心”**這一內容而言,**“五心的作圖”**只能是雙基的內容之一. 如果學生在這方面學得不好,老師幫他(她)們再學習,只能是**“補缺補漏”**的雙基再學習,如果把它當成**“數學的研究性學習”**來看待,那將是“天大的誤會”(甚至是**“自欺欺人”**,**“誤人又誤己”**的做法).

就**“三角形的五心”**而論,關於它的**“數學的研究性學習”**起碼要包括研究**“三角形五心”**的內涵和外延等方面之**“相關的數學課題”**.

“數學的研究性學習”是學生經過扎實的雙基學習之後,老師**“創設平臺”**,**“深挖教材”**,**“提出課題”**,促使學生開展多方向的思維乃至於創造性的思維,發揮學生的探索和研究能力,探研**“一題多解”**和**“多題一解”**,爲學生進一步作**“科學研究”**打下初步的基礎.

關於**“數學的研究性學習”**的這種**“教學活動”**無疑是21世紀**“數學教育”**的新課題,它將對學校教師的教學和學生的學習提出新的挑戰!這種**“新的教學活動”**也將對學校的行政(特別是分管教學的行政)人員,就如何領道教學,考察教師,總結教學經驗,推廣新的有效(乃至高效)的教學模式和方法等方面提出新的要求. 它也將使學校的數學教學和數學教育提高到一個新的臺階,因而出現一大批既有扎實的學科教學和學科教育的基礎功底,又有學科研究能力的眞正的**“卓越教師”**(而非**“就書教書”**,**“埋頭拉車”**的**“教書匠”**),**名師**也將脫穎而出!

時代在前進,形勢逼人,催人奮進!

基於上述的分析,澳門的數學教學和數學教育也將出現一個嶄新的局面,喜人的局面,優秀的人才也將不斷湧現!

下面將以**“典型案例”**提供**“數學的研究性學習”**之範例.

一、垂心定義再理解，四個垂心齊顯現.

—— 例說"數學的研究性學習"之(一).

三角形的三條高線相交於一點(三角形的垂心定理). 這一點被稱爲**三角形的垂心**.

由三角形的垂心定理和三角形的垂心定義，可以探研出以下的結論：

(1) 三角形的任何兩條高線的交點，就是三角形的垂心.

(2) 銳角三角形的垂心在三角形內，直角三角形的垂心就是三角形的直角頂點，鈍角三角形的垂心在三角形外.

(3) 三角形的兩條高錢交於 H，則第三個頂點與這個點 H 的連線，必垂直於第三邊(頂點的對邊).

若 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心，則必有 $AH \perp BC$，$BH \perp AC$，$CH \perp AB$，也就是說，在這樣的四個點 A、B、C、H 中，任何兩點的連線必垂直於其餘兩點的連線.

(4) 平面上的四個點 A、B、C、D 中，若有一點是其餘三點連線所成的三角形的垂心，那麼這四點中任何一個點都必定是其餘三點的連線所成的三角形的垂心(如 D 是 $\triangle ABC$ 的垂心，A 爲 $\triangle BCD$ 的垂心，B 爲 $\triangle CDA$ 的垂心，C 爲 $\triangle DAB$ 的垂心). 這樣的四個點合稱爲一個**垂心組**.

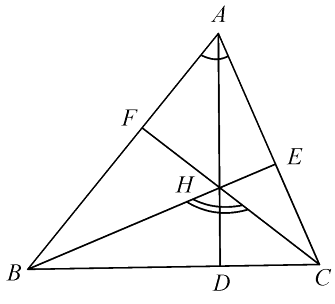


圖1
(△ABC爲銳角三角形)

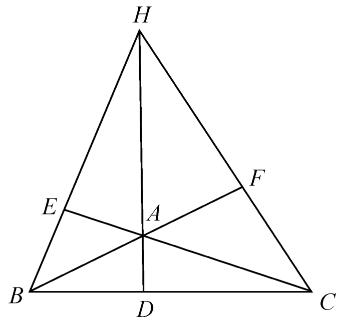


圖2−1
(∠BAC爲頓角)

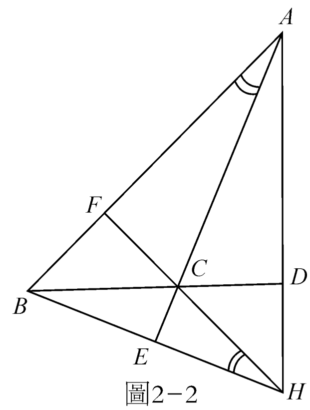


圖2−2
(∠BCA爲頓角)

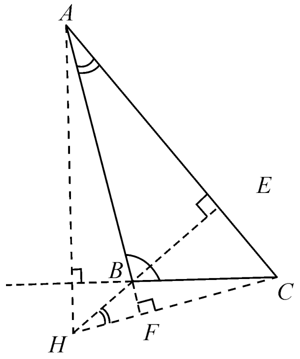


圖2−3
(∠ABC爲頓角)

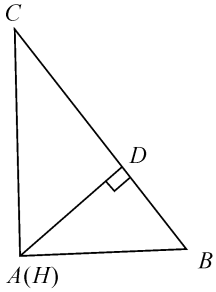


圖3−1
(∠CAB爲直角)

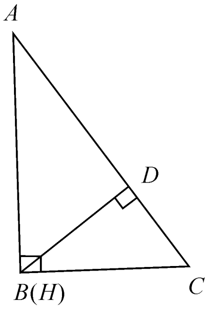


圖3−2
(∠ABC爲直角)

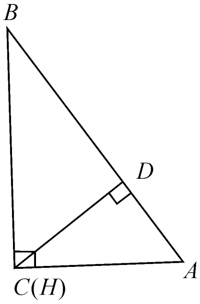


圖3−3
(∠ACB爲直角)

如上面四個圖(圖 1 中 $\triangle ABC$ 爲銳角三角形,圖 2 中 $\triangle ABC$ 爲頓角三角形,圖 3 中 $\triangle ABC$ 爲直角三角形)中,H 是 $\triangle ABC$ 的垂心,則有一個**垂心組**——H 是 $\triangle ABC$ 的垂心,A 是 $\triangle BCH$ 的垂心,B 爲 $\triangle CAD$ 的垂心,C 爲 $\triangle ABH$ 的垂心.

(5) H 爲 $\triangle ABC$ 的垂心,則有

$\angle BHC = 180° - \angle BAC$(如圖 1,圖 2 - 1)

或 $\angle BHC = \angle BAC$(如圖 2 - 2,圖 2 - 3)

請仔細看看圖 1,圖 2 - 1,圖 2 - 2,圖 2 - 3,再研究:

(a) 有哪些角相等或互補?(例如,圖 1 中,$\angle FBH = \angle ECH$,圖 2 - 1 中,$\angle ABH = \angle ACH$,而圖 2 - 2 中,$\angle ABH$ 與 $\angle ACH$ 互補).

(b) 有哪些三角形是相似三角形?(例如,$\triangle ABD$,$\triangle CBF$,$\triangle AHF$,$\triangle CHD$ 等都彼此相似).

(c) 分別以 AB,BC,CA(見圖 4) 及以 AH,BH,CH 爲直徑作圓(見圖 5),則這些圓分別經過 D、E、F 中哪兩點?(即可得 A、B、D、E 四點共圓;B、C、E、F 四點共圓;C、A、F、D 四點共圓;以及 A、F、H、E 四點共圓;B、D、H、F 四點共圓;C、E、H、D 四點共圓).

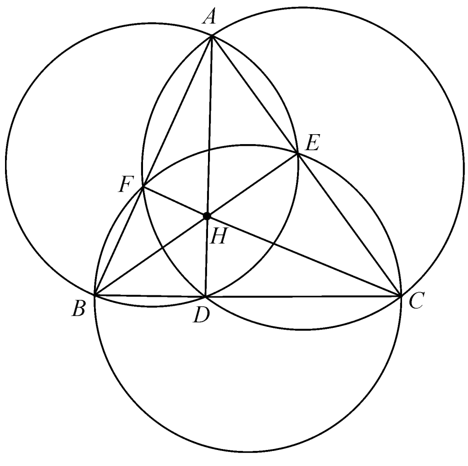


圖4

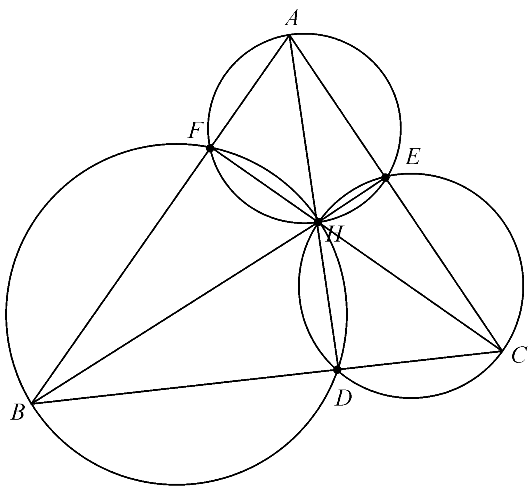


圖5

二、"重心定理" 再探索,"三點共線" 齊亮象

—— 例說"數學的研究性學習" 之(二).

三角形的三條中線相交於一點,這個點到一邊的中點的距離等於這邊上的中線長的三分之一(三角形的重心定理). 這一點被稱爲**三角形的重心**.

根據關於三角形重心定理和三角形的重心定義可以推出以下的結論:

(1) 三角形的兩條中線的交點,就是三角形的重心. 三角形的重心,必在三角形內.

(2) $\triangle ABC$ 的重心 G 到 BC 邊的中點 M 的距離 GM 等於中線 AM 之長的$\frac{1}{3}$,從而 G 到 BC 的距離 GP 等於交 AD 之長的$\frac{1}{3}$(見圖 1).

(3) 若 G 爲 $\triangle ABC$ 的重心,則以 G 爲公共頂點的三個三角形 $\triangle GBC$、$\triangle GCA$、$\triangle GAB$ 的面積都相等,都爲 $\triangle ABC$ 的面積的$\frac{1}{3}$.

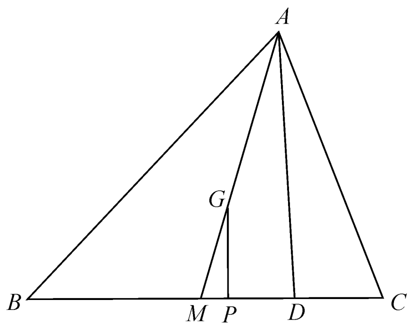


圖1

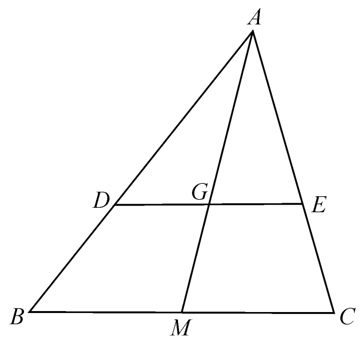


圖2

(4) 過三角形的重心G所作的平行的一邊的直線,把原三角形分成兩部分(其中一個爲三角形,另一個爲梯形),這兩部分的面積之比爲 4∶5.

事實上,因爲G爲 $\triangle ABC$ 的重心;過G作BC的平行線交AB、AC於D、E,則$S_{\triangle ADE}:S_{\triangle ABC}=4:9$,$S_{\triangle ADE}:S_{梯形DBCE}=S_{\triangle ADE}:(S_{\triangle ABC}-S_{\triangle ADE})=4:(9-4)=4:5$(見圖 2).

(5) M、N、P 分别爲 $\triangle ABC$ 的各邊 BC、CA、AB 的中點;$\triangle ABC$ 的重心 G 就是 $\triangle MNP$(這樣的 $\triangle MNP$,也稱爲**三角形的中點三角形**)的重心(此時 $\triangle MNP$ 與 $\triangle ABC$ 中,$MN \parallel AB$,$NP \parallel BC$,$PM \parallel AC$,因此 AM 平分 PN,BN 平分 PM,CP 平分 MN,因此 G 也是 $\triangle MNP$ 的重心)(見圖 3).

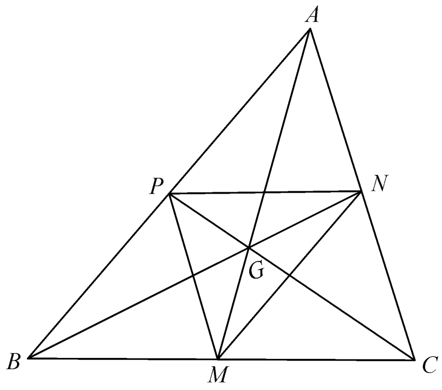


圖3

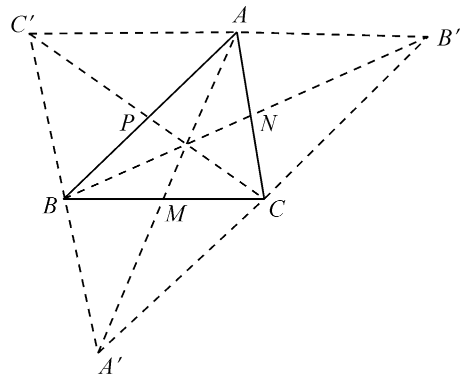


圖4

(6) 在 $\triangle ABC$ 中,如果延長中線 AM 至 A',使 $AM = MA'$,延長中線 BN 至 B',使 $BN = NB'$,延長中線 CP 至 C',使 $CP = PC'$,則 C'、A、B' 共線;A'、B、C' 共線;A'、C、B' 共線.

事實上,據上述的作圖可知,$ABCB'$、$BCAC'$ 以及 $ABA'C$ 均爲平行四邊形,因此 $AB' \parallel BC$、$AC' \parallel BC$,$BC' \parallel AC$、$BA' \parallel AC$,$CA' \parallel AB$、$CB' \parallel AB$,因此有 C'、A、B' 共線;A'、B、C' 共線;A'、C、B' 共線(見圖 4).

(7) 據(6) 可知 $\triangle ABC \cong \triangle ABC' \cong \triangle ACB' \cong \triangle A'BC$;$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$;$S_{\triangle A'B'C'} =$

$4S_{\triangle ABC}$, $P_{\triangle A'B'C'} = 2P_{\triangle ABC}$(見圖 4).

請研究,如果 $\triangle ABC$ 爲正三角形時,又可得到什麼新結論?

三、内(外、旁)心定理再反思、數學研究譜新篇

—— 例説“數學的研究性學習”之(三).

1. **三角形的三條内角平分線相交於一點(三角形的内心定理)**. 這一點被稱爲**三角形的内心**.

由三角形的内心定理和三角形的内心定義,可以推出如下的結論:

(1) 三角形的兩條内角平分線的交點,就是三角形的内心. 三角形的内心必在三角形内.

(2) 三角形的内心 I 到三角形($\triangle ABC$)的三邊的距離相等,如圖 1 中,$IP = IQ = IS$,因此以 I 爲圓心,IP 爲半徑作圓,就必與 $\triangle ABC$ 的各邊相切(切點爲 P、Q、S). **圓 I 叫做 $\triangle ABC$ 的内切圓,$\triangle ABC$ 叫做圓 I 的外切三角形.**

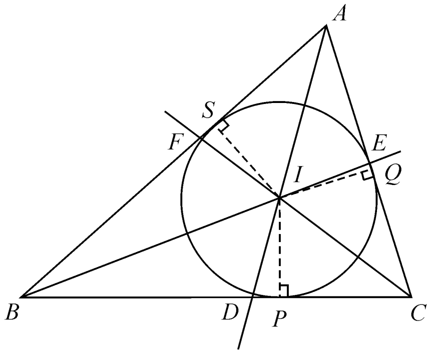


圖1

(3) 三角形的兩條内角平分線的交點是唯一的,所以每個三角形有而且也只有一個内心. 可見**每一個三角形有而且只有一個内切圓**.

2. **三角形的三邊的中垂線交於一點. 這個點到三角形的三個頂點的距離相等(外心定理)**. 這一點叫做**三角形的外心**.

三角形的“**外心**”,通常用大寫英文字母 O 表示.

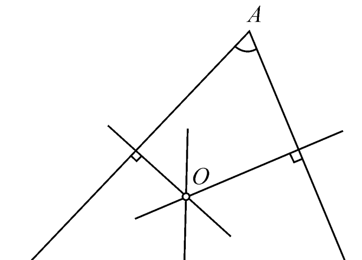


圖2-(1)

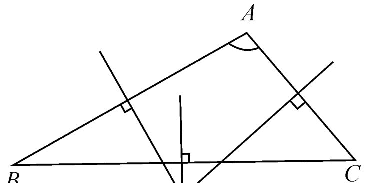


圖2-(2)

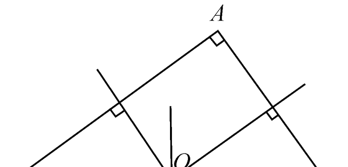


圖2-(3)

由上面的圖 2-(1),圖 2-(2),圖 2-(3) 可以看出:

(1) 鋭角三角形的外心,在三角形内;鈍角三角形的外心在三角形外;直角三角形的外心在三角形的斜邊上并且外心就是斜邊的中點.

(2) $\triangle ABC$ 的外心 O 到三個頂點 A、B、C 的距離相等,因此以 O 爲圓心,以 OA 爲半徑作圓,必定經過 $\triangle ABC$ 的三個頂點 A、B、C.

三個頂點都在同一個圓周上的三角形,叫做**圓的內接三角形**,而這個圓,就叫做這個**三角形的外接圓**.

“三角形的外心”就是三角形的外接圓的圓心.

(3) **每個三角形必有一個而且只有一個外接圓. 從而知道,經過不在一直線上的三點,可作一個而且只可作一個圓.**

(4) 三角形的外心必在任意一邊的中垂線上,因此三角形外接圓的弦之垂直平分線必經過外心.

(5) 由**“直角三角形的外心是斜邊的中點”**可知,以直角三角形的斜邊爲直徑的圓必經過直角頂點. 從而知,**“直角三角形中,斜邊的中線長等於斜邊長的一半”. 以及“半圓內上立於直徑的弓形角”(或者說,直徑所對的圓周角) 必是直角.**

(6) 如圖 2 -(4),O 爲 $\triangle ABC$ 的外心,則有

$$\angle BOC = 2\angle A,$$

或者 $\angle BOC = 360° - 2\angle A$(請讀者證明).

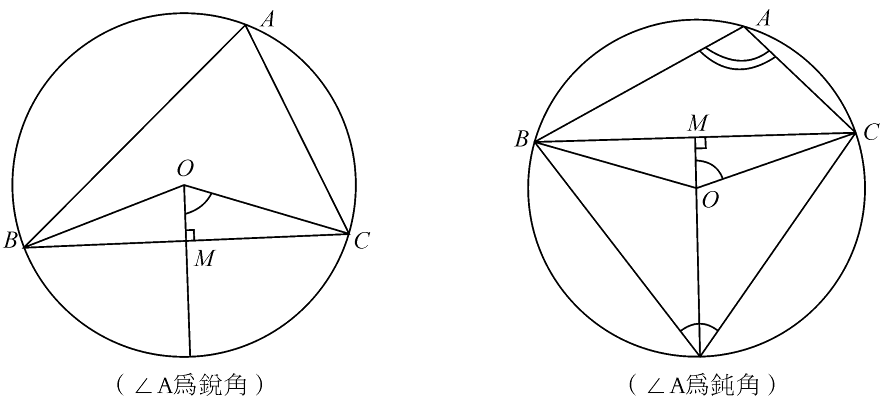


圖2−(4)

3. **三角形的任何兩條外角的平分錢和另一內角的平分線相交於一點**(這樣的交點有三個),**這些點分別與三邊的距離相等(三角形的旁心定理)**. 這三個點叫做**三角形的旁心**.

以旁心為圓心,以旁心到三角形三邊的距離為半徑所作的圓與三角形的三邊(或其延長線) 相切,這個圓叫做**三角形的旁切圓**. 每個三角形有三個旁切圓,旁切圓的圓心均在三角形外(見圖 3).

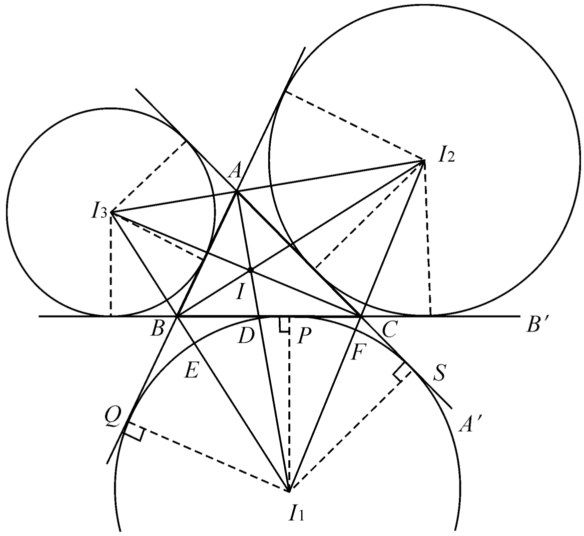


圖3

由三角形的旁心定理和旁心定義,可以看出:

(1) 如圖 3 可知,CI_2 是 $\angle ACB$ 的外角 $\angle ACB'$ 的平分線,CI_1 是 $\triangle ABC$ 中,$\angle ABC$ 的另一外角 $\angle BCA'$ 的平分錢,而 $\angle ACB'$ 與 $\angle BCA'$ 是相等的對頂角,因此 I_1、C、I_2 共線;同理 I_1、B、I_3 共線;I_2、A、I_3 也共線(見圖 3 及圖 3 - 1).

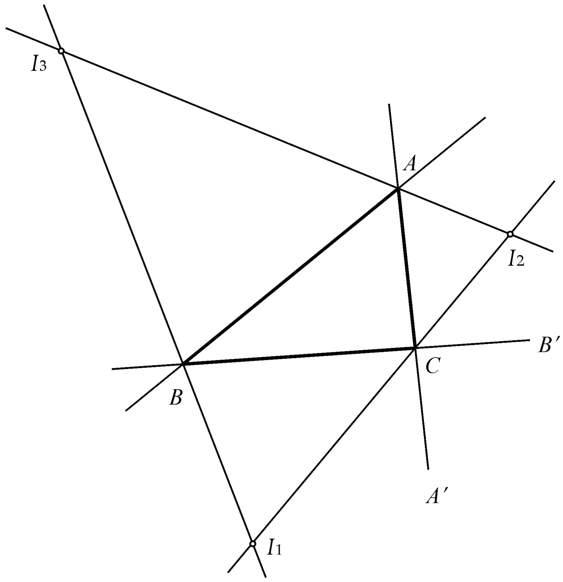


圖3-1

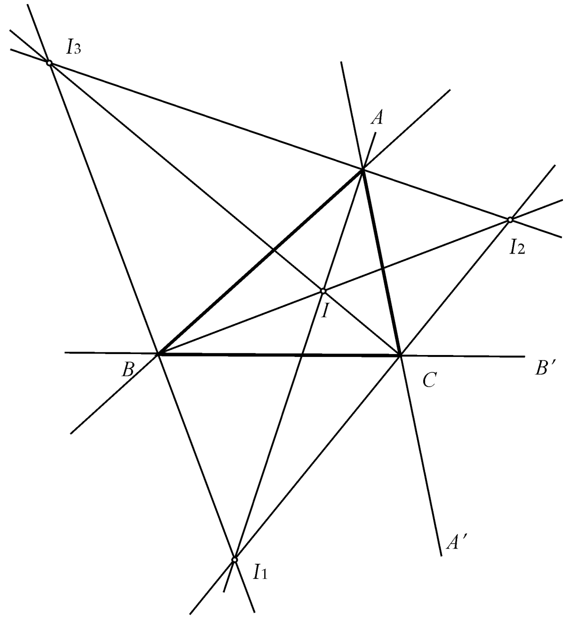


圖3-2

(2) 由旁心定理和旁心定義,可知 AI_1、BI_2、CI_3 分別是 $\triangle ABC$ 的內角 $\angle BAC$、$\angle ABC$ 和 $\angle CAB$ 的平分線,據三角形的內心定理可知 AI_1,AI_2,AI_3 相交於一點 I(I 爲 $\triangle ABC$ 的內心).因此 AI_1,BI_2,CI_3 共點於 I(此點即爲 $\triangle ABC$ 的內心)(見 3 - 2).

(3) 由於 I_1,C,I_2 共線,且 I_1I_2 就是 $\triangle ABC$ 中 $\angle ACB$ 的外角 $\angle ACB'$ 的平分線,而 CI_3 是 $\triangle ABC$ 中 $\angle ACB$ 的平分錢($\triangle ABC$ 的內角平分線),因此 $I_1I_2 \perp CI_3$;同理 $I_2I_3 \perp AI_1$,$I_1I_3 \perp BI_2$. 也即 $\triangle I_1I_2I_3$($\triangle ABC$ 相應的**旁心三角形**)的三條高交於 I 是 $\triangle I_1I_2I_3$ 的垂心,**也即 $\triangle ABC$ 的內心與相應的旁心三角形的垂心重合**(見圖 3 - 2).

四、"五心相(暉)映"擦火花,"奇妙結論"共觀賞

—— 例説"數學的研究性學習"之(四).

由前面的研究,得到五種共點線,包括三角形的高線交於三角形的垂心;三角形的三條中線交於三角形的重心;三角形的三條內角平分線交於三角形的內心;三角形的三條邊的中垂線交於三角形的外心;三角形一條內角平分線與相應的其他兩個內角之外角的平分線交於三角形的三個旁心.

"三角形的五心"有各自獨立的性質以及相關的課題.

如果**"五心"互相聯繫,互相包容,互相滲透**,更可以推出許多**"奇妙的結論"**,眞是"五

心相(暉)映”擦火花,“奇妙結論”好觀賞!

1. 從**“三角形的五心”**的定義可知,三角形的旁心一定在三角形的外邊;三角形的內心和三角形的重心定在三角形內部;而三角形的外心和垂心,則有可能在三角形的內部、外部或邊上.

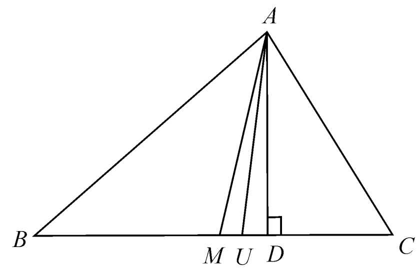


圖1

2. 若 $\triangle ABC$ 是等腰三角形有且僅有一雙邊 AB,AC 相等,則角平分錢 AU、中線 AM,高 AD 相重合,合而爲一,但內心、重心、垂心並不重合爲一點. 若 $\triangle ABC$ 是等邊三角形,則它的內心、外心、重心、垂心重合,合而爲一、若 $\triangle ABC$ 的邊 AB、AC 不相等,則角平分線 AU、中線 AM、交 AD 必不重合,則它的重心、外心、垂心諜也不重合;這時,AU 必定位於 AM、AD 之間(見圖 1)(請讀者自己證明).

3. 從三角表的旁心定理和旁心定義,可推出三角形的內心 I、三角形的三個旁心 I_1、I_2、I_3 共四個點組成一個**垂心組**,即 I 是 $\triangle I_1I_2I_3$ 的垂心,I_1 是 $\triangle II_2I_3$ 的垂心,I_2 是 $\triangle II_1I_3$ 的垂心,而 I_3 是 $\triangle II_1I_2$ 的垂心(見圖 2).

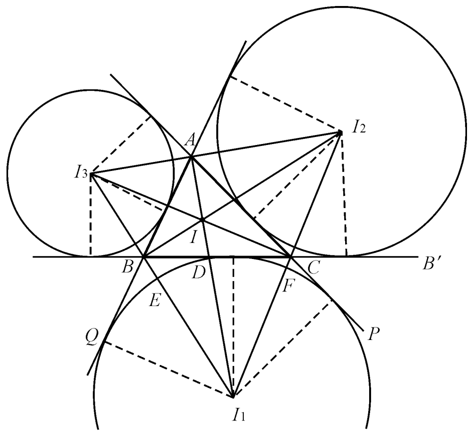
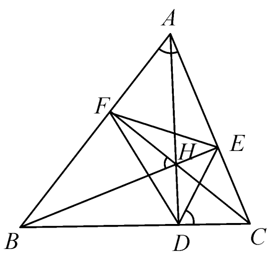


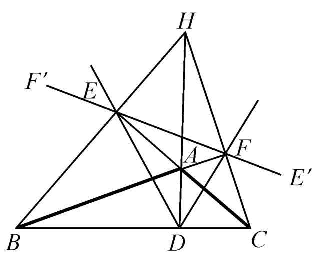
圖2

4. 三角形(非直角三角形) 的三條高的垂足連成的三角形,叫做**原三角形的垂足三角形**. 如圖 3 和圖 4 中,D、E、F 是 $\triangle ABC$ 的三條高的垂足;$\triangle DEF$ 就是 $\triangle ABC$ 的垂足三角形.



(∠BAC爲銳角)

圖3



(∠BAC爲鈍角)

圖4

由此,可以看出:

(1) 由圖 3 和圖 4,可知:$\triangle ABC$ 的高正好就是 $\triangle DEF$ 的內角或外角的平分線. AD 是 $\angle EDF$ 的平分錢($\angle ADE = \angle ADF$);BE、CF 分别是 $\angle DEF$、$\angle DFE$(或其外角 $\angle DEF'$、$\angle DFE'$) 的平分線(注意到 $\triangle ABC$ 中四點共圓,學生可自己作出證明).

(2) 於是,可進而看出:若 $\triangle ABC$ 是銳角三角形(圖 3),則它的垂心 H 就是它的垂足三角形 DEF 的內心(三個頂點 A、B、C 是 $\triangle DEF$ 的旁心). 若 $\triangle ABC$ 是鈍角三角形(圖4),則它的垂心 H 是它的垂足三角形 DEF 的旁心($\angle BAC$ 爲鈍角的情形下:A 爲 $\triangle DEF$ 的內心,B、C

是 $\triangle DEF$ 的旁心).

5. 三角形的任一頂點到垂心的距離,等於外心到對邊的距離的二倍.

〔**已知**〕H 是 $\triangle ABC$ 的垂心,O 是外心,M、N、L 分別是 BC、CA、AB 的中點(從而 $OM \perp BC$,$ON \perp CA$,$OL \perp AB$;即 OM、ON、OL 爲 O 到 BC、CA、AB 的距離).

〔**求证**〕$AH = 2 \times OM$,$BH = 2 \times ON$,$CH = 2 \times OL$.

〔**证法一**〕如圖 5,取 BH 的中點 P;

連 PM、PL. 由 $LP \parallel AH$、$MP \parallel CH$ 及 $AH \parallel OM$、$CH \parallel OL$,得 $LP \parallel OM$、$MP \parallel OL$;因此,得 $OLPM$ 爲平行四邊形;

從而,由 $OM \underline{\underline{\parallel}} LP$、$LP = \frac{1}{2}AH$,就證得 $OM = \frac{1}{2}AH$.

同理,有 $OL = \frac{1}{2}CH$,$ON = \frac{1}{2}BH$.

也就是:$AH = 2 \cdot OM$,$BH = 2 \cdot ON$,$CH = 2 \cdot OL$.

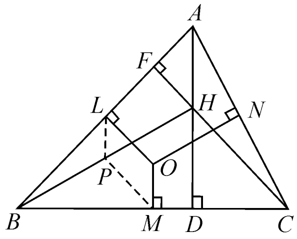


圖5

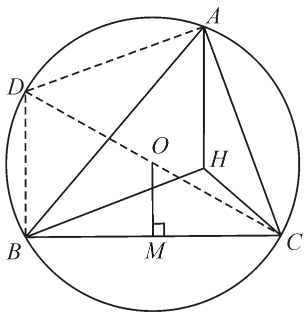


圖6

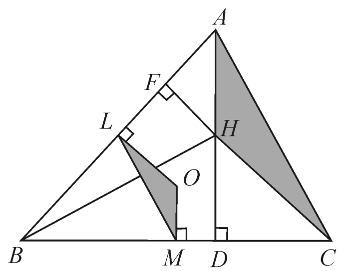


圖7

〔**证法二**〕如圖6,以 O 爲圓心,作出 $\triangle ABC$ 的外接圓. 引直徑 COD;連 DB、DA,則 $DB \perp BC$,$DA \perp AC$. 已知 $AH \perp BC$、$BH \perp AC$,故得 $DB \parallel AH$,$DA \parallel BH$;即,$ADBH$ 爲平行四邊形. 所以,$DB = AH$. 但 $OM = \frac{1}{2}DB$,於是,得 $AH = 2 \times OM$.

〔**证法三**〕如圖7,連 ML. 由 $ML \parallel AC$、$OM \parallel HA$、$OL \parallel HC$,就可得到 $\triangle OLM \backsim \triangle HCA$,且相似比爲 $LM : AC = 1 : 2$. 因此,得 $\frac{OM}{AH} = \frac{OL}{CH} = \frac{LM}{AC} = \frac{1}{2}$. 也就是,證得 $2 \times OM = AH$,$2 \times OL = CH$.

據這個定理,容易想到:若 OM 等於零,則 AH 也等於零;即,當外心 O 落在邊 BC 的中點 M 時,垂心 H 落在頂點 A 上. 這正是 $\triangle ABC$ 爲直角三角形的情形.

6. 任一三角形的外心、垂心、重心,都在同一直綫上. 這條直線叫作**三角形的尤拉**(*Euler*)線.

〔**證明**〕設 O、H 爲 $\triangle ABC$ 的外心和垂心,連 OH;作 BC 邊上的中線 AM,交 OH 於 G.(如圖 8 所示).

要證這個交點 G 就是 $\triangle ABC$ 的重心,只要證得 $AG : GM = 2 : 1$ 即可.

由 $AH /\!/ OM$ 得 $\angle HAG = \angle OMG, \angle AHG = \angle MOG$;

因此,$\triangle AHG \backsim \triangle MOG$.

從而有 $AG : GM = AH : MO$.

但,$AH = 2 \times OM$(見本部分5);即 $AH : MO = 2 : 1$. 故 $AG : GM = 2 : 1$;也就是,G 爲三角形 ABC 的重心.

可見,重心 G 必在直線 OH 上.

這樣,就證明了:$\triangle ABC$ 的外心 O、垂心 H、重心 G 在同一直線上.

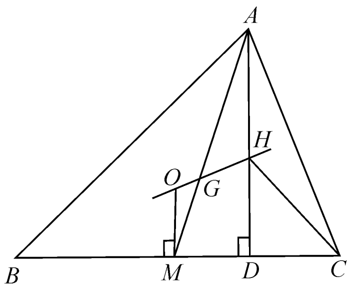


圖8

〔**注意**〕任一三角形的外心 O、重心 G、垂心 H 必在同一直線上;但內心 I 則未必也在這一直線 OH 上.

7. 設 O、H 爲 $\triangle ABC$ 的外心和垂心;又,I 爲 $\triangle ABC$ 的內心(AI 是 $\angle BAC$ 的平分線). 如圖9,以 O 爲圓心,作 $\triangle ABC$ 的外接圓;又,作出直徑 AOE 及 BC 上的高 AD;則 $\triangle ABE \backsim \triangle ADC$. 從而就得到:$\angle BAO = \angle CAH$;

從而可推出:$\angle OAI = \angle HAI$.

這說明:AI 不僅是 $\angle BAC$ 的平分線,而且還是 $\angle OAH$ 的平分線(或說,不僅直線 AB、AC 關於 AI 爲對稱,而且 AO、AH 也關於 AI 爲對稱). 象這樣的兩線 AO、AH,就叫作 $\angle BAC$ 的**等角線**.

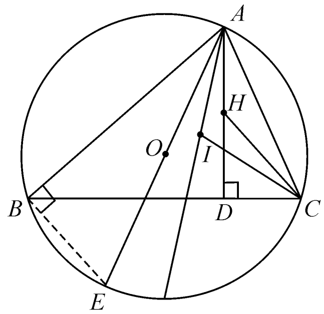


圖9

(一般地講,若經過某角的頂點的兩條直線關於這個角的平分線成對稱,就說這兩條直線是這角的**等角線**). 很明白,對於 O、H 這兩點來說,不僅有**“AO、AH 關於 AI 為對稱”**,而且也還有**“BO、BH 關於 BI 為對稱,CO、CH 關於 CI 為對稱”**;象這樣的兩點 O、H,就叫作 $\triangle ABC$ 的**等角共軛點**;或者說,這樣的兩點關於 $\triangle ABC$ **互為等角共軛點**(即,O 是 H 的等角共軛點,H 是 O 的等角共軛點).

在三角形的各心之中,外心與垂心互爲等角共軛點,而內心則是**自等角共軛點**(即,內心的**等角共軛點**是它自身).

8. 如圖10,$\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 的平分線,與外接圓相交於 P;以 P 爲圓心、PC 爲半徑作圓,與直線 AP 相交於兩點 I 和 I_1.

可以證明,這兩點 I、I_1 正好就是 $\triangle ABC$ 的內心和旁心.

〔**證明**〕據已知,AP 爲 $\angle BAC$ 的平分線 $\therefore P$ 是 $\overset{\frown}{BPC}$ 的中點,

$\therefore \overset{\frown}{PB} = \overset{\frown}{PC}, PB = PC$.

據 $PI = PC$,可知 $\angle PIC = \angle PCI$.

但 $\angle PIC = \angle PAC + \angle ACI$,

而 $\angle PCI = \angle PCB + \angle BCI$,

且 $\angle PAC = \angle PAB = \angle PCB$(同弧上的圓周角).

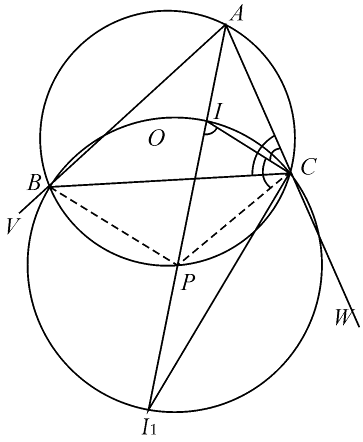


圖10

於是,得 $\angle ACI = \angle BCI$.

可見,CI 是 $\angle ACB$ 的平分線.

從而,I 點是兩條內角平分線(AP、CI)的交點;也就是,I 爲 $\triangle ABC$ 的內心.

再者,由 $CI \perp CI_1$(直徑 II_1 上的圓周角 $\angle ICI_1 = 90°$)及 CI 是 $\angle ACB$ 的平分線,就推得 CI_1 必是外角 $\angle BCW$ 的平分線. 於是,I_1 就是內角平分線 AP 與一條外角平分線 CI_1 的交點;也就是說,I_1 爲 $\triangle ABC$ 的一個旁心.

如上述,還可看到:**三角形內心與旁心連成的線段,被外接圓所平分**.

*9. 每個三角形都有一個外接圓和一個內切圓;但是,其他的多邊形(例如,四邊形、五邊形、等等)就不一定有外接圓,也不一定有內切圓,當然,更不一定既有外接圓、同時又有內切圓.

既內接於一個圓、同時又外切於另一個圓的多邊形,叫作**雙心多邊形**.

三角形是最簡單的雙心多邊形;(它有一個外心和一個內心). 下面,我們就來研究它的外接圓半徑、內切圓半徑與兩圓連心線之間的關係,從而得出**一個關於三角形的外心和內心之間距離的定理**(見圖 11).

設 R、r 分別爲 $\triangle ABC$ 的外接圓及內切圓半徑,d 爲這兩圓的圓心(即外心 O 與內心 I)之間的距離,也就是 $d = OI$.

連直線 AI 並延長,交外接圓 O 於 P;則 P 爲 $\overparen{BC}$ 的中點. 作直徑 $PQ(\perp BC)$,連 QC、PC(圖 11). 設內切圓 I 與 AC 相切於 $T(IT = r)$. 在直角三角形 QPC、AIT 中,有 $\angle PQC = \angle IAT$,

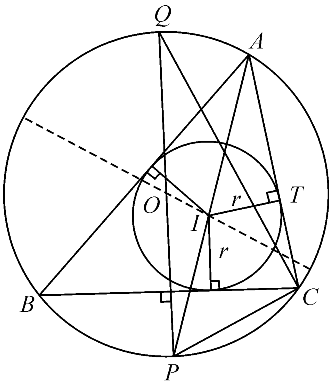


圖11

故 $\triangle QPC \backsim \triangle AIT$.

因此,$QP : AI = PC : IT$.

於是,得到 $QP \cdot IT = AI \cdot PC$.

但 $QP = 2R$,$IT = r$,且 $PC = PI$;

$\therefore 2Rr = AI \cdot PI$.

據**"圓的相交弦定理"**,得

$AI \cdot PI = (R + d) \cdot (R - d) = R^2 - d^2$.

因此,$2Rr = R^2 - d^2$;也就是,$d^2 = R^2 - 2Rr$.

上面的式子即 $2Rr = R^2 - d^2$,有時也寫作

$$\frac{1}{R+d} + \frac{1}{R-d} = \frac{1}{r}.$$

據公式 $d^2 = R^2 - 2Rr$ 可知:由已知的外接圓半徑(R)和內切圓半徑(r),就可以按這個公式來推算出三角形的外心 O 與內心 I 之間的距離(d). 特別地,在正三角形的情形,有 $R = 2r$,從而 $d = 0$.

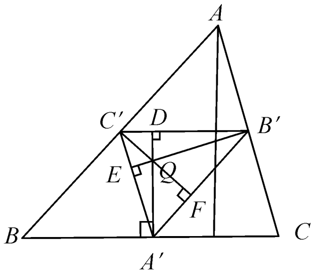
上面得到的這個關於三角形的外心和內心之間距離的定理是:"設 R、r 爲三角形的外接圓和內切圓的半徑,則三角形的外心和內心之間的距離爲 $d = \sqrt{R^2 - 2Rr}$",稱爲**察坡**(*Chapple*)**定理**;有時也稱它爲**尤拉**(*L. Euler*)**定理**.

10.〔已知〕A'、B'、C' 是 $\triangle ABC$ 的各邊 BC、CA、AB 的中點;

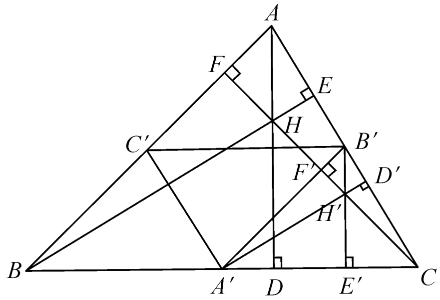
〔求证〕(1) $\triangle ABC$ 的外心是 $\triangle A'B'C'$ 的垂心;(2) $\triangle ABC$ 的垂心 H 與頂點 C 連線的中點是 $\triangle A'B'C'$ 的垂心.

〔證明〕(1) 據已知,$\triangle ABC$ 的各邊的中垂線,就是 $\triangle A'B'C'$ 的各邊上的高線,故 $\triangle ABC$ 的外心正好是 $\triangle A'B'C'$ 的垂心〔如圖 12(1)〕.

(2) 設 HC 的中點爲 H';$A'H'$ 爲 $\triangle CHB$ 的中位線〔如圖 12(2)〕. ,故 $A'H' \parallel BH$,因而 $A'H' \perp AC$;又 $CF \perp AB$,則 $CF' \perp A'B'$,而 H' 在 CF' 上;由 H' 爲 $A'D'$ 和 CF' 的公共點,可知 H' 爲 $\triangle A'B'C'$ 的垂心.



(1)



(2)

圖12

11.〔已知〕在 $\triangle ABC$ 的外接圓上,取$\overset{\frown}{BC}$、$\overset{\frown}{CA}$、$\overset{\frown}{AB}$ 的中點 A'、B'、C'.

〔求证〕$\triangle ABC$ 的內心是 $\triangle A'B'C'$ 的垂心(見圖 13).

〔證明〕據已知 AA'、BB'、CC' 分別是 $\triangle ABC$ 的各角的平分綫,故它的交於 I,是 $\triangle ABC$ 的內心.

設 AA'、BB'、CC' 分別與 $\triangle A'B'C'$ 的邊 $B'C'$、$C'A'$、$A'B'$ 相交於 P、Q、S;如圖 13,$\angle 1$ 所對的弧爲 β,$\angle A'B'C'$ 所對的弧爲 $\alpha+\gamma$;又,$\angle 2$ 所對之弧爲 γ,而,$\angle A'C'B'$ 所對之弧爲 $\alpha+\beta$;故得 $\angle 1+\angle A'B'C' = \alpha+\beta+\gamma = \angle 2+\angle A'C'B'$. 但 $\angle 1+\angle 2+\angle A'B'C'+\angle A'C'B' = 180°$,故 $\angle 1+\angle A'B'C' = 90°$;因此,$\angle A'PB' = 180° - (\angle 1+\angle A'B'C') = 90°$. 這就證明了 $AA' \perp B'C'$. 同理,可證 $BB' \perp C'A'$,$CC' \perp A'B'$. 所以 AA'、BB'、CC' 的交點 I 是 $\triangle A'B'C'$ 的垂心.

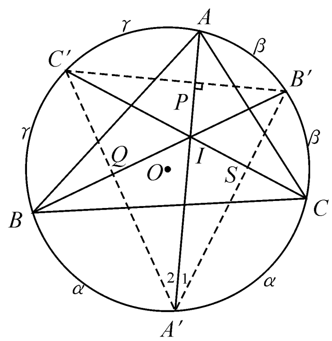


圖13

12. 設 $\triangle ABC$ 爲等腰三角形,一圓 O 切 $\triangle ABC$ 二腰 AB、AC 於 D、E,又切外接圓於 T. 試證明 DE 的中點 M 爲 $\triangle ABC$ 的內心〔第 20 屆國際數學奧林匹克(1978 年在羅馬尼亞舉行) 的第四道競賽題(見圖 14)〕.

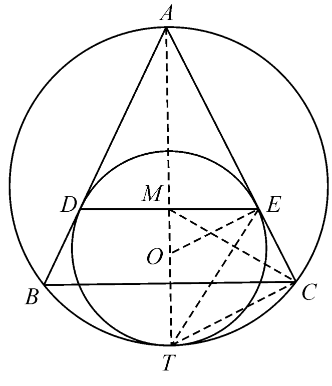


圖14

〔证法 1〕利用圓周角定理(見圖 14).

設切圓的圓心爲 O,連 OE、OT、TE、TC、CM、AM,據切線長

相等知,$AD = AE$,故 $\triangle ADE$ 爲等腰三角形.

今已知 M 爲 DE 的中點,因此 AM 爲底邊 DE 的中線,故 AM 平分 $\angle DAE$. 於是 AM 延線過 O 且爲 BC 的中垂線. 因此 AM 過 $\triangle ABC$ 的外心,所以通過二圓切點 T.

今 AT 爲外接圓直徑,故 $\angle ACT = Rt\angle$,

$\therefore OE \parallel TC$;

又 $\angle AME = Rt\angle$,

$\therefore M$、E、C、T 共圓.

$\angle ECM = \angle ETM = \angle OET = \angle ETC = \angle EMC = \angle MCB$.

$\therefore CM$ 平分 $\angle C$. 故 M 爲 $\triangle ABC$ 的内心.

〔**证法** 2〕利用相似形(見圖 15)

$\because AD = AE$(切線長相等)

故 $\triangle ADE$ 爲等腰三角形. AM 爲底邊的中線,故 AM 平分 $\angle DAE$,也即平分 $\angle BAC$.

因此,AM 延線通過 O(切圓的圓心),又爲 BC 的中垂線. 故 AM 通過外接圓心. 因而也通過兩圓的切點 T. 故 AT 爲外接圓的直徑. 設它交 BC 於 P,連 TC、OE,又引 $MN \perp AC$ 於 N.

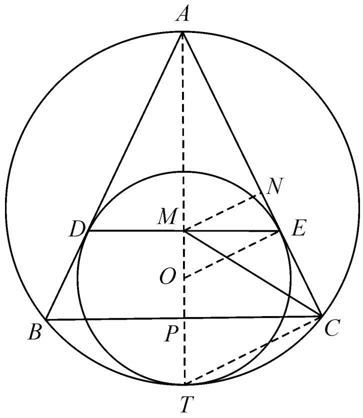


圖15

今 $OE \perp AC$,故 $MN \parallel OE \parallel TC$,

$\therefore \dfrac{AO}{AT} = \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{AM}{AP}$.

$\therefore \dfrac{AO}{AT - AO} = \dfrac{AM}{AP - AM}$,即 $\dfrac{AO}{OT} = \dfrac{AM}{MP}$.

但 $\triangle AOE \backsim \triangle AMN$,故 $\dfrac{AO}{OE} = \dfrac{AM}{MN}$.

又 $OT = OE$,$\therefore \dfrac{AM}{MP} = \dfrac{AM}{MN}$,即 $MP = MN$.

故 M 在 $\angle C$ 平分線上,因而 M 爲 $\triangle ABC$ 的内心.

〔**证法** 3〕(見圖 16),今 M 爲等腰 $\triangle ADE$ 底邊 DE 的中點,故 AM 平分 $\angle BAE$ 且爲 DE 的中垂線. 又 $\triangle ABC$ 也爲等腰三角形,故頂角 $\angle BAC$ 的平分線也爲底邊 BC 的中垂線.

於是 AM 延線過切圓圓心及 $\triangle ABC$ 的外心.

因此,AM 過二圓切點 T.

連 TD、TE,則 $TD = TE$. 又 $\angle 3 = \angle 4$,$\angle ACT = 90°$,從而 $\angle ECT = 90°$.

$\therefore Rt\triangle TDM \cong Rt\triangle TEC$.

$\therefore EC = DM = ME$.

但 $EM \perp TM$,從而 $\angle TME = 90°$,$\triangle TEM \cong \triangle TEC$.

故 ET 平分 $\angle CTM$,即 $\angle 5 = \angle 6$,

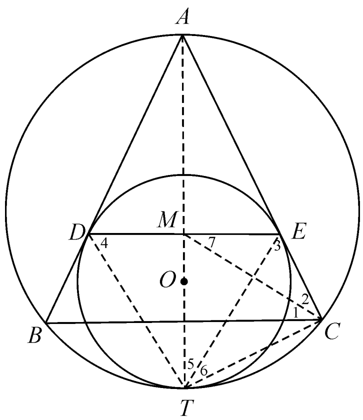


圖16

但 $\angle 6 = \angle 7 = \angle 1, \angle 5 = \angle 2$,

$\therefore \angle 1 = \angle 2$, CM 平分 $\angle C$.

故 M 爲 $\triangle ABC$ 的內心.

〔**证法** 4〕利用分角線及相似形性質(見圖 17).

首先想到的是 $\triangle ABC$ 的內心是三個內角平分線的交點. AM 是 $\triangle ABC$ 的 $\angle BAC$ 平分線,只要證 BM 是 $\angle ABC$ 的平分線,那麼 M 便是 $\triangle ABC$ 的內心.

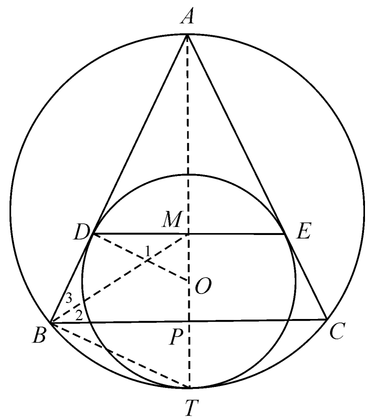


圖17

$\because DE \parallel BC$, $\therefore \angle 1 = \angle 2$.

現在只要證 $\angle 3 = \angle 1$,也就是證 $DB = DM$ 就行.

由於 $OD \perp AB$, $TB \perp AB$(AT 爲外接圓直徑,如前證),

$\therefore OD \parallel TB$, $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AO}{OT} = \dfrac{AO}{OD}$.

又 $\triangle AOD \backsim \triangle ADM$, $\therefore \dfrac{AO}{OD} = \dfrac{AD}{DM}$,即 $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AD}{DM}$.

$\therefore DB = DM$, $\therefore \angle 3 = \angle 1 = \angle 2$.

因此 BM 平分 $\angle ABC$,故 M 爲 $\triangle ABC$ 的內心.

〔**证法** 5〕有關二圓相切的題目,過切點引二圓的公切線很有幫助. 從這思路出發,又是一法(見圖 18).

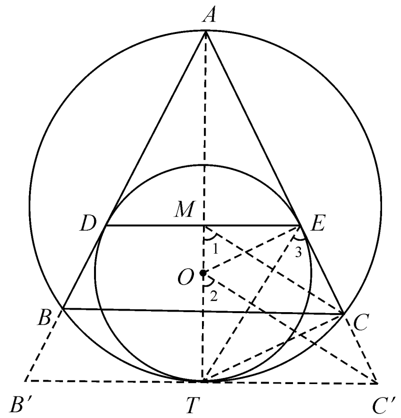


圖18

過 T 引二圓公切線 $B'C'$ 交 AB、AC 延線於 B'、C'. 圓 O 爲 $\triangle AB'C'$ 的內切圓, $C'O$ 是 $\angle AC'B'$ 的平分線.

由於 $BC \parallel B'C'$(同垂直於 AT),

因此 $\triangle ABC \backsim \triangle AB'C'$.

如能證得 $CM \parallel C'O$,則 CM 是 $\angle ACB$ 的平分線.

要證 $CM \parallel C'O$,可試證同位角 $\angle 1 = \angle 2$.

$\because \angle EMT = \angle ECT = Rt\angle$,

$\therefore M$、E、C、T 共圓, $(\angle TME + \angle TCE = 2 \times 90° = 180°)$ $\therefore \angle 1 = \angle 3$.

又 $\angle OEC' = \angle OTC' = Rt\angle$,

$\therefore O$、E、C'、T 共圓. $\therefore \angle 3 = \angle 2$.

$\therefore \angle 1 = \angle 2$, $CM \parallel C'O$.

故 CM 爲 $\angle ACB$ 平分線, $\therefore M$ 爲 $\triangle ABC$ 的內心.

〔**证法** 6〕如圖 19, $\triangle ABC$ 爲等腰三角形.

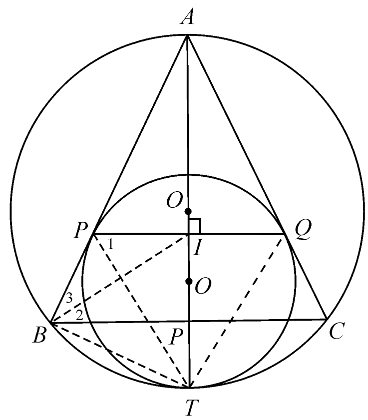


圖19

設 T 是兩圓的切點, I 是 PQ 的中點;連 AT 及 BT、PT、BI.

由於 $\triangle ABC$ 是等腰三角形,所以 AT 是 $\triangle ABC$ 的外接圓的直徑. 又,與 $\triangle ABC$ 的外接圓內切於 T 的圓和 AB、AC 相切於 P、Q,所以 $AP = AQ$;因此, PQ 的中點 I 必在 AT 上,

且 AI 平分 $\angle PAQ$,$AI \perp PQ$. 於是,有 $\overset{\frown}{PT} = \overset{\frown}{QT}$;從而得 $\angle BPT = \angle PQT = \angle QPT$. 由此,又推得 $\triangle PBT \cong \triangle PIT(S, Rt\angle, a)$,$\therefore PB = PI$. 這樣一來,就得到 $\angle 1 = \angle 3$,而 $\angle 1 = \angle 2$(據 $PQ \parallel BC$);故 $\angle 3 = \angle 2$. 即,BI 平分 $\angle ABC$. 可見,這點 I 是 $\angle BAC$ 的平分線 AI 與 $\angle ABC$ 的平分線 BI 的交點. 也就是,I 點是 $\triangle ABC$ 的內心.

13. 若在 $\triangle ABC$ 的外側作正三角形 $\triangle BCA'$、$\triangle CAB'$ $\triangle ABC'$,則 AA'、BB'、CC' 三線相交於一點(此點稱爲**費馬**(*Fermat*)**點**)(見圖 20).

〔**证法** 1〕作 $\triangle BCA'$ 的外接圓,交 AA' 於 O,連 OB、OC.

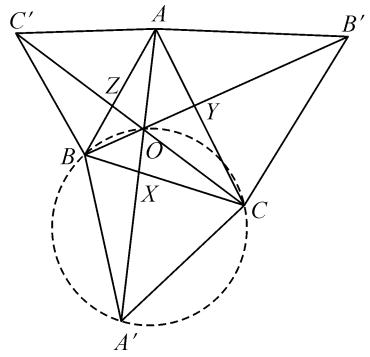


圖20

因 A'、C、O、B 共圓,故

$\angle BOC = 180° - \angle BA'C = 180° - 60° = 120°$.

又 $\angle COA' = 60° = \angle BOA'$($\overset{\frown}{CA'} = 60° = \overset{\frown}{BA'}$),

故 $\angle COA = 180° - \angle COA' = 120°$.

又 $\angle AB'C = 60°$,$\therefore C$、O、A、B' 共圓.

$\therefore \angle AOB' = \angle ACB' = 60° = \angle BOA'$,

$\therefore B$、O、B' 共線,即 AA',BB' 交於 O,

同理可證 C、O、C' 也共線,即 AA',CC' 也相交於 O,

故 AA'、BB'、CC' 三線共點於 O—— **費馬**(*Fermat*)**點**.

〔**证法** 2〕利用旋轉法及全等形(見圖 21).

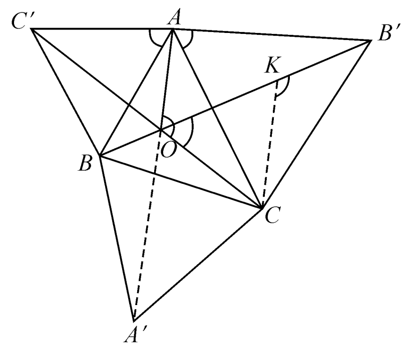


圖21

設 $BB' \times CC' = O$,則 $\angle COB' = 60°$(因 $\triangle CAC'$ 繞 A 依逆時針方向旋轉60°可與 $\triangle B'AB$ 疊合,此時 CC' 重合於 $B'B$).

連 OA、OA',作等邊 $\triangle COK$.

今 $CO = CK$,$CA = CB'$,$\angle OCK = \angle ACB' = 60°$,

又 $\angle ACO = \angle B'CK$(等減),

故 $\triangle COA \cong \triangle CKB'$

因此 $\angle COA = \angle CKB' = 180° - \angle CKO = 180° - 60° = 120°$.

其次,把 $\triangle COA'$ 繞 C 依順時針方向旋轉 60° 可與 $\triangle CKB$ 疊合,

所以 $\angle COA' = \angle CKB = 60°$,

故 $\angle COA + \angle COA' = 120° + 60° = 180°$.

即 A、O、A' 共線. 本題得證.

〔**证法** 3〕設 $BB' \times CC' = O$,連 AO、OA',把 $\triangle CAC'$ 繞依逆時針方向旋轉 60° 便與 $\triangle B'AB$ 疊合(見圖 22).

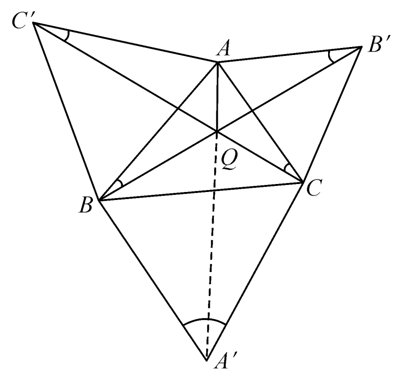


圖22

故 $\angle COB' = 60° = \angle CAB'$.

$\therefore C$、O、A、B' 共圓,

$\angle AOB' = \angle ACB' = 60° = \angle AC'B$.

$\therefore A$、O、B、C' 共圓,

$\angle AOB = 180° - \angle AC'B = 180° - 60° = 120° = \angle AOC$.

因此 $\angle BOC = 120°$,故 B、O、C、A' 共圓.

$\angle BOA' = \angle BCA' = 60°$,

$\therefore \angle AOB + \angle BOA' = 180°$,

故 AO、OA' 爲一直線.

則 AA',BB',CC' 三線相交於一點 O.

*〔**注**〕(證法 1) 至(證法 3) 均視 $\triangle ABC$ 的任何一內角均不爲 120° 而加以研究.

當 $\triangle ABC$ 有一角爲120°(例如,$\angle A = 120°$) 時,則結論是顯而易見的(這時,BA、AB' 成爲一直線 BB',$C'A$、AC 成爲一直線 $C'C$,BB' 與 $C'C$ 交於 A,從而 AA' 與 BB'、CC' 都經過 A 點). 下面,就 $\triangle ABC$ 的各角都不爲 120° 的情形來證明.

〔**证法** 4〕假定 BB'、CC' 相交於點 Q(非 A 點);連 AQ、QA'.

首先,由於 $AB = AC'$,$AB' = AC$,及 $\angle BAB' = \angle BAC + 60° = \angle C'AC$,

故 $\triangle BAB' \cong \triangle C'AC$.

從而知,A 與 BB' 的距離等於 A 與 CC' 的距離($\because$ 全等三角形的對應邊上的高相等);

因此,QA 爲 $\angle B'QC'$ 的平分線.

由 $\angle AB'Q = \angle ACQ$,推得 A、Q、C、B' 共圓;

故 $\angle B'QC = \angle B'AC = 60°$,$\angle B'QA = \angle B'CA = 60°$;$\therefore \angle AQC = 120°$.

又由補角定義知 $\angle BQC = 120°$.

因 $\angle BA'C = 60° = 180° - \angle BQC$,

故 Q、B、A'、C 共圓;從而 $\angle CQA' = \angle CBA' = 60°$.

所以 $\angle AQC + \angle CQA' = 120° + 60° = 180°$.

也就是,AQ、QA' 爲一直線(即,AA' 經過 Q 點).

這樣就證明了:AA' 與 BB'、CC' 相交於一點 Q.

上述的這個 Q 點,叫作 $\triangle ABC$ **的正等角中心**;它也是**三角形的巧合點**之一.

14.〔**已知**〕AD 是 $\triangle ABC$ 的一條高線;以 AB、AC 爲邊,在 $\triangle ABC$ 的外側作正方形 $ABEF$ 和正方形 $ACGH$(見圖 23) 連 BG、EC.

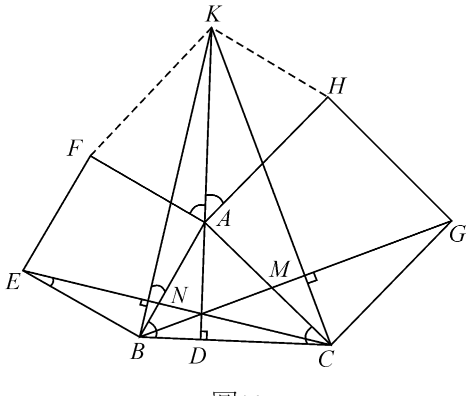


圖23

〔**求证**〕AD、BG、CE 相交於一點.

〔**證明**〕延長 DA 至 K,使 $AK = BC$;連 FK、KH,推得 $\triangle KAH \cong \triangle BCA$,$\triangle KAF \cong \triangle CBA(s.a.s)$,$\angle KAH = \angle BCA$,$\angle KAF = \angle CBA$,. 連$KC$、$KB$,從而可以推得 $\triangle KAC \cong \triangle BCG$,$\triangle AKB \cong \triangle CBE(s.a.s)$,於是 $\angle ACK = \angle CGB$,$\angle KBA = \angle BEC$,從而可推得:$BG \perp KC$,$CE \perp KB$. ($\angle KCM + \angle CMG = \angle MGC + \angle CMG = 90°$,同理 $\angle KBN + \angle ENB = 90°$)

這樣一來,AD、BG、CE 就是 $\triangle KBC$ 的三條高線,所以,這三線 AD、BG、CE 必相交於一點.

15. 如圖24,AB 是圓 O 的直徑;通 A、B 作圓 O 的切線 AP、BQ,與圓 O 的另一切線 PCD 相交於 P、Q,C 爲 PQ 上的切點,過 C 作 $CD \perp AB$,D 爲垂足,

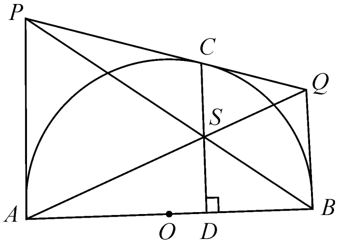


圖24

〔**求证**〕AQ、BP、CD 共點.

〔**證明**〕設 PB、CD 相交於 S 點,因 $PC = PA$,$QC = QB$,故 $\frac{CS}{CP} = \frac{QB}{QP} = \frac{QC}{QP}$,$\frac{SD}{PA} = \frac{DB}{AB}$;又 $CD \perp AB$,$\therefore CD \parallel BQ \parallel PA$,$\frac{QC}{QP} = \frac{BD}{BA} = \frac{DB}{AB}$. 因此$\frac{CS}{CP} = \frac{SD}{PA}$;由 $PC = PA$,即得 $CS = SD$. 也就是,S 是 CD 的中點.

又,設 AQ、CD 相交於 S';同理,證明得 S' 也是 CD 的中點. 然而 CD 只有一個中占,故 S' 與 S 相重合. 因此,AQ、BP、CD 三線共點.

16.〔**已知**〕如圖 25 所示,直線 x、y 相交於 O 點,在 x 上,取三點 A、B、C,使 $OA = AB = BC$;又在 y 上,取三點 L、M、N,使 $LO = OM = MN$.

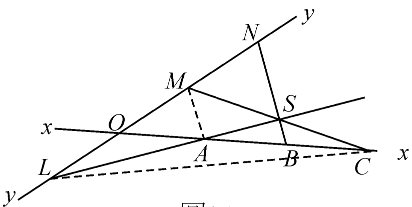


圖25

〔**求证**〕三直線 LA、MC、NB 相交於一點.

〔**證明**〕設 NB 與 MC 相交於 S 點. 連 MA,則 MA 爲 $\triangle OBN$ 的中位線;故 $MA \parallel NB$. 再由 SB(即 NB) $\parallel MA$ 及 B 爲 AC 的中點,得知 S 爲 MC 的中點.

連 LC,則 CO 爲 $\triangle CML$ 的中線,從而 A 爲 $\triangle CML$ 的重心. 因此,LA 也是 $\triangle CML$ 的中線;故 LA 必經過 MC 的中點 S. 這就證明了:LA、MC、NB 恰巧相交於一點 S.

17.〔**已知**〕在 $\triangle ABC$ 的外側作正方形 $ABDE$、$ACFG$.

〔**求证**〕BG、CE、DF 共點(見圖 26).

〔**證明**〕由於 $\angle BAG = 90° + \angle BAC = \angle EAC$ 及 $AB = AE$,$AG = AC$,故 $\triangle ABG \cong \triangle AEC$.

設 BG、CE 的交點爲 K;連 AK 及 KD、KF. 由 $\angle AGK = \angle AFK$(全等三角形的對應角相等),知 A、K、C、G 共圓.

因此,$\angle GKC = \angle GAC = 90°$,連 C、G,則有 $\angle AKG = \angle ACG = 45°$;故 $\angle AKC = 135°$.

又 $\angle AFC = 45°$,故 $\angle AKC + \angle AFC = 180°$.

因此,A、K、C、F 共圓,故 $\angle AKF = \angle ACF = 90°$.

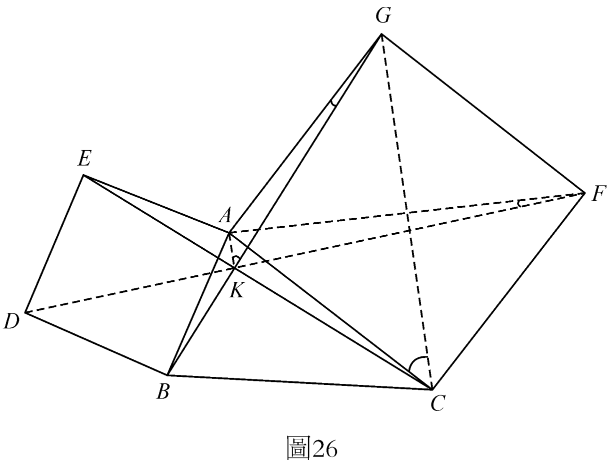


圖26

同理,由 A、E、D、K 共圓,推得 $\angle AKB = 135°$;

再由 A、D、B、K 共圓,得 $\angle AKD = \angle ABD = 90°$.

於是,由 $\angle AKF = 90°$, $\angle AKD = 90°$,可知 DKF 爲一直線;即 DF 經過 K 點.

這樣,就證明了 BG、CE、DF 共點 K.

18.〔**已知**〕$\triangle ABC$ 中內切圓 I 與各邊 BC、CA、AB 相交於 D、E、F(如圖 27).

〔**求证**〕AD、BE、CF 相交於一點.

〔**證明**〕設 BE、CF 相交於 K 點;連 AK,交 BC 於 D'(我們來證明 AD' 就是 AD;也就是要證明 D'、D 相重合.)

因 D、E、F 分别爲圓 I 各邊上的切點,故有

$AE = AF$, $BF = BD$, $CD = CE$.

於是,要證 D'、D 相重合,就要先來證出 $BD' = BF$, $CD' = CE$.

過 A,作 BC 的平行線與 BE、CF 的延長線分别相交於 X、Y.

由 $\triangle AKX \backsim \triangle D'KB$ 及 $\triangle AKY \backsim \triangle D'KC$,可知

$\frac{AX}{D'B} = \frac{AK}{D'K} = \frac{AY}{D'C}$;即 $\frac{AX}{AY} = \frac{BD'}{D'C}$.

又由 $\triangle AXE \backsim \triangle CBE$ 及 $\triangle AYF \backsim \triangle BCF$,知

$\frac{AX}{CB} = \frac{AE}{CE}$, $\frac{AY}{BC} = \frac{AF}{BF}$;

因此,$\frac{AX}{AY} = \frac{AE}{CE} \cdot \frac{BF}{AF}$.

但,內切線長相等知,$AE = AF$, $BF = BD$, $CE = CD$.

故得 $\frac{AX}{AY} = \frac{BD}{DC}$.

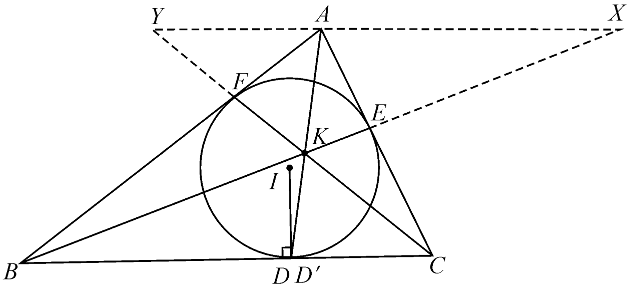


圖27

這樣一來,就得到 $\frac{BD'}{D'C} = \frac{BD}{DC}$;

利用合比定理,得 $\frac{BD'}{BC} = \frac{BD}{BC}$.

於是,有 $BD' = BD$;可見 D' 與 D 必是同一個點;

從而可知:直線 AD'(即 AK)與 AD 是同一直線.

這就證明了 AD 經過 BE、CF 的交點 K;

也就是,AD、BE、CF 相交於一點 K.

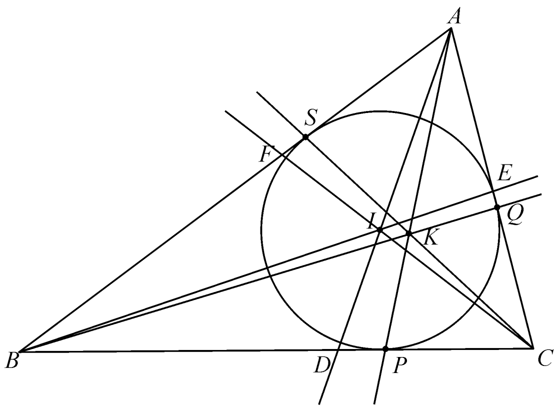


圖28

* 本題所證的這個交點 K,也是**三角形的巧合點**之一,名爲**葛干涅**(*Ger gonne*)**點**.

* **還須注意**:把 $\triangle ABC$ 的各頂點 A、B、C 分别與內切圓 I 在對邊上的切點 P、Q、S 連接起來,這樣的三條連線 AP、BQ、CS 也**恰巧相交於一點**(如圖 28)中的 K 點;但這個交點也並不就是三角形的內心 I.

19.〔**求证**〕三角形的三條高相交於一點(見圖 29)(利用四點共圓之證法).

〔**證明**〕設 $\triangle ABC$ 的高 BE、CF 相交的交點爲 H;則 A、F、H、E 共圓,且 B、C、E、F 共圓.

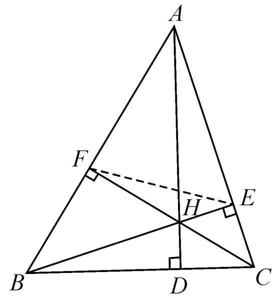


圖29

連 EF,由 B、C、E、F 共圓,得 $\angle FEB = \angle FCB$. 連 AH,並延長之,與 BC 交於 D. 由 A、F、H、E 共圓,得 $\angle FAH = \angle FEH$(即 $\angle BAD = \angle FEB$).

因此,得到 $\angle BAD = \angle FCB$.

$\because \angle FCB + \angle ABD = 90°$,

$\therefore \angle BAD + \angle ABD = 90°$.

由此可見,$\angle ADB = 90°$;即,$AD \perp BC$.

也就是,直線 AHD 也是 $\triangle ABC$ 的高.

這樣就證明了:“**$\triangle ABC$ 的三條高線 AD、BE、CF 相交於一點 H**”.

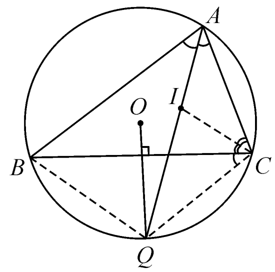


圖30

20.〔**已知**〕O、I 分別爲 $\triangle ABC$ 的外心、內心;以 O 爲圓心的圓交直線 AI 相交於 Q.

〔**求证**〕(1) $OQ \perp BC$;(2) $QI = QC$(見圖 30).

〔**證明**〕(1) 以 O 爲圓心、OA 爲半徑的圓,必經過 B、C;AI 是 $\angle A$ 的平分線,因而它與圓 O 的交點 Q 必是 $\overset{\frown}{BC}$ 的中點. 可見 $\overset{\frown}{BQ} = \overset{\frown}{QC}$,故 $OQ \perp BC$(且平分 BC).

(2) $\because$ I 爲 $\triangle ABC$ 的內心,連 QC、CI,則 CI 是 $\angle C$ 的平分線. 因 $\angle BCQ = \angle BAQ = \angle QAC$,$\angle BCI = \angle ACI$,$\angle QIC = \angle QAC + \angle ACI$,而 $\angle QCI = \angle BCQ + \angle BCI$,故得 $\angle QIC = \angle QCI$;因此,$QI = QC$.

21. 下面,研究兩個有關問題:

(1) 已知 $\triangle ABC$ 的各邊 BC、CA、AB 之長爲 a、b、c;內切圓與各邊相切的切點爲 P、Q、S. 求 $AQ(AS)$、$BP(BS)$、$CP(CQ)$ 之長(如圖 31).

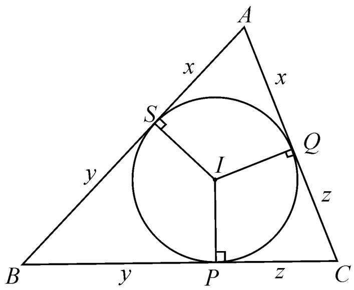


圖31

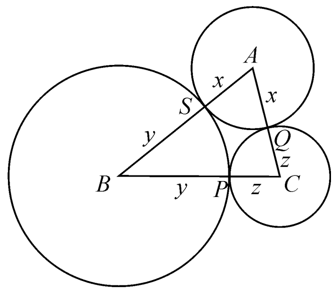


圖32

(2) 已知 $\triangle ABC$ 的各邊 BC、CA、AB 之長爲 a、b、c;分別以 A、B、C 爲圓心,各作一圓,使它們兩兩相(外)切(於 P、Q、S). 求所作三圓的半徑(BP、CP、AQ)之長(如圖 32).

從圖上,可以看出,這兩個問題實際是同一個問題. 解之,於如下(用代數方法).

〔**解**〕設 $AQ = AS = x$,$BP = BS = y$,$CP = CQ = z$;

按題意,得到方程組:

$$\begin{cases} y+z=a \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ z+x=b \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2) \\ x+y=c \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3) \end{cases}$$

(1) + (2) + (3),得 $x+y+z=\frac{1}{2}(a+b+c) \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$

(4) − (1),得 $x=\frac{1}{2}(a+b+c)-a=\frac{1}{2}(b+c-a)$;

(4) − (2),得 $y=\frac{1}{2}(c+a-b)$;

(4) − (3),得 $z=\frac{1}{2}(a+b-c)$.

〔**答**〕(1) 題 $\begin{cases} AQ(AS)=\frac{1}{2}(b+c-a), \\ BP(BS)=\frac{1}{2}(c+a-b), \\ CP(CQ)=\frac{1}{2}(a+b-c). \end{cases}$

(2) 題所求的三圓的半徑,爲$\frac{1}{2}(b+c-a)$、$\frac{1}{2}(c+a-b)$ 及$\frac{1}{2}(a+b-c)$.

上面,如設 $a+b+c=2s$,即 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$,則上面得到的結果可以表示爲 $AQ=s-a$,$BP=s-b$,$CP=s-c$.

也就是:$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$,$s-a=\frac{1}{2}(b+c-a)$,$s-b=\frac{1}{2}(c+a-b)$,$s-c=\frac{1}{2}(a+b-c)$.

22.〔**已知**〕$\triangle ABC$ 的邊長 $BC=5$,$CA=3$,$AB=4$;

〔**求**〕$\triangle ABC$ 的外接圓直徑及內切圓直徑(見圖 33).

〔**解**〕首先,我們注意到:這個 $\triangle ABC$ 的邊長爲 3、4、5,據勾股定理的逆定理,由 $5^2=3^2+4^2$,可知 $\triangle ABC$ 的直角三角形;故得外接圓的直徑長爲 5.

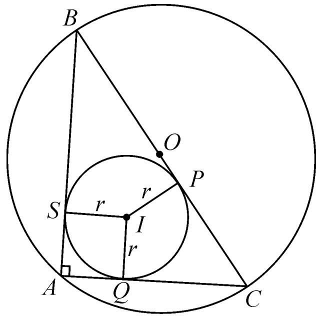


圖33

其次,內切圓半徑 $IQ(IS)$ 之長等於 $AQ(AS)$. 由 $BP=BS$,$CP=CQ$(切線長相等),得到

$AB+AC-BC=AQ+AS=2\times AQ=2\times IQ$;

也就是,內切圓直徑 $=2\times IQ=AB+AC-BC=4+3-5=2$.

〔**答**〕$\triangle ABC$ 的外接圓直徑爲 5,內切圓直徑爲 2.

* 我國古算書中,曾有“**勾三、股四、弦五、黃方二**” 的說法. 其意就是:**兩直角邊之長為**

3、4 **的直角三角形中,其斜邊(弦)長為** 5**,其内切圓直徑為** 2.

所謂**“黃方”**,是由於古算書的圖上常把**這内切圓塗成黃色**.

參考文獻:

[1] 江蘇省數學學會科普委員會主編,涂世澤編寫:《三角形的巧合點》,江蘇教育出版社,1984 年 8 月版.

[2] 陳聖德著:《平面幾何一題多证》,福建人民出版社,1984 年版.

[3] 澳門濠江中學數學科組編著:《幾何》第二冊(初級中學課本) 澳門濠江中學,1998 年版.

[4] 澳門濠江中學數學科組編著:《幾何》第三冊(初級中學課本) 澳門濠江中學,1998 年版.

[5] 澳門濠江中學數學科組編著:《幾何》第四冊(初級中學課本) 澳門濠江中學,1998 年版.

[6] 澳門濠江中學數學科組編著:《幾何》第五冊(初級中學課本) 澳門濠江中學,1998 年版.

進行基於兒童認知面向未來發展的數學教學

長春市第二實驗小學副校長　劉麗萍

長春市第二實驗小學幾十年堅持使用數學實驗教材,一代又一代教師傳承實驗經驗,積極探索創新,數學教學特色鮮明,成果顯著。

我們的學校

吉林省長春市,離靜美神秘的長白山天池不遠。這座城市被稱爲北國春城,此刻已雪花飄飄。長春建城不過兩百多年,1932 年,日本扶持末代皇帝溥儀所建立的僞滿洲國定都於此。長春市第二實驗小學就是在這個特殊的歷史階段建校的。經過八十多年的發展,目前,有三個校區兩所幼稚園,共有四百多名教師,五千多名學生。在區城內具有一定的影響。其中最有影響的是數學教學。也因此成爲了長春市民培養孩子數學能力的首選學校。

我們的教學

一、我們的教材

我們堅持使用的浙江教育出版社的《現代小學數學》,是中國科學院心理研究所上世紀八十年代的一項促進兒童數學思維發展的研究成果。這套教材符合兒童的認知規律,寓辯證思想於教材中,它不僅能使學生學到數學知識,而且能得到數學思想。從 1987 年開始使用,至今已三十年,在實驗中,我們收穫了豐厚的成果並有所認知:基於學生認知心理實施教育,不僅是數學學科教學要遵循的,也是所有學科需要遵循的。這是我們教材的優勢。這套實驗教材對我們數學教師的成長也起到了一定的助力作用。

二、我們的師者

我們學校數學教育的整體實力很強,在我校曆年湧現出的共 12 位特級教師中,數學特級教師就有四位:鞠夢賢、逯成文、全錫貴、李永萍,還有多位省市級骨幹教師。我們的數學老師在研究中成長,在思考中前行、在實踐中探究、在生成中感悟,且思且行,取得了豐碩的成果。更育出了一屆屆優秀的學生。

1. **青年教師的培養**

學校會給每一位新入職的教師指定有經驗的骨幹教師,一對一傳幫帶。每週期三年,一期結束後,根據情況確定是否出徒還是更換師傅。直至青年教師有了自我提昇能力再將其送入骨幹教師的通道入口。骨幹教師由校而市,由市而省,直至省級學科帶頭人和特級教師。形成梯隊,越走越高。青年教師由徒而師,由師傳徒,薪火相傳,青勝於藍。

2. **精英教師的打造**

通過創設參賽、培訓、承擔教研和送課任務、推薦參加省市級名師工作室等各種形式打造精英團隊,讓老師在歷練中成長,這次上課的林晶老師就是如此成長起來的。再比如,數學教師李永萍 10 年至 11 年參加了教育部組織的內地與香港教師爲期一年的駐校交流協作。目前李永萍已經成爲省特級教師。這樣的交流最初看上去是教師的輸出,結果卻是教師成長的輸入。出入之間,煉成精英。

3. **傳統活動的堅持**

簡單講,我們每一年度主要的教學活動共有兩項。上半年是面向全體家長的教學開放日活動。下半年是中青年教師的教學比賽。已經堅持了24年。目的是研磨教學,歷練教師,檢驗成果。內地學校此類活動多有相似,但我們知道堅守的意義,更知曉創新的重要,一路守住規律,年年推陳出新,堅持成我們的特色。

三、我們的研究

站在學校管理者的角度。我們的數學研究是一個穩定的"三角形",即"一個核心,兩個基本點"。數學的學科體系爲核心,教者之法與學生之效是兩個基本點。所謂教改,必然含有改與不改,也必然含有傳承與創新。不變的是學科體系,變的是方式方法。

以下是近幾年,我校教師數學學科方面的部分研究成果。

積累學生數學活動經驗的策略研究	陳洋　利麗萍 /
小學生數學學習習慣對學習效果影響的探究	李永萍 /
有效培養學生學習主動性的實驗與研究	田媛 /
關於如何讓學生主動用數學的方法解決生活問題的研究	何奎 /
小學生傾聽習慣的培養	張春梅 /
基於學生基本活動經驗的教學實踐研究	程曄 /
積累學生數學活動經驗的策略研究	王爽 /
小學中高年級學生寫數學日記的實踐研究	王麗麗　李永萍 /

這裏呈現出的是文字成果,而眞正的成果是人 —— 所謂教者進步,學生成長,學科品牌,學校發展。

四、我們的常態

教學的常態就是備課、上課、批改、輔道、考試。

1. 備課。堅持每周二下午數學學科集體備課。內容爲“四個1”:共學一篇文章,共研一個單元,共備一堂新課,共改一份試卷。同一學年數學教師都在同一間辦公室辦公,利於隨時研討。

2. 上課。數學老師教同一年級的兩個班的課,每天每班一節課,隔天上課次序交叉。反思上節,教好下節,兩個班相互爲鑒,共同提昇。

3. 批改。數學作業分爲與教材配套練習冊和課堂練習本,有低年級《口算天天練》,也有數學日記、數學手抄反和其他動手操作的數學趣味作業。對家庭作業要求教師進行二次批改,即檢查首次批改後學生再改進的情況,這是教道處檢查批改的重點專案。

4. 輔道。輔道在課上和課間隨時隨機進行。既有對學困生的單獨輔道,也有對數學感興趣有特長的孩子們的集中輔道。

5. 考試。期末考試爲兩套試卷,一套基礎,一套能力。能力測試的成縛會作爲選拔數學興趣社團成員的重要依據。每周三下午數學興趣小組的孩子會聚集在一起進行數學活動。另外,每次期末考試的前兩周進行考察計算能力的數學百題測試,這三項數學測試我們堅持了多年,學生提昇水準能力,師者提昇責任意識。

環境同樣重要。在校園文化的建設中,我們將數學學科相關內容做了系列的設計和呈現:巨大的算盤屛風、莫比烏斯帶、九宮格…… 校園生活時時處處引發孩子對數學的興趣和思考。

我們的願景

數學是思維的體操。我們帶著學生在數學的精準表達中感受美的震撼,在邏輯推理中涵養思想的嚴謹,在抽象思辨中享受思維的愉悅,在基本規律中形成科學的態度。

我們要通過數學讓孩子成爲具有較高數學素養的人。一個具有較高數學素養的人,其個性品質外在表現爲精明、精細、富有邏輯性。其數學素養內在的特徵是思維的客觀性、直觀性、深刻性、靈活性。

那麼,如何讓學生成爲具有較高數學素養的人?面向未來發展,需要我們在新的理念指道下投入新實踐。

知識經濟時代,國家之間的競爭是面向未來的人才的競爭。最近在教育領域有一個熱詞:*STEAM*。旨在打破學科疆域,通過對學科素養的綜合應用解決實際問題,同時培養綜合性的人才。其教育理念包含以下兩個基本方面:(1)*STEAM* 是在掌握科學、技術、工程、藝術和數學 5 大類學科的基礎上,進行跨學科的大融合;(2)*STEAM* 強調的是學以致用,將知識與實際問題相結合,課題都是基於實際問題出發的。

科學的核心是發現,技術的核心是發明,工程的核心是建造,藝術的核心是表現,數學的核心是思維。在 *STEAM* 中,數學係是基礎。我認爲,保有扎實的基礎才能產生廣泛的融合。*STEAM* 帶給我們基礎教育的啓示是 *L* 數學教育不應該是孤立進行的。我們要做的是數

學作爲基礎學科與科學、工程、技術、藝術的大融合。這種大融合需要數學,而數學教育同樣需要融合。

在今後的數學教學中,我們要有國際的視野和跨學科融合的大的教育觀,由學科教學到學科教育到各學科融合的綜合性學習。我們小學教師要積極投入到面向未來的數學教育的新實踐當中。

我們的願景不是培養個體數學家,而是發展全體學生的思維能力,讓孩子們通過學習數學變得越來越聰明。讓孩子從小愛上數學,在熱愛中用數學的眼光觀察生活,用數學的思維思考人生,用數學的語言闡述世界。進而完善自我,改造世界 —— 這是教育的責任,學校的責任,我們的責任。

“初步認識分數”教學實錄

澳門濠江中學附屬小學　譚慧欣

【教學內容】

澳門新思維數學三年級上冊第 35 課 —— 初步認識分數。

【教學目標】

1. 創作教學情境，初步認識幾分之一的含義，能用分數表示一份占整體的幾分之一。
2. 認識分數的寫法和讀法。
3. 認識分母、分子及分數線。
4. 讓學生經歷探究的過程，培養學生積極思考和合作交流的意識。

【課前分析】

本課內容是在學生已經掌握一些整數知識的基礎上初步認識分數的含義。整數是由整數單位的疊加，而分數是單位“1”的均分。分數和整數無論是在意義上、讀寫方法上以及計算和比較大小的方法上，都有很大的差異。從整數到分數是數的概念的一次擴展，學生的思維正處於由形象思維過渡到抽象思維的階段，在初次學習分數時會感到一定的困難。

因此，本課應抓住學生對“平均分”的已有認識，創設一些學生熟悉并且感興趣的生活情境，讓學生通過觀察圖像的演示感受“平均分”的本質，再通過實踐操作的活動幫助學生直觀地感知一些簡單的分數例子，在動手、動腦、動口的過程中初步理解幾分之一的含義，建立初步的分數概念。通過結合直觀圖像和學生活經驗，學生能理解同一個物體平均分的份數越多則每一份越小，從而能夠比較分子是 1 的分數的大小。

【教學重點、難點】

重點：1. 通過平均分的含義，初步認識分數。
　　　2. 會讀、寫幾分之一。

難點：1. 理解分數的意義。
　　　2. 理解分母和分子代表的意義。

【課堂實錄】

一、創設情境，提供素材，初步體會分數的意義。

1. 創設情境(幫哆啦 *A* 夢和大雄分銅鑼燒)：

教師：首先介紹今天的嘉賓，他是誰?(學生一起回答：哆啦 *A* 夢。) 有沒有人知道他最愛

吃什麼?(學生:哆啦 *A* 夢最愛吃銅鑼燒。) 大雄媽媽買了些銅鑼燒給大雄和哆啦 *A* 夢吃,我們一起來幫忙分一分,好嗎?(課件出示圖片)

[設計意圖:創設學學生所熟悉並感興趣的現實情境,激發學學生的興趣,讓學學生以飽滿的熱情投入到探究之中……]

2. 引出平均分:

教師:什麼是平均分?怎樣才算平均分?

學生:每人分得的一樣多,也就是等分成幾份。

3. 用掌聲表示每人平均分得多少個銅鑼燒。

教師:好!那我們來玩個平均分的遊戲!老教師說媽媽買了多少個銅鑼燒,你們拍手表示大雄和哆啦 *A* 夢每人平均分到多少個。準備好了嗎?(學生作準備拍手的動作)

教師:媽媽買了 8 個銅鑼燒!(學生:拍 4 下);媽媽買了 4 個銅鑼燒(學生:拍 2 下);2 個銅鑼燒?(學生:拍 1 下);媽媽買了 ——1 個銅鑼燒?(學生:欲拍又止)。

教師:1 個銅鑼燒可不可以平均分呢?

學生:可以。

教師:1 個銅鑼燒怎樣平均分給兩個人呢?

學生:一人一半。

教師:你爲什麼認爲一人一半就是平均分呢?你是怎樣理解平均的?

學生:因爲一人一半每份大小相同,所以是平均分。

教師:說得很好!看來平均分不僅是每份一樣多,還可以是每份一樣大。

4. 設計出一半的數學表示方式。

教師:兩個可以用數字 2 表示,那半個可以怎樣用數學方式來表示呢?請各小組快速交流,每組在你們的小白板上設計出一個一半的數學表示方式。給大家一分鐘時間,現在開始!(學學生在白板上寫出一半的數學表示方式。)

教師:請一組的組長來分享你們的“一半” 數學方式是如何表示(投影學學生作品)。

學生 1:我用 0.5 來表示一半。

學生 2:我用畫圖的方式表示一半。

教師:同學們的數學知識真豐富,想到了形形色色的數學方式來表示。

二、探索新知(初步認識$\frac{1}{2}$,了解分數的寫法和讀法):

1. **認識一半即$\frac{1}{2}$:**

教師:想知道數學家是怎樣表示一半的嗎?請閱讀教材,看哪組最快找到答案,寫在白板上舉起來!

學生:寫出$\frac{1}{2}$ 然後舉起白板。

2. **認識分數的讀法寫法、初步認識**$\frac{1}{2}$。

教師:非常好!大家都很快找到!其實這種表示方式也是數的一種,叫做分數。(貼出課題字條:初步認識分數) 我們今天就一起來初步認識分數。

教師:知道這個分數怎麼讀嗎?

學生:二分之一(閱讀教材)。

教師:對!我們讀作二分之一。

教師:一起來看看老師怎麼寫“二分之一”,看誰觀察得最仔細。(教師在白板上板書$\frac{1}{2}$,並貼上字條:讀作二分之一) 誰留意到我剛剛寫$\frac{1}{2}$ 的時候,是按怎樣的順序寫的?

學生:先寫中間的橫線,然後寫下面的 2,再寫上面的 1。

教師:同學觀察得真仔細!我們拿出手指來一齊寫一寫“二分之一”:將一個整體平均分(手指畫分數線) 成 2 份(手指寫 2),其中的 1 份(手指寫 1) 就是二分之一。

（學生舉起手指跟著一起書空）

教師：誰能說說你認爲$\frac{1}{2}$中的 2 和 1 表示什麼？

學生 1：這個 2 表示把整體等分成 2 份。

學生 2：上面的 1 表示占其中的一份。

教師：看來同學們都認識了這個來自分數家族的新朋友二分之一了。考一考大家，（課件展示：$\frac{1}{4}$）這個分數該怎麼讀呢？

學生：四分之一。

教師：那八分之一應該怎麼寫？

學生：在白板上寫出$\frac{1}{8}$。

3. **强調是占整體的幾分之一。**

課件展示：把一個整體平均分成 2 份，其中的 1 份占整體的$\frac{1}{2}$。

教師：我可不可以只說，其中一份（指著陰影部分）就是$\frac{1}{2}$，而不說占整體的$\frac{1}{2}$呢？

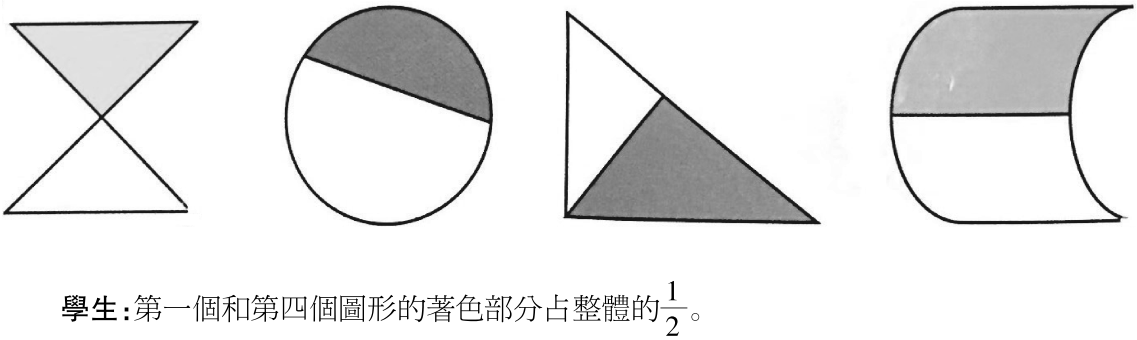
學生：不可以。若我們只說這是一半，就會不清楚是什麼的一半。

教師：沒錯。$\frac{1}{2}$表示的是一個整體的一部分，一個銅鑼燒的$\frac{1}{2}$和一個大西瓜的$\frac{1}{2}$就不一樣，所以一定要說清楚占什麼的$\frac{1}{2}$。那麼，另外白色的那部分占整體的幾分之一？

學生：也是占整體的$\frac{1}{2}$。

4. **活動：判斷$\frac{1}{2}$。**

教師：（課件出示圖形）下面那些圖形的著色部分占整體的$\frac{1}{2}$？在你們的學習單上圈一圈，然後小組交流，統一意見。老師將會請組長出來分享一下你們的小組圈了哪幾個，并且解釋爲什麼。（學生在學習單上獨立完成，然後小組交流意見。）



學生：第一個和第四個圖形的著色部分占整體的$\frac{1}{2}$。

教師：爲什麼第二個和第三個圓形的塗色部分不是整體的$\frac{1}{2}$呢？

學生：因爲沒有平均分。兩份的大小不一樣。

教師：大家都認識$\frac{1}{2}$了嗎？那我考一考大家，看看是否眞的理解了。（出示句子：把一個月餅分成兩份，每一份是$\frac{1}{2}$）。判斷一下這句話是對還是錯，數三聲全班一齊同時做動作表示，這樣表示對這樣表示錯。準備好了嗎？三、二、一 ……

教師：有不同意見喔，請正方代表和反方代表出來辯論一下。

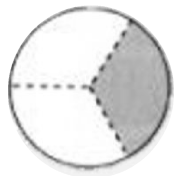
學生 1：因爲月餅分成了兩份，所以其中的一份就是二分之一。

學生 2：但是他沒有說是平均分，所以不能說是二分之一。

教師：大家明白他們說的嗎？（課件呈現對照：不平均分成兩份）如果是這樣，這叫平均分嗎？（不叫）沒有平均分，能用$\frac{1}{2}$來表示嗎？（不能）。我們要同時感謝這兩位同學幫助我們大家加深了對分數的認識，就是一定要看清楚是否把整體平均分成等分。

三、認識分數作為整體的部分：補充、分析素材，總結提煉分數的意義。

1. **認識：**$\frac{1}{3}$



教師：我們剛才學習了$\frac{1}{2}$，那麼看到這個圖，你想到什麼？

學生：三分之一。

教師：誰能說完整？什麼占什麼的三分之一？

學生：著色部分占整個圓形的三分之一。

教師：你爲什麼能判斷著色部分占整個圓形的三分之一呢？（課件出示提示問題 *a.* 是否平均分？ *b.* 平均分成多少份？ *c.* 這樣的一份占整體的幾分之一？）

學生：這個圓平均分成了三份，這樣的一份占整體的三分之一。

2. **動手操作：折一折，塗一塗。**

教師：同學們，剛才我們認識了二分之一和三分之一，你還想不想認識一些其他分數？

學生：想。

教師：那這次請你們自己來設計分數，用你們手中的紙片折一折，然後拿顏色筆用陰影或斜線塗出其中的一份，并且標出這是幾分之一，聽懂了嗎？開始。

（學學生動手折，教教師巡視）

教師：誰來分享一下你介紹的分數？說說你折的一份是整體的幾分之一，爲什麼？

學生：我折出了四分之一，因爲平均分成了四份，每一份就是整體的四分之一。

教師：還有誰也是折出四分之一但是跟他不一樣的？

學生：我的折法和他不一樣，也折出了四分之一。

教師:大家看這兩個四分之一,形狀大小一樣嗎?

學生:不一樣。

教師:那爲什麼都能用四分之一來表示呢?

學生:都是平均分成了 4 份,其中的一份就是整體的四分之一。

教師:這位同學很會學習,抓住了關鍵。還有同學折出了其他分數嗎?再請一位同學來介紹一下你設計的分數。

學生:我的分數是八分之一。我把這個圓形紙片對折了三次,平均分成了8份,每一份都是圓形紙片的八分之一。

教師:我很欣賞這位同學,不僅淸楚地描出了折痕,還在每一份上面都標上了八分之一。

3. **認識分數各部分的名稱和意義。**

教師:我們已經認識不少分數朋友了,請仔細觀察一下,分數有幾個部分組成?

學生:3 個部分。

教師:分數的各部分都有它的名稱和含義。請同學們快速閱讀一下教材,找到他們的名稱。以八分之一爲例,下面這個數叫什麼?表示什麼?

學生:叫做分母,表示平均分成了八份。(教教師板書)

教師:上面的數叫什麼?表示什麼?

學生:上面的叫分子,表示占其中的一份。(教教師板書)

教師:分數離不開平均分,知道分數裏面哪裏表示平均分嗎?

學生:中間的橫線。

教師:中間的這條橫線叫什麼?

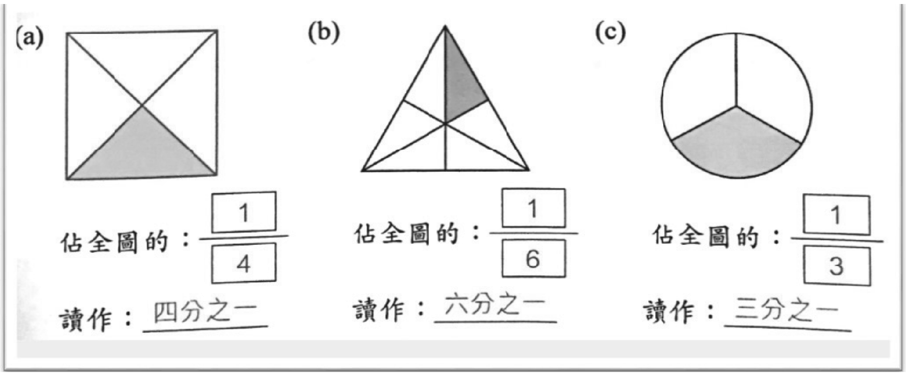
學生:分數線。

四、鞏固練習、深化認知

1. **基本練習:**

教師:下面這些圖形中,著色部分占全圖的幾分之一?請在學習單上寫出分數的寫法和

讀法。(學學生在學習單上獨立完成)



教師:誰來說一說你的答案?

(學學生說出著色部分占全圖的幾分之一,分母是幾,分子是幾。):

2. 看圖說一說,什麼占什麼的幾分之一。

教師:再來看看這幅圖,誰能用一句話說一說,什麼占什麼的幾分之一?

學生:運動員已跑路程占全程的四分之一。　　一格巧克力占整個巧克力的八分之一。

3. 比較分子是 1 的分數大小。

教師:同學們,我們今天學習了分數,現在老教師問大家,如果有一個蛋糕,你想吃它的二分之一還是八分之一?

學生:我想吃二分之一。

教師:爲什麼你想吃蛋糕的二分之一呢?

學生:因爲分的份數越多,每一份越小。

教師:如果我吃的比八分之一還小,你覺得可能是這個蛋糕的幾分之一呢?

學生:可能是十六分之一。

教師:原來,八分之一比二分之一小,十六分之一比八分之一還要小。你有什麼發現嗎?

學生:我發現分母變大,分數反而會變小。

教師:沒錯,當分子都是1的時候,分母越大,分數就越小。因爲分的份數越多,其中的每一份就會越小。分數的確是很神奇呢。

五、總結提昇

1. 學學生總結:

教師:同學們,這節課我們初步認識了分數。回想一下我們是怎樣研究的?你有什麼收穫?

學生 1:我知道了什麼是分數。

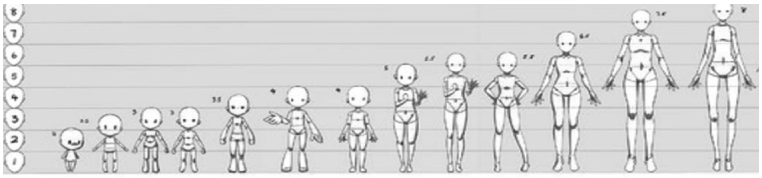
學生 2:我知道了分數怎麼寫,怎麼讀。

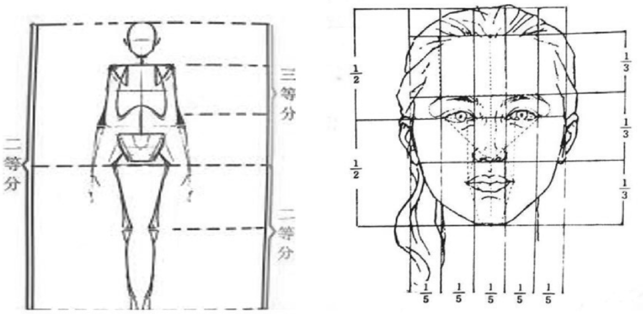
學生 3:我知道了怎樣用分數去表示等分整體中的其中一份。

……

2. 分享體會:學生活中處處有分數。

你們知道嗎,學生活中還有很多很多的分數。比如人體和五官的機構,原來嬰兒的頭長占身長的三分之一,成人頭長占身長的七分之一,額頭占臉長的三分之一,眼睛寬度占臉寬的五分之一。知道這些分數,你畫人像也會有更好的效果。學生活處處有數學,我們要善於用數學的眼光來看事物,這樣學的數學才是有用的數學。





3. 頭腦風暴:

教師:這節課的最後,我們來一個頭腦風暴。老教師有兩幅畫,上面那幅露出了整幅畫的$\frac{1}{2}$,其餘被遮住,下面那幅露出了整幅畫的$\frac{1}{3}$,其餘被遮住。你能看出來那幅畫的完整一幅畫更大嗎?

學生 1:我覺得下面那幅大,因爲二分之一比三分之一大。

學生 2：我覺得上面那幅大，因爲它們露出來的部分一樣大。上面那幅的整幅畫有三份這樣大的，而下面那幅的整幅畫只有兩份這樣大的，所以上面的比較大。

（揭開）

教師：你們猜對了嗎？（學生歡呼，猜對了。）同學們眞聰明！這節課就到這裏，下課。

【課後反思】

學生對分數這一新概念的認識，需要遵循具象到表象，再到抽象的過程。我努力嘗試營造這樣的一個過程，讓學生通過實物認識二分之一，再過渡到幾何圖形中進一步認識幾分之一，最後總結提煉分母、分子和分數線的意義，在具象和表像的理解基礎上，抽象出分數的概念。當中，包含了源於生活，也是學生感興趣的卡通人物的引入，如幫大雄和哆啦 *A* 夢分銅鑼燒，讓學生在感興趣的情況下，投入分數產生的情境進行思考；也有結合學生的自由想像和動手操作，加強了學生對知識的認同和理解，通過摺紙的活動體會平均分的本質，以及部分與整體的關係，再說一說自己是如何得出了某一個分數，從而初步理解分數的意義。另外，在補充練習方面，除了學生已經熟悉的面積模型，還補充了線段模型，讓學生在不同層面上豐富對分數本質的認識。這節課的最後，由學生總結出了本節課收穫的知識，然後在此基礎上呈現出分數與生活結合的例子，把知識再次回歸到學生活當中。最後，以一個趣味的頭腦風暴進行拓展提高。因此，這節課的教學實踐達到了預設的教學目標和效果。

此外，由於本人教學經驗尙淺，這節課的教學中也有不少不足之處值得反思。本節課在控制課堂節奏方面不夠好，前鬆後緊，道致後面需要給學生思考和小組探討的時間不夠充分；在引道學生認識分數的過程中教敎師說的過多，應根據學生情況多鼓勵學生說一說，讓學生互相補充，這樣有利於學生對分數意義的理解。還有很重要的一點，就是根據課堂中學生的發言點評得還不夠到位。希望日後可提昇自己的評價語言，能夠變得更加豐富和更加專業。

〔注〕本文作者之《“初步認識分數”教學實踐》參加第三屆小學“新思維教學”澳門杯課堂教學比賽，榮獲一等獎。

為澳門學生持續進步的 PISA 成績而喝彩

澳門數學教育研究學會　石　瑋

自 2003 年澳門首次參加 PISA 測試之後,又參加了 2006 年、2009 年、2012 年和 2015 年的 PISA 測試,如今澳門已參與了五次 PISA 計劃.

在 2015 年,澳門學生的成績在參與 PISA 測試的七十二個國家、經濟體中處於前列位置. PISA 測試了學生的火閱讀、數學和科學素養. 根據公佈的數據,澳門十五歲學生之三項素養的平均表現在其中科學素養得分五百二十九(排名第六);閱讀素養得分五百零九(排名第十二);數學素養得分五百四十四分(排名第三).

PISA 測試不是測試學生所學書本知識的掌握程度,而是評估學生的綜合應用能力,測試問題有一定的靈活性、實用性.

因爲參與測試學生的年齡均是十五歲,正好是九九年出生的「回歸寶寶」,凸顯特區政府將教育放在優先發展位置,既有資源支持,亦透過政策優化教育水平. 同時,澳門又被 PISA 評爲具教育優質且教育公平的五個國家、經濟體之一. 由此可知,這些年本澳的中小學教師們立下了汗馬功勞.

一. 澳門學生的在 PISA 測試的數學素養最令人鼓舞.

較前幾年而言,澳門學生在「經濟合作與發展組織」(OECD) 的 2015 年「學生能力國際評估計劃」PISA 中的表現更令人滿意,數學素養呈現逐次改善的趨勢. 澳門被認爲是教育優質且公平的五個經濟體之一 另外四個國家爲加拿大、丹麥、愛沙尼亞和香港.

在七十二個參與測試的經濟體中,澳門學生的數學素養排名第三,科學素養排名第六,閱讀素養排名第十二.「經濟合作與發展組織」(OECD) 的「學生能力國際評估計劃」(PISA) 測試基礎教育體系中學生的數學、科學和閱讀素養 澳門在列表中排名前列,十分接近,甚至某些情況下超過香港的排名. PISA 測試學生的閱讀、數學和科學素養, 2015 年的 PISA 評核焦點是科學素養.

澳門 PISA 項目總負責人張國祥教授表示,考慮到參與評核的學生出生於 1999 年,因此,2015 年 PISA 項目證明澳門回歸後的教育體系「卓有成效」. 這將使澳門培養出更多科學領域的人才. 表現較弱的學生比例減少,同時從中等水平提昇至高水平的學生數量增加.

根據 PISA 計劃的結果,可以得出結論,留級學生的數目有所減少. 他提到澳門對表現差的學生采用留級制度,張國祥表示這會造成不好的影響.「留級生不能與同齡孩子一起

學習，這將對教學效果和學生心理造成影響. 他表示:澳門有教育自主性，每所學校的政策不同，也就是說,「對於最低標準,教育暨青年局沒有統一的標準,留級需要更多資源和投資,也躭誤這些學生進入勞動力市場的時間.

在 2003 年,每兩個 15 歲的學生中有一位是留級生;在 2015 年,上述情況有所改善,每三個學生中只有一個留級生. 他解釋說,2015 年,15 歲學生在小學及初中教育階段曾留級的比率由 50% 下降至 33. 8%. 即使如此,「情況仍然很嚴重」,澳門應努力較低這一比例.「最理想的是,每五位學生中只有一個留級生,也就是說,留級率降低至 20%」.

在 2015 年,女生(三種素養)的得分較男生高很多;也就是說,學校成功發現了激發女生對於數學和科學興趣的方法. 他說,之前的測試中,女生在這兩項的得分較男生低.

二. 在閱讀方面,女生總是比男生强.

一般地說,我們的學生在閱讀方面是弱項,就連看報紙也是喜歡看圖多於文字的娛樂版;一些中學生不僅對於數理化的書極少閱讀,對語文書的閱讀也不夠,男生比女生更差一些. 應考慮「如何提高男生參與閱讀的程度」,教青局學校督道協調員黃懿蓮認爲,「必須爲教師提供培訓,令他們在教學中培養男生閱讀習慣.」她還提到,采取一些新的教學手段.「有些學校正在采取新的教學方式,通過學習漢字,學生能夠有閱讀的動力. 正在某些學校開展一個試點項目,大部分參與這一項目的是男生」,她說. 另一方面,可以嘗試「鼓勵學校采購男學生感興趣的圖書,而不是公主的故事」,她解釋說,教育機構或許可以在科學、探險和體育方面投資.

從 2006 年起,澳門開始思考如何進步,開始實施撇開知識記憶、基於基本學術技能要求的課程改革.

較前幾年而言,澳門學生在「經濟合作與發展組織」(OECD) 的 2015 年「學生能力國際評估計劃」PISA 中的表現更令人滿意,數學素養呈現逐次改善的趨勢.

堅持教師培訓,注重通過多元化的評核方式降低了留級率.

三. 關於提昇學生素質的建議.

從小學一至四年級階段不實施留級制度,除非監護人提出要求. 五年級和六年級的留級率可以是 4%,澳門現在的留級率接近這一數據,學生可以在一定數目的科目未合格的情況下昇級,但是由學校決定具體數目. 我們通過這一新的制度提供多樣化的考核方式並推廣形成性評價方式,也就是說,關注學生的學習過程. 而不是僅僅依賴測試,當發現學生在學習上有困難時,立刻給予幫助. 教育工作者和政策制定者宜針對學生的生涯規劃,共同省思如何協助學生發展面對未來生活、學習或工作上挑戰的能力. 澳門自回歸祖國後,基礎教育系統取得了相當不錯的進展.

四. 取得進步成績的多方面因素.

1. 澳門特區政府對教育的重視,將教育放在優先發展位置,着重資源投入、政策支持等;歷年來,教育暨青年局一直抓緊教師提昇專業素質的業務培訓,要求在職教師每學年要保證完成的最少培訓時間是三十小時.

2. 本澳最大的教育團體《中華教育會》是一個非牟利社團,是澳門歷史最悠久的文化教育團體. 一向以愛祖國,愛澳門,團結教育界,服務社會,促進當地教育事業爲宗旨;開展各項相關工作,弘揚愛國、愛澳文化.

爲教師提昇業務水平提供了更多的教育資訊,出版《澳門教育》和《教育資訊》等刊物. 爲提昇澳門教師的專業素質,成立了〈數學教師小組〉以及其他學科教師的活動小組,起著多樣化的教師業務培訓作用;對推動澳門各校開展相關教育教學活動和提高學生學藝水平起了積極作用.

3.《澳門數學教育研究學會》的汪會長十多年來本著「請進來」與「走出去」的方法進行提昇教師素質的專業培訓,逐步提昇了本澳數學教師素質. 他又多次組織澳門中小學數學教師「走出去」學習外地先進教學經驗,促使本澳數學教師順應教改潮流,不斷更新教育教學觀念,使教師專業水平可持續發展.

教師職業壓力大是當前教育界一個比較普遍的共識. 特別是數學教師的工作壓力更大一些,任課較多,改家課簿也多,學生成績及格率也比其他學科低.

《澳門數學教育研究學會》所組織的各項活動全是在假日舉行,理事們要犧牲自己的休息時間、親子活動時間、陪伴家人的時間等等,每位理事每年至少需要義務加班百多個小時. 如今要求執教者們培養學生的創造性,而這個使命又要求身負重任的數學教師們再接再厲. 爲了提昇本澳學生的數學水平,理事們團結一致,爲提昇澳門中小學生的數學思維品質甘願奉獻,無怨無悔.

綜上所述,本澳教師在 PISA 成績的進步中,即看到成績,也看到不足,對不足之處加大力度,才能培育出更多的創新型人才.

3800 年七大數學“死題”破解

上海　崔榮琰

一、序言

二千多年來，有關尺規作圖“圓內接正多邊形”問題，仍停留在二千多年前，歐幾裏德著作的《幾何原本》一書水平上。歐幾裏德在書中完成了圓內接“正三邊形、正四邊形、正五邊形、正十五邊形”的作圖問題。

因此，當1796年，年僅19歲的德國數學家高斯宣佈他發現了“正十七邊形”的作圖方法時，突破了歐幾裏德《幾何原本》，在數學界引起了區大的震憾！

然而，“正 7、9、11、13 等邊形”高斯卻未能做出。

於 1801 年，高斯經過研究後，對尺規“作正多邊形”整個問題作出“做正 N 邊形”定律：將“正 7、9、11、、13 邊形”判定爲“不可解”，四道難題被判爲“死題”。

歷經 3800 年的世界著名頂級三大幾何難題“任意角三等分”、“化圓爲方”、“做倍立方體”，全球數學家不得其解。近 200 年，西方數學家又將此三大難題“判爲死題”：

1873 年，法國數學家聞脫茲爾將“三等分角”和“倍立方”判定爲標尺“不可解”；難題被判爲“死題”。

1882 年，德國數學家林德曼將“化圓爲方”判定爲標尺“不可解”；難題被判爲“死題”。

上述 3800 年世界頂級七大幾何“死題”：

1、任意角三等分；

2、化圓爲方；

3、做 2 倍立方體；

4、做正 7 邊形；

5、做正 9 邊形；

6、做正 11 邊形；

6、做正 13 邊形；

於 2006 年 4 月 23 日至 2006 年 7 月 19 日，在上海，全部被同一個中國人、數學愛好者崔榮琰先生成功破解，成爲用“無刻度直尺、圓規、經有限步序”作圖、破解成功的世界第一人。

成功破解包括工藝上的完美作圖；結果“0”誤差；和數學理論上的完整證明。

此創新成果已及時向上海、北京、天津數學會,復旦、交大、華師大數學係,中國數學會、中國科技信息、中國科學院網、香港數學教育學會、比利時數學會、加拿大數學會、澳大利亞數學會、丹麥數學會、歐洲數學會、美國數學會、國際數學聯合會等國內外數學專業機搆通報,向國內外媒體宣告,並在國際互聯網上公示,新華、新浪、雅虎、網易、上海數學會等近百家網站專題登載。

值得一題的是,蒙上海市政協領道及有關部門的關心、支持,於 2006 年 9 月 8 日(星期五)上午 9 時 40 分至 11 時,在市政協教科文衛辦公室,四位數學專家等 8 人,“零” 距離、多次審視並討論崔榮琰先生破解“任意角三等分” 的作圖全過程。四位數學專家等 8 人一致承認:崔先生用“無刻度直尺、圓規”,經有限(3 個) 步序完成破解,符合 3 千年前的命題前輩的要求。結果:用肉眼、圓規、量角器等檢驗是“零” 誤差。這是不爭的事實,有中等數學基礎的任何人看到後,都會和我們得出同樣的結論。

於2006年9月8日,“任意角三等分”、“做正N邊形”(17、7、9、11、13邊形等) 破解方法,再次向以上國內外數學專業機搆通報,向國內外媒體宣告,並在國際互聯網上公示。新華、新浪、雅虎、網易、上海數學會等近百家網站專題登載了破解的新聞和破解方法。

於 2006 年 11 月 26 日,崔先生在上海市科學會堂公開舉辦的“3800 年世界頂級四大數學難題破解會” 圓滿成功,其實況,再次向國內外一百多家數學專業機構、刊物通報。

東方早報、上海汽車報、重慶晚報、北京科技報、勞動報、新華社、中國教育發展、中國教育在線、中國數學教育、中國基礎教育、全國教育資訊、中教、新浪、雅虎、網易、奧數、亞洲教育、多倫多、搜狐、東方、香港大公、新民、新民週刊、上海數學會、上海科普等近百家媒體、互聯網及時登載了崔榮琰先生在上海市科學會堂破解的新聞和破解方法。屆時,數學教師、數學愛好者、相關領道、網友等,以多種形式予以祝賀、支持,謹此,作者一並由衷的感謝。

時至今日,崔先生沒有收到對具有破解“有異議” 的任何函件。

崔榮琰先生按國際慣例完成了世界頂級創新成果公示的全部程序,震撼了國際社會和國際數學界。世界數學皇冠上七顆頂級、古老而璀璨的明珠,終將會被中國人贏得!

崔先生認爲:科學不分國界,科學的眞締是用事實說話。眞假顚倒,均屬僞科學!

成功破解是對公元前 1800 年命題前輩的認眞、負責與尊重,也是當今中國人以“有解” 的不爭事實,爲命題前輩、古代科學家、數學家正名你們的命題是科學的,認眞、負責的,有解的,是非常有趣的;也是對“不得其解” 及“無解” 人最體面的回答,圓全球數學家 3 千年夢,揚求眞求實求是的科學作風,讓全球中學生學會用尺規破解世界頂級七大數學難題(死題)。

不斷創新是各行各業的社會發展的原動力、是國家榮耀的標誌。打造民族品牌,匹夫有責、支持民族創新,義不容辭。

七大頂級幾何難題係初等數學,按照命題規則不用高等數學,不會復雜化、故弄玄虛。凡看到破解方法的,有中等學歷的敢於說眞話的人士就能分是非。

國際模特奧林匹克有限公司

2007 年 3 月

崔榮琰： 著名國際模特理論家 國際模特奧林匹克大賽創始人 知識產權人
數學業餘愛好者

二、3800 年七大數學難題簡介

1. 化圓爲方求作一正方形使其面積等於一已知圓；
2. 三等分任意角；
3. 倍立方 － 求作一立方體使其體積是一已知立方體的二倍；
4. 做正 N(17、7、9、11、13) 邊形；

一、3800 年來全球數學家“不得其解”

以上四個問題一直是世界公認的著名數學難題，而實際上這前三大問題都已證明不可能用沒有刻度的直尺、圓規，經有限步驟可解決的。第四個問題是高斯用代數的方法解決的，他也視此爲生平得意之作，還交待要把正十七邊形刻在他的墓碑上，但後來他的墓碑上沒有刻上十七邊形，而是十七角星，因爲負責刻碑的雕刻家認爲，正十七邊形和圓太像了，大家一定分辨不出來；但高斯沒有解決“做正九邊形、做正七邊形”。

早在公元前 1800 年，古埃及人就開始涉足“三等分任意角、二倍立方體和化圓爲方” 選題，歷時數千年也無法解答。到 1775 年，法國科學院宣佈，此三題無解，今後拒絕再接談和審查這類解答。

在西方數學史上，幾乎每一個稱得上是數學家的人，都曾拿起直尺和圓規來挑戰它，無數的人失敗了，人們在失敗中逐漸懷疑這些問題是無法用標尺作圖法解決的。於是轉而研究這些問題的反面，因爲誰要是證明了這幾個幾何難題不能用標尺作圖法角決，誰也就解決了三大幾何難題。

二、找“不得其解” 的理由

在 17 世紀，笛卡兒發明了解析幾何之後，數學家們藉助“幾何與代數” 統一的思想，解決了這三大難題 。三大幾何難題，最後因代數學的發展才得以解決，將這 3 個問題翻譯成代數思維，即：

1. 倍立方 傳說公元前 400 年時，古希臘的第羅斯島上流行著一種可怕的傳染病，一時人心惶惶不可終日。人們都到阿披羅神前，請求阿波羅神像的指示. 阿波羅神給了祈求人這樣一個指示：“神殿前有一個正方體祭壇，如果能不改變它的形狀，而把它的體積增加 1 倍，那麼就能消滅傳染病。” 人們連夜趕造了一個長、寬、高都比正方體祭壇大一倍的祭壇，可是，那傳染病傳播得更加厲害了。人們又來到阿波羅神像前祈求，神說：“我要你們增加一倍的祭壇的體積，你們把長、寬、高都增加 1 倍，祭壇的體積不是要比原來體積大 7 倍了嗎?” 人們絞盡腦汁想找出一個答案，可是始終沒有人能解答這個難題。人們去向哲學家柏拉圖請教。柏拉圖也無計可施。這就是古希臘難題的開端。

設給定的立方體的邊爲單位長，設邊長爲 x 的立方體的體積爲 2，則 x 滿足：$x^3 = 2$. 於

是，我們的問題是：數“x 等於 3 次根號內 2”是否能用直尺和圓規作出？

2. 化圓爲方 設圓的半徑爲一個單位，要作一面積等於單位圓的正方形，設這個正方形邊長爲 x，則 $x^2 = \pi$. 於是，問題相當於能否用標盡作出一條長爲“根號 π”的線段？

3. 三等分角 可以用各種不同的方式來得到這個問題的代數等價問題，常用的方式之一是將三等分角的問題轉化爲方程的根能否用標尺作出。可見，最終這 3 個問題都歸結爲一些數可否用標尺作出的問題。

4. “正 N 邊形”古希臘數學家曾深入研究過如何利用尺規作“內接正多邊形”。

二千多年前，在歐幾裏德的《幾何原本》一書中，就用尺規完成了圓內接“正三邊形、正四邊形、正五邊形、正十五邊形”的作圖問題。然而，“正 7、9、11…… 邊形”卻未能做出。

二千多年的今天，有關“正多邊形”作圖，仍停留在歐幾裏德的水平上，沒有向前邁進一步。

公元 1796 年，當年僅 19 歲的德國數學家高斯宣佈他發現了“正十七邊形”的作圖方法時，在數學界引起了巨大的震憾。不過，高斯他沒有完成“正七邊形和正九邊形”等的作圖。

正七邊形或正九邊形等是否尺規完成？正多邊形的邊數爲多少時，它才能用尺規做出？

高斯經過繼續研究後，於 1801 年，最終對整個問題作出：“做正 N 邊形”定律。

高斯定律中指出，如果僅用圓規和直尺，作圓內接 n 邊形，當 n 滿足如下特徵之一方可做出：

1）$n = 2m$；（爲正整數）

2）邊數 n 爲素數且形如 $n = 22t(t + 1 = 0、1、2\cdots)$。簡單說，爲費馬素數。

3）邊數 n 具有 $n = 2mp1p2p3...pk$，其中 $p1$、$p2$、$p3\cdots\cdots pk$ 爲互不相同的費馬素數。

由高斯的結論，那麼可用尺規作圖完成的正素數邊形就只有“3、5、17、257、65537”。

進一步，可以做出的有奇數條邊的正多邊形也就只能通過這五個數組合而得到。這樣的組合數只有 31 種。而邊數爲偶數的可尺規做出的正多邊形，邊數或是 2 的任意次正整數冪或與這 31 個數相結合而得到。

三、作出無解的絕論

1873 年，法國數學家聞脫茲爾在研究阿貝爾定律化簡時，首先證明了“三等分角”和“倍立方”是不能用標尺作圖解決的；

1882 年，德國數學家林德曼證明“化圓爲方”問題也是不能用標尺作圖解決的；

1801 年，德國數學家高斯以自己創建的“做正 N 邊形”定律把“做正 7、9、11、13 邊形”判定爲不能用標尺作圖解決。

這樣一來，以上“幾何難題”被推理成“不可解的死題”，才算“徹底解決”了 ……

四、以上“不可解的死題”全部被中國人破解成功

於公元 2006 年 4 月 23 日至 7 月 19 日，在上海，崔榮琰先生用“尺規”成功破解了：

“三等分任意角”、“作二倍立方體”、“化圓爲方”、“做正 9 邊形”、“做正 7 邊形”、“做正 11 邊形”、“做正 13 邊形”等“做正任意邊形”。

三、“無解絶論”在中國的現狀

在西方數學史上,幾乎每一個稱得上是數學家的人,都曾拿起直尺和圓規來挑戰“化圓爲方”“三等分任意角”“倍立方”“做正 N(17、7、9、11、13)邊形”,阿基米德、牛頓、高斯、笛卡兒等無數的人失敗了。但高斯用代數方法破解了“做正 17 邊形”,沒有破解“做正 7、9 邊形”。

1801 年,高斯創立了“做正 N 邊形”定律,把“正 7、9、11、13 邊形判爲不可解禁區”!

人們在失敗中逐漸懷疑這些問題是無法用標尺作圖法解決的。於是轉而研究這些問題的反面,因爲誰要是證明了這幾個幾何難題不能用標尺作圖法解決,誰也就解決了三大幾何難題。

在 17 世紀,笛卡兒發明了解析幾何之後,數學家們藉助“幾何與代數”統一的思想,解決了這三大難題。三大幾何難題,最後因代數學的發展才得以解決,將這 3 個問題翻譯成代數思維,這就是“無解絶論”的依據。

即:1. 倍立方 設給定的立方體的邊爲單位長,設邊長爲 x 的立方體的體積爲 2,則 x 滿足:$x^3 = 2$. 於是,我們的問題是:數“x 等於 3 次根號內 2”是否能用直尺和圓規作出?

2. 化圓爲方 設圓的半徑爲一個單位,要作一面積等於單位圓的正方形,設這個正方形邊長爲 x,則 $x^2 = \pi$. 於是,問題相當於能否用標盡作出一條長爲“根號 π”的線段?(3800 年前,π 値爲 3. 14;現代 3. 141592653;)。

3. 三等分角 可以用各種不同的方式來得到這個問題的代數等價問題,常用的方式之一是將三等分角的問題轉化爲方程的根能否用標尺作出。可見,最終這3 個問題都歸結爲一些數可否用標尺作出的問題。

1873 年,法國數學家聞脫茲爾在研究阿貝爾定律化簡時,首先證明了三等分角和倍立方是不能用標尺作圖解決的;接著,1882 年,德國數學家林德曼證明化圓爲方問題也是不能用標尺作圖解決的,三大幾何難題這才算“徹底解決”了 ……。受西方“無解絶論”的定勢,中國數學界有些人,沒有看到破解方法,就發表如是說:

“著名數學家、中國科學院院士谷超豪:笛卡爾和 19 世紀的數學家迦羅華都曾用抽象代數理論嚴格證明過僅用直尺和圓規在有限的次數內三等分任意角是不可能的。他本人經常收到一些業餘數學愛好者的這類通告自己解出某一問題的信件,其中也包括對‘任意角三等分’問題的解答。但最後經檢驗,不是在工具上不只使用了直尺和圓規,就是需要經過無限次而不是有限次才能實現,或者被等分的本質上不是任意角,而是某種特殊的角”。

“上海數學會:每年他們都要接到很多電話,聲稱自己破解了什麽什麽數學難題,其中也包括對‘任意角三等分’問題的解答。但最後經檢驗,不是在工具上不只使用了直尺和圓規,就是需要經過無限次而不是有限次才能實現,或者被等分的角本質上不是任意角,而是某種特殊的角”。

“清華大學數學科學係鄭教授：古希臘三大幾何難題似乎非常簡單，表述直觀而通俗，無數專家和愛好者深受吸引，爲之絞盡腦汁，上千年的時間流過，始終沒有一個人能夠得到答案。而事實上，貌似簡單的幾個問題，有著極其苛刻的條件。古希臘人在幾何作圖方面，只能使用圓規和無刻度直尺，而且只能有限次地使用，不能在直尺上做記號，更不能夠折疊作圖紙。正是因爲破解三大難題的線段，無法通過尺規作圖得到，難題最終成爲死題”。

“復旦大學數學所副所長吳泉水：三等分任意角、化圓爲方，這在數學界早已被蓋棺定論，譬如笛卡爾和迦羅華都早用抽象代數理論嚴格證明過僅用直尺和圓規在有限的次數內三等分任意角是不可能，數學愛好者們對問題具有鉆研精神是值得鼓勵的”。

“上海交大應用數學係吳耀琨博士：很多所謂的解法其實經不起推敲，可能會比較接近，但總是存在誤差，只不過當事人沒有看出而已”。

“上海師範大學數學係主任周風：笛卡兒和19世紀數學家迦羅華都曾用抽象代數理論嚴格證明，僅用直尺和圓規在有限的次數內三等分任意角是不可能的。因此，這道題早已蓋棺定論：沒有解。所謂的破解，最多是無限接近，而不能在有限步驟內完成”。

崔先生認爲：

以上幾位專家的說法，一方面是對眞理的關注與推崇西方數學家的定論；另一方面確認全球數學界至今不得其解，他自己沒能破解、不相信別人破解、不可能有人破解，“3800年數學難題、死題”是貨眞價實的、名不虛傳的。

眞理是不以人的意志、意識而改變的。實踐檢驗眞理；實踐是第一要素，理論是滯後於實踐的總結，有時會滯後幾千、幾萬年。如，地球是圓的已存在上百萬年，鳥類在天上飛翔也有幾十萬年，然而證明、解釋地球是圓的，鳥類爲何能飛翔，這是近三百年的事。

3800年數學難題，因爲沒有破解的實踐、個案，就人爲設置“尺規”不能做到的“前題、基礎”，由此而來推道出無解的理論、再上昇到把難題判定爲“死題”，似乎符合唯物辯證法。

然而，有解實踐已經更新、改變“無解”事實，理論要更新、爲實踐服務，無疑是早晚的事。七大幾何“死題”係初等數學，按照命題規則不用高等數學，不會復雜化、故弄玄虛，凡看到破解方法的，有中等學歷的敢於說眞話的國內外人士都能看懂、聽懂、分是非。

對於有些“專家的根本看都懶得看”……，崔榮琰先生表示完成可以理解；畢竟一旦承認這七大幾何“死題”有解，將給數學界帶來“大地震”、“海嘯”，動搖的可能是整個數學界的理論依據。這不是哪一位在某學科、某專業、某方面的“權威、專家”能擔當、左右的。

有解“眞理”難找，只有一條；無解“是非”千百條，隨手可得。

四、3800年七大數學“死題”破解思路

用原始“尺規”在苛刻的條件下完成破解“世界難題上的四大難題”，必須探究四大難題秘密特點，“靠其自身、內因”就能破解（這是“夢中人”的指示）。

1、堅信不移,辦法總比困難多,把“無解” 理由,作爲突破點,化變它。

2、代數觀點不能全部表示幾何特點:

10 除以 3 等於 3. 333333;

做正 17 邊形,360 除以 17 等於 21. 176470588;(被德國數學家高斯用代數破解);

根號內 3 等於 1. 73205080;根號內 3. 1 等於 1. 7606816;根號內 3. 14 等 1. 77200451;

有些人就將以上數定爲“近似值”;又推理,因爲是“似値近” 所以判斷爲無解;因此,幾乎普遍存在、不能除盡的數,參與的各種運算結果,均是“似値近”;因而,尺規也沒法正確“作出” 所以無解。用代數莫須有的理由爲幾何作出判斷!

現代 $\pi = 3.1415926$;3. 141592653;3800 年的古代數學 $\pi = 3.1415$;

“尺規” 作圖,精度只能達到 0. 2 毫米;現代千分尺檢測精度只能達到 0. 01 毫米;

電子儀器檢測精度只能達到 0. 005 毫米;

……

而以上代數不能整除的狀況,幾何能直觀的、“0” 誤差、解決問題。

3、找到了用代數莫須有的理由爲幾何作出判斷的破綻,3800 年數學“死題” 就能復活、爲古代數學家正名:先輩們的命題是科學、有解,非常有趣的,且有廣泛實用價值。

4、有了科學的思路,還要有科學的方法,鍥而不捨才有可能成功。

5、我堅信,“七大死題” 能破解一道後,就能找到它們的觸類旁通點,全部被破解。

(*A*) 於 2006 年 4 月 23 日至 25 日,用二天時間破解了“三等分任意角”(有多種法);

(*B*) 用三小時破解了“做正 17 邊形”;

(*C*) 用三十分鐘,分別破解了:

“做正 7 邊形”;“做正 9 邊形”;“做正 11 邊形”;“做正 13 邊形”;

這些是被德國數學家高斯,於 1801 年創建的“做正 *N* 邊形” 定律中判定爲不能用標尺作圖解決的“死題”。

中國人打破了“做正 *N* 邊形” 定律的所有禁區。

(*D*) 於 2006 年 4 月 29 日至 7 月 19 日完成了“二倍立方體” 和“化圓爲方” 破解;有多種方法。

以上“七大數學死題破解”,第一時間向國內外一百多家數學機構、刊物及媒體、通報備案。時至今日,沒有收到對其具體破解方法“有異議” 的任何函件。

“七大幾何死題” 係初等數學,按照命題規則不用高等數學,不會復雜化、故弄玄虛,凡看到破解方法的,有中等學歷的敢於說眞話的國內外人士都能看懂、聽懂、分是非。

五、3800 年七大數學“死題” 破解

(世界頂級四大數學難題破解法)

任意角三等分 倍立方體 化圓為方

做正 N 邊形(7、9、11、13 邊形)

1、“任意角三等分” 破解方法,簡稱爲《崔榮琰三分角法》,於 2006 年 4 月 25 日破解成功。於 2006 年 9 月 8 日,在上海檢定,同時獲得四位數學專家等 8 人的一致承認:

作圖的工具是“無刻度直尺、圓規”,經有限步驟(3 步驟) 完成對“任意角三等分” 的破解。結果:用肉眼、圓規、量角器等檢驗是“零” 誤差,完全符合 3 千年命題前輩的要求。破解成功這是不皺的事實。

(1)《崔榮琰三分角法》的第一種方法簡稱爲《1、2、3、點法》。它能快速、簡便、精確地三等分任意角,而且作爲總結《有解實踐》的理論證明,簡單、無可爭辯。

即:角弧、角弦與角底邊的共同交點爲一點(B);擬求作三等分的一條角邊與角弧、角弦相交的點爲 2 點(C、D);角頂點(A) 與 C、D 爲 3 點;只要使 $BC = BD$(圓規能解決),A、C、D 在一條直線上(直尺能解決),那麼這條直線就是三等分的一條角邊,$BC = BD$ 爲三等分角的弧長(弦長),這就是《崔榮琰三分角法》的定理(0 至 180 度角)。

(2)《崔榮琰三分角法》第二種方法解題的關鍵:要自己創建“三等分弧標準分割器”,使用弧度相同(弧的半徑相同)、長度不同的角弧,(0 至 90 度角剩餘弧或角整弧) 平移入“標準分割器” 中,角弧同樣被三等分。返回求作的三等分角,即完成。

“三等分弧標準分割器” 的設置以 30 至 50 度角爲好,過長的角弧(90 度以上) 可以先“二分之一” 後,再平移入“標準分割器” 中進行三等分,經整合後即完成。(以求作角大小,定三等分弧分割器大小,“一題一解”)。

2、倍立方 設給定的立方體的邊爲單位長,設邊長爲 x 的立方體的體積爲 2,則 x 滿足:$x^3 = 2$. 於是,我們的問題是:數“x 等於 3 次根號內 2” 是否能用直尺和圓規作出?

解題關鍵:$x^3 = 2$,尺規做不到,而將它化爲 $x^3 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 1$ 同樣 $= 2$,尺規能做到;而 $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 1$,即底面積爲:$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$、高爲 1 的長方體;將長方體、在體積不變的情況下化爲正方體,經十幾次化、變、整合,即完成,“零” 誤差。化、變過程(始終保持面積、體積不變):長方形菱形長方形菱形正方形正方體。

3、化圓爲方 設圓的半徑爲一個單位,要作一面積等於單位圓的正方形,設這個正方形邊長爲 x,則 $x^2 = \pi$. 於是,問題相當於能否用尺規作出一條長爲“$\sqrt{\pi}$” 的線段?

解題關鍵:$x^2 = \pi$,(據傳 3800 年前 $\pi = 3.14$,近代也常用 $\pi = 3.14$)。

(1) 間接化變化:“$\sqrt{\pi} = \sqrt{3.14}$”;等分 π(3.14) 尺規能做到;作圓與圓內接正四邊形,已知圓面積和正四邊形面積,將圓面積和正四邊形面積之差,即四個弓形面積,求四個弓形面積與正四邊形面積比值,將此比值,擴大到正四邊形面積之中;擴大的正四邊形面積已經化爲長方形,再將長方形化爲正四邊形面積(面積保持不變) 即完成。“零” 誤差。

化變中,(長方形菱形長方形菱形正方形) 保持面積、體積不變。

(2) 直接化變法:$\pi r^2 = a^2$. 即可以理解爲 $\pi = 3.14$;圓面積 $= 3.14$ 個 r^2;尺規能作出 $\pi = 3.14$ 線段,將長方形一邊爲 3.14,另一邊爲 1;化變長方形 → 菱形 → 長方形 → 菱形 → 正

方形。正方形邊長 a 爲根號 3. 14。

(3) 圓周線段原始化變法:作圓;圓心角30度;將圓心角30度弧長化變爲直線長一乘以6,等於半圓周長 —— 半圓周長比半徑 r($r = 1$) 即原始圓周率 π;將長方形一邊長爲半圓周長(已化變爲直線),另一邊長爲1;化變長方形→菱形→長方形→菱形→正方形。正方形邊長 a 爲根號 π;$\pi r^2 = a^2$.

此法,理論上是"0" 誤差,弧長原本化變爲直線長;但作圖不可能"0" 誤差。

(4) 精確化變化(用代數檢測;以 100 公分爲半徑 r 單位長 1;其誤差爲 0 + 0. 0015 毫米):

尺規能作出線段根號2;及線段2. 01;根號2. 01;根號2 + 根號2. 01—(根號2 + 根號2. 01) 除以2— 此線段除以10;— 此線段 +3(即3 個半徑長 r;$r = 1$)— 此線段爲長方形一邊長;另一邊長爲 $r = 1$ 化變長方形 → 菱形 → 長方形 → 菱形 → 正方形。

正方形邊長 a 即爲根號 π;操作 π 爲3. 1415979125 與理論 π 爲3. 141592653;以100公分爲半徑 r 單位長1,其求作的正方形邊長 a 誤差爲0 +0. 0015 毫米,也就是0 + 人的頭髮粗0. 07 毫米的四十七分之一,比千分尺還要精確,千分尺最小測量精度爲 0. 01 毫米。

另:A) 尺規能作出線段 1. 97,根號 1. 97;及線段 2. 04,根號 2. 04;按以上方法操作 π 爲3. 141592628 與理論 $\pi = 3. 141592653$ 結果誤差0 - 0. 0000025 平方釐米;$a = 0 - 0. 000007$ 毫米。

B) 尺規能作出線段 1. 98,根號 1. 98;及線段 2. 03,根號 2. 03;按以上方法 A 與 B 組合加、減、乘、除運算(尺規能做成),操作後根號 π 爲 3. 141592653 44567 與理論根號 π = 3. 141592653 5897 求作出的正方形邊長誤差爲 $a = 0 - 0. 00000000004$(電子計算機無法測量);如以地球半徑 6400 公里爲圓 $r = 1$;求作出的正方形邊長 a 誤差爲 0 - 0. 0256 釐米。

4、做正任意邊形(正 17、7、9、11、13 邊形)。

按照《崔榮琰三分角法》的原則,創建"四又四分之一" 弧、"二又四分之一" 弧、"三又二分之一"、"二又四分之三" 弧、"三又四分之一" 弧、弧標準分割器,將"90 度角弧平移入弧標準分割器" 中,經整合後同樣可以簡捷、明了、正確地破解:

(1) 高斯用代數方法破解的 —"做正 17 邊形";

(2) 高斯沒有破解的 —"做正 9 邊形、做正 7 邊形";

(3) 高斯'做正 N 邊形' 定理中判定無解的 —"做正 11 邊形、做正 13 邊形等";世界頂級難題。結果均爲"零" 誤差;

(4) 可以"俟正(任意)N 邊形";打破了"做正 N 邊形" 定理;

七大(死題) 難題破解作圖附後

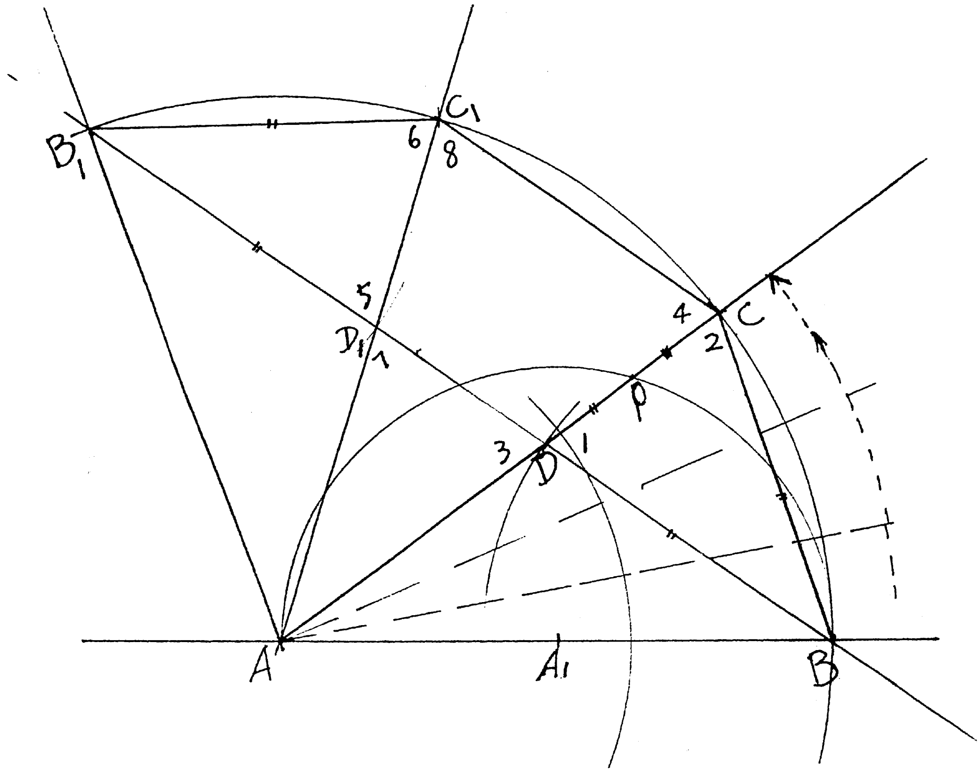
以上七大"難題破解",作圖工具(尺規) 簡單、工藝完美,可操作,"零" 誤差,有廣泛的實用價值,初中生就能完全掌握應用。理論是實踐的總結,實踐在變,理論當然要變。

於 2006 年 11 月 26 日下午在上海市科學會堂公開破解演示

（僅就"任意角三等分" 作出資料提供 —— 本刊注）

（a）用尺規任意角三等分。

《崔榮琰三分角法》第一種方法即《1、2、3 點法》(可分任意角 $0-180°$)。



解實:角弧、角弦與角底邊共同交點爲一點 B;

擬求作三等分的一條角邊與角弧、角弦相交的點爲二點(C、D);角頂點 A 與 C、D 爲三點;只要使 $BC = BD$(圓規能解決)A、C、D 在一條直線上(直尺能解決)。那麼這條直線就是三等分角邊。$BC = BD$ 爲三等分角的弧長(弦長)。

操作;用直尺過角頂點由角底邊向上移動,當直尺與角弧、角弦的交點 C、D 至 B 點距離相等(圓規能解決)。該等長的 $BC = BD$ 就是三等分的弧長(弦長)。爲了直尺移動至準確位置,可作 AB 間的中點 $A1$ 爲圓心 $A1B$ 爲半徑作半圓。半圓的點(P) 至角弧、角弦等距離,($PD = PC$) 就是直尺移動停止的點。

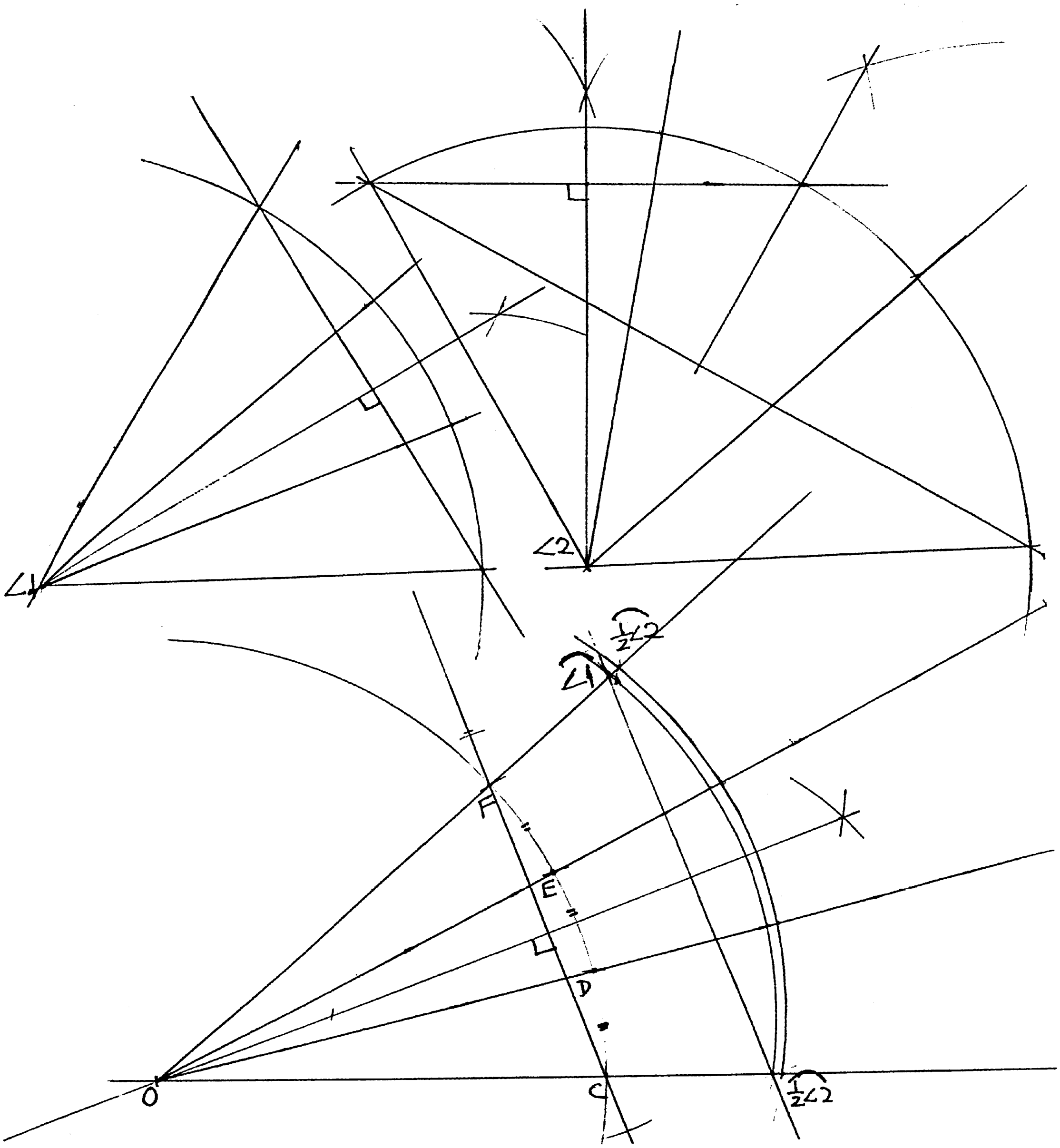
證明:已知:$BD = BC = B_1C_1 = B_1D_1$　$C_1C \parallel B_1B$($AC_1 = AC$　$AD1 = AD$ 等腰 △ 形)

因爲 $\angle 1 = \angle 3$ $\angle 1 = \angle 2$(等腰 △ 形底角相等) $\angle 3 = \angle 4$(同一頂角的二等腰 △ 形底角相等)

所以 $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4 = \angle 5 = \angle 6 = \angle 7 = \angle 8$ 所以 $\angle B_1AC_1 = \angle C_1AC = \angle CAB$(三個頂角邊相等)

結果:作圖完美、正確,"0 誤差",數學證明完整、簡單、易懂。尺規一定能三等分任意角。

(*B*) 三等分任意角 ∠1、∠2(崔榮琰三等分角之第二種方法)。



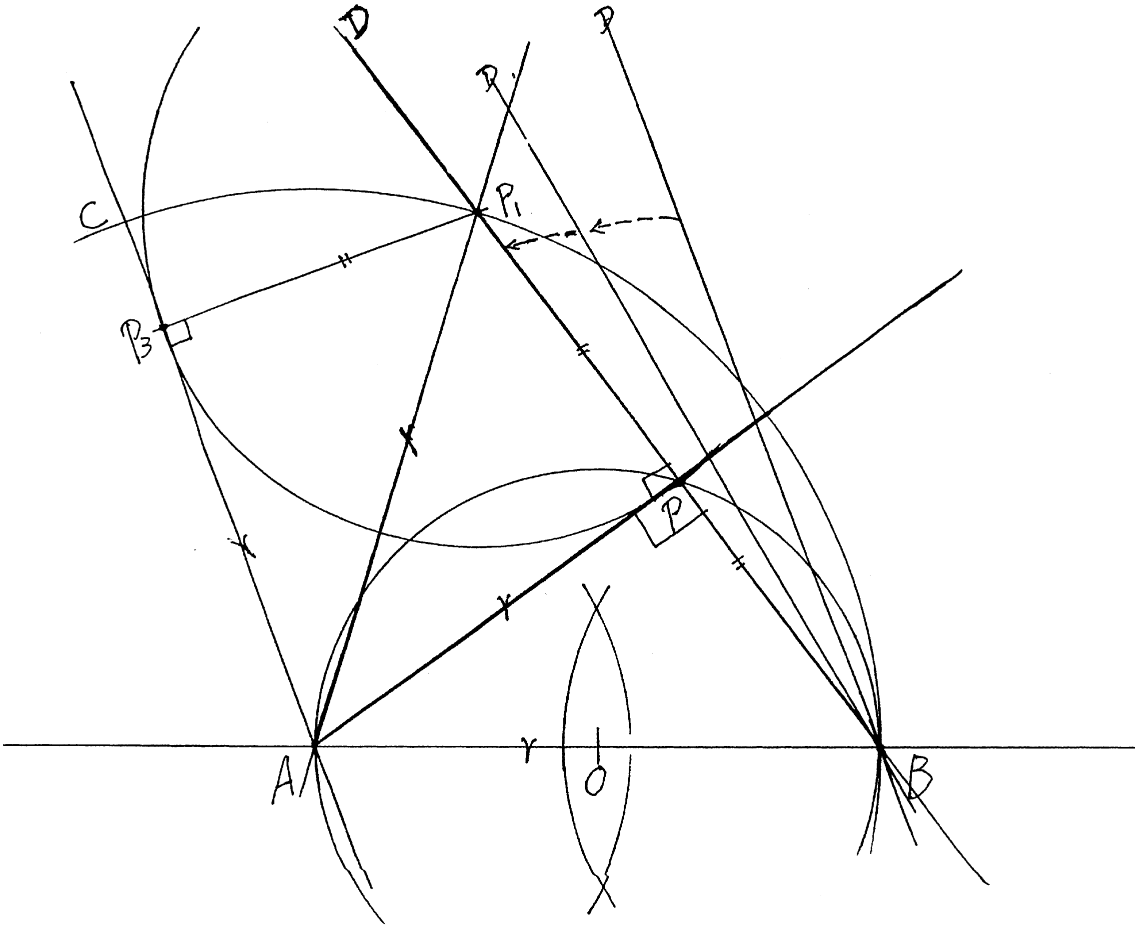
操作:“作三等分弧標準分割器” 使$\overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DE} = \overset{\frown}{EF}$ 將 ∠1 弧平移入三等分割器中。

$\frac{1}{2}$∠2 弧平移三等分割器中,弧度一改的弧(即弧度半徑相同,長度不同的弧同樣弧三等分)

結果:符合了千年古代科學家命題要求三等分任意角“0” 誤差。

專家等用肉眼、量角器、圓規杆測“0” 誤差。

(C) 任意角三等分(0 – 180°)《崔榮琰三等分角法》第三種簡稱"二弧四點法"。



三等分任意角 $\angle CAB$。

作圖:$\angle CAB$,$\overset{\frown}{BC}$ 爲一弧;以 AB 爲直徑作半圓 $\overset{\frown}{AB}$ 爲二弧;直尺過 B 點向 C 點移動,交 $\overset{\frown}{AB}$ 於 P 點、$\overset{\frown}{BC}$ 於 P_1 點,P_1 爲圖心,AC 爲圓心 P_1 的切線,切點 P_3,連 P_1P_3 垂直於 AC;B 點、P 點、P_1 點、P_3 點爲四點;直尺過 B 點向 C 點移動至 $P_1P = P_1P_3$ 時停止(圓規能方便、正確的做到);當 $P_1P = P_1P_3$ 時直角 △ 形 $P_1P_3A \cong$ 直角 △ 形 P_1AP(直角 △ 形斜邊和一直角邊對應相等);而直角 △ 形 $P_1AP \cong$ 直角 △ 形(直角 △ 形斜邊一直角邊對應相等);180 度弧上任意一點和 AB 相連,其角 APB 爲直角(90 度角);

結論:直角 △ 形 $P_1P_3A \cong$ 直角 △ 形 $P_1PA \cong$ 直角 △ 形 PAB:因此其相應角也相等。四點搆成的三段直線相等(圓規、直尺能輕易而正確的做到)。

六、後記

3800 年七大數學"死題" 公開破解會,在方方面面的支持下,於 2006 年 11 月 26 日在上

海科學會堂取得圓滿成功。

新華社、北京科技報、東方早報、香港大公、重慶晚報、上海汽車報、勞動報、中國教育發展、中國教育在線、中國數學教育、中國基礎教育、全國教育資訊、中敎、新浪、雅虎、網易、奧數、亞洲教育、多倫多、搜狐、東方、新民、新民週刊、上海數學會、上海科普等近百家媒體、互聯網及時登載了崔榮琰先生在上海市科學會堂破解的新聞和破解方法。

報導的標題有:

60 歲老人破解 3800 年數學"死題";

中國數學狂人破解 3800 年數學"死題";

滬翁破解 3800 年數學"死題";

數學狂人破解世界數學難題;

…… 等。

按國際慣例,世界頂級創新成果,要向國內外相關數學機構及媒體公示,如二年內沒有重大破綻被揭示,就能認定:國際公認破解成功。

這七大數學"死題" 破解,係初等幾何,應該讓全球數千萬中學生及更多的數學愛好者了解、掌握,故公開出版發行。

作者水平低下,不妥之處難免,特拋磚引玉、集思廣益,用團隊精神,使中國人早日拿下世界數學皇冠上的"七顆" 古老而璀璨的明珠。

再一次向,看我破解的數學敎師、數學係畢業生、數學編輯、數學愛好者、相關領道等,表示感謝;

向不想看、不相信的相關專家,表示致敬;你們從反面、肯定了難題的貨眞價實、名不虛傳。

誠望,各界人士齊正!

【編者按】崔榮琰先生熱情地送給澳門數學教育研究學會會長汪甄南先生一本驚世大作《3800 年七大數學死題破解》,本論文是作者之大作的部分內容(特别是,破解之展示僅刊登"三等分角" 的內容)(標題的編號屬本刊加插,特此說明)。爲與澳門的數學愛好者,遵照汪會長的達談,今將該文的部分內容刊登於本刊,供讀者欣賞。該內容在國內外的數學界中,專家的評論很不一,本刊本著**"文責自負"** 和**"百家齊放,百家爭鳴"** 的精神刊登於本刊物,供讀者參考和研究。

按汪會長的安排,近期崔先生將應澳門數學教育研究會的邀請來澳作專題講座和相關的作圖演示。屆時歡迎數學愛好者勇躍參加。

又,《3800 年七大數學"死題" 破解》一文是作者(由香港相關出版社出版) 的相應專著中的部分內容,特此說明。

2018“希望杯”全國數學邀請賽(中學第二十九屆)
報名人數統計表

學校名稱	初一	初二	初三	高一	高二	合計
澳門大學附屬應用學校	28	34	24	7	34	127
培華中學	10	10	10	10	10	50
聖保祿學校	30	30	36	36	30	162
粵華中學	24	24	24	24	24	120
菜農子弟學校	40	40	40	40	40	200
氹仔坊眾學校(中學部)	20	20	20	20	20	100
鏡平學校 *	50	40	50	45	40	225
培正中學	33	44	39	131	155	402
澳門坊眾學校	25	25	25	25	25	125
陳瑞祺永援中學	11	14	13	9	13	60
培道中學	30	30	30	30	30	150
聖公會(澳門)蔡高中學	20	20	20	0	0	60
教業中學	10	15	10	10	15	60
濠江中學	36	36	40	60	60	232
同善堂中學	20	20	20	20	20	100
勞工子弟學校	30	30	30	30	30	150
浸信中學	40	40	40	40	40	200
廣大中學	5	6	9	8	13	41
新華學校	2	2	2	2	2	10
濠江中學附屬英才學校	48	48	26	26	0	148
東南學校(中學部)	9	11	12	17	17	66
利瑪竇中學	0	0	3	7	0	10
慈幼中學	5	12	2	0	0	19
聖羅撒女子中學中文部	22	15	14	32	53	136
合計	548	566	539	629	671	2953

2018“希望杯”全國數學邀請賽（小學第十六屆）
報名人數統計表

學校名稱	小四	小五	小六	合計
濠江中學附屬英才學校	75	60	45	180
培道中學（小學部）南灣分校	32	32	32	96
培道中學氹仔小學分校	20	20	20	60
教業中學	15	15	20	50
教業中學（新口岸小學）	20	20	20	60
菜農子弟學校	64	64	64	192
氹仔坊眾學校	12	16	12	40
鏡平學校（小學部）	40	40	40	120
培正中學（小學部）	81	72	95	248
聖若瑟教區中學第五校	32	32	32	96
澳門坊眾學校（小學部）	16	16	16	48
陳瑞祺永援中學	15	15	0	30
濠江中學附屬小學	143	146	98	387
同善堂中學（小學部）	30	30	30	90
澳門浸信中學（小學部）	3	7	11	21
澳門大學附屬應用學校	21	15	16	52
培華中學附小	8	8	8	24
婦聯學校	20	12	8	40
聖公會（澳門）蔡高中學	20	20	10	50
東南學校	6	8	0	14
新華學校（小學部）	20	20	20	60
澳門中德學校	0	4	5	9
海星中學（南灣分校）	5	6	7	18
聖善學校	3	2	2	7
蓮峰普濟學校	5	9	6	20
聖羅撒女子中學	28	23	28	79
合計	734	712	645	2091

澳門數學教育研究學會

聯絡地址:澳門殷皇子大馬路 11 號群發花園第一座 14 樓 A

電話:853 -28965253,853 -66878553 傳真:853 -28788259

E -mail: macaumath@ yahoo. com. hk , inwmacau@ yahoo. com. hk

Website:http://www. mathsmo. com/

會務活動紀錄

2002 年

6 月 17 日	在氹仔海島公證署辦理本會注冊手續.

2003 年

6 月 7 日	舉辦"中國數學教學的雙基原理—2002 年數學教育高級研討班"——會議精神傳達報告會.
12 月 13、14 日	舉行中小學"數學開放題教學"專題研討會及示範課.
12 月	《澳門數學教育》創刊號出版.

2004 年

4 月 17 日	舉辦"DM_Lab 和動態數學教學"講座.
9 月 30 日	赴杭州拜訪教育研究中心,訪問海寧市崇文實驗學校及杭州市南宛小學.
10 月 9、10 日	舉行"數學情景與提出問題教學"專題研討會及示範課.

2005 年

3 月 24 -28 日	赴貴陽、興義市參觀和交流,訪問興義八中和延安路小學.
4 月 16 日	與教育出版社合辦"突破兒童數學思維空間"研討會及《新思維數學》教材展覽會.
11 月 26、27 日	舉行"全國小學特級數學男教師教學風采展示"專題研討會及示範課.
12 月 20 -28 日	前往武漢訪問華中師範大學第一附屬中學、東方紅小學以及育才第二小學.

2006 年

3 月 4 日	舉辦"因材施教、拔尖保底——如何幫助數學差生學習"專題研討會.

4 月 14、15 日　赴廣東省河原市第二小學和河源市中學觀課.
6 月 25－29 日　前往山東濟南參觀濟南第十二中學和解放路第一小學.
12 月 9－10 日　舉行“國家數學教育高級研修班‘數學教師教育’澳門會議”.

2007 年

4 月 28、29 日　與全國嘗試教學理論研究會合辦“兩岸四地小學數學課堂教學觀摩及說課比賽”.
7 月 4、5 日　與澳門大學教育學院合辦“有效的數學教學:一個國際視角”及“有效數學教學實務:美國的經驗”講座.
7 月 30 日至
8 月 3 日　訪問陝西省西安市吉祥路小學、西安市第一中學、西北工業大學附小.
9 月 1 日　舉辦“創造性數學的想法及方法運用”講座.

2008 年

11 月 1 日　舉辦“小學數學專家講座”.
11 月 22 日　舉辦“中學數學教育改革成功經驗介紹暨課堂教學展示”專題會議.

2009 年

5 月 29 日、30 日　前往美國參加第 34 屆美國高中數學競賽(ARML),榮獲國際組第一名.
8 月 15 日～20 日　訪問內蒙古包頭市鐵路二中.
11 月 14 日　舉辦“數學教學的有效性與開放性” 研討大會及示範課.
12 月 5 日、6 日　舉辦“第一屆澳門小學數學優質課堂教學” 評比大會.
(慶祝祖國成立 60 週年,澳門回歸 10 週年,本會成立 5 週年活動)

2010 年

6 月　成立“澳門數學奧林匹克學會”,政府憲報刊登該會章程.
11 月 26 日、27 日　組織 18 名數學優秀學生前往北京參加首屆世界數學團體錦標賽.
1 月 18 日　華東師範大學聘請汪會長擔任華東師範大學國際數學奧林匹克研究中心澳門實驗培訓基地主任.

2011 年

1 月 28 日　「美國高中數學競賽」澳門區代表隊榮獲澳門特區政府頒授功績獎狀.
9 月 27 日、28 日　與澳門大學教育學院合辦“國際著名教育家蘇霍姆林斯基教育理念介紹會”.

2012 年

6 月 9 日	舉辦“如何激發學生數學創造力講座暨中學數學課堂教學展示”公開課.
8 月 1 – 6 日	赴吉林、延邊中、小學進行學術交流.
11 月 3 – 4 日	舉辦“全國小學數學四大教學流派課堂教學展示課”.
11 月 3 日晚上	舉行慶祝本會成立十週年晚宴,十週年成果展.

2013 年

4 月 6 日	舉辦亞太區小學奧數(澳門區)選拔賽.
4 月 14 日	進行中學第二十四屆、小學第十一屆“希望杯”澳門地區第二試決賽.
4 月 16 日	名譽會長陳明金先生宴請本會,表示對本澳數學教育的支持和鼓勵.
5 月 11 日	舉辦“幼兒教育理論講座與幼兒教學實踐示範課”.
6 月 1 日	赴新加坡參加 2013 亞太小學數學奧林匹克總決賽.
5 月 31、6 月 1 日	前往美國參加第 38 屆美國高中數學競賽(ARML),澳門隊第二.
6 月 15 – 19 日	舉辦數學實驗——統計與概率工作坊.
7 月 10 日	澳門基金會爲 ARML 澳門隊凱旋而歸的健兒舉行慶功宴.
7 月 18 日	舉行希望杯、亞太區小學奧數(新加坡)、數學大王賽頒獎禮暨(ARML)美國高中數學競賽成果滙報會.
8 月 1 – 7 日	赴哈爾濱、鷄西中、小學進行學術交流.
11 月 16 – 17 日	與澳門大學教育學院合辦「嘗試教學理論研究華人論壇」和幼兒教育報告會.
12 月 7 – 9 日	舉辦「中學、小學數學奧林匹克教練員考級證書培訓班」.
12 月	《澳門數學教育》第十一期出版.

2014 年

1 月 11 日	舉行「幾何王」初中平面幾何學習軟件介紹會.
4 月 3 日	拜訪澳門基金會.
4 月 13 日	進行中學第二十五屆、小學第十二屆"希望杯"澳門地區第二試決賽.
4 月 15 日	拜訪澳門教育暨青年局.
4 月 17 日至 21 日	赴臺灣澎湖、高雄參訪活動.
4 月 26 日	舉辦“史豐收速算法”介紹會.
5 月 30 – 31 日	前往美國參加第 39 屆美國高中數學競賽(ARML),澳門隊第二.
6 月 14 日	舉行「領道數學科組工作經驗介紹會暨瀋陽七中教學展示課」活動.
7 月 11 日	舉行「幾何王」初中平面幾何學習軟件培訓班.

7 月 12 日	舉行希望杯、亞太區小學奧數(新加坡)、數學大王賽、環亞太杯國際數學賽、中小學數學奧林匹克教練員考級證書頒獎禮暨(ARML)美國高中數學競賽成果滙報會.
8 月 10－16 日	派學生前往四川西昌參加澳門基金會教科文中心航天團.
10 月 18 日	舉辦"熟能生巧數學觀點講座暨高中數學教學展示課".
11 月 22－23、29－30 日	舉辦"史豐收速算法"道師培訓班.
12 月 6 日、7 日	舉辦"第五屆澳門小學數學優質課堂教學"評比大會暨全國協作區孔子杯小學數學課堂教學大賽(澳門賽區).
12 月	《澳門數學教育》第十二期出版.

2015 年

1 月 16 日	拜訪澳門基金會。
1 月 31 日	舉行成立"史豐收速算法"培訓基地新聞發佈會。
4 月 12 日	進行中學第二十六屆、小學第十三屆"希望杯"澳門地區第二試決賽。
4 月 19 日	拜訪澳門教育暨青年局。
5 月 10 日	汪會長參加上海"小學數學教師教育高級研修班"。
5 月 23 日	舉行「任勇的數學教學主張」講座。
5 月 28－31 日	前往新加坡參加第 26 屆亞太區小學數學奧林匹克賽決賽。
5 月 29－30 日	前往美國參加第 40 屆美國高中數學競賽(ARML),澳門隊重獲冠軍。
6 月 13 日	舉行希望杯、亞太區小學奧數(新加坡)、數學大王賽、環亞太杯國際數學賽暨(ARML)美國高中數學競賽成果滙報會。
6 月 3－7 日	澳門大學教育學院與本會合辦"數學整數教育"專題研討會。
6 月 6 日	邀請意大利幾何學專家和捷克數學家教育專家舉行講座。
6 月 27 日	往港參加史豐收速算兩岸三地比賽。
7 月 11 日	與澳門大學教育學院、香港資優教育學會合辦「環亞太杯國際數學邀請賽總決賽」。
8 月	《兩岸三地昇大數學教程》出版。
8 月 8－12 日	澳門隊赴桂林參加 WMI 世界數學邀請賽。
8 月 15－20 日	赴陝西省進行學術交流。
10 月 17 日	舉辦"幼兒教育報告會及幼兒史豐收速算法演示課"。
12 月 5 日、6 日	舉辦"第一屆小學新思維數學"澳門杯"課堂教學大賽評比大會"。
12 月 7 日	獲澳門特別行政區授予團隊功績獎狀。
12 月	《澳門數學教育》第十三期出版。

2016 年

1 月 17 日	舉辦“兒童資優培育” 介紹會。
3 月 5 日	舉辦“希望杯數學競賽試題分析”講座。
3 月 19 日	合辦 “中、小學數學實驗和智力發展”專題講座。
5 月 26 – 29 日	前往新加坡參加第 27 屆亞太區小學數學奧林匹克賽決賽。
6 月 3 – 4 日	前往美國參加第 41 屆美國高中數學競賽(ARML) ,澳門隊獲亞軍。
6 月 18 日	舉行希望杯、亞太區小學奧數(新加坡)、數學大王賽、環亞太杯國際數學賽暨(ARML)美國高中數學競賽成果滙報會。
10 月 22 日	舉辦“雲南麗江市教育局講座暨中學示範課”。
11 月 19 日	舉辦“四川省成都市成華小學示範課”。
11 月 25 – 29 日	前往馬來西亞參加 MIMO 馬來西亞國際奧數競賽。
12 月 10 – 11 日	舉辦第二屆小學“新思維數學”澳門杯課堂教學比賽。
12 月	《澳門數學教育》第十四期出版。

2017 年

3 月 11 日	慶祝十五週年會慶暨春茗聚餐。
5 月 25 – 28 日	前往新加坡參加第 28 屆亞太區小學數學奧林匹克賽決賽,邵敏老師帶領,(濠江)張健瑩、(培正) 葉俊濠和(濠江英才)洪崇博同學獲白金獎,張健瑩同學在新加坡勇奪國際榮譽獎,爲澳門學界爭光。
6 月 2 – 3 日	組織本澳 18 名數學優秀學生前往美國拉斯維加斯內華達大學拉斯維加斯校區(UNLV)參加第 42 屆美國高中數學競賽(ARML),澳門隊領隊、教練汪甄南、施振雄、鄧海棠、金鑫,隊員包括(濠江) 談皓、李明亮、袁浩軒、李俊傑、李浩源、戴詠雅、(教業) 鄭啓源、(鏡平) 何浩賢、陳明浩、廖俊龍、黃丞賢、(勞校) 蔣岳澎、李家維、樑鞍華、(培道)樑文浩、廖汶鋒、王志華、(粵華) 蕭俊聰。比賽完畢後,遊覽洛杉磯植物園和環球片場等景點。澳門隊於國際排名榜亞軍,爲澳門學界爭光。
6 月 17 日	於濠江中學禮堂舉行希望杯、亞太區小學奧數(新加坡)、數學大王賽、環亞太杯國際數學賽暨(ARML)美國高中數學競賽成果滙報會。教育暨青年局黃超然處長爲獲得者及其教練員頒發獎牌和證書。
7 月 8 – 9 日	於濠江中學禮堂舉行首辦「首屆奧林匹克數學三維杯環亞太國際邀請賽賽(2017)」,這次“三維杯”環亞太國際邀請賽(3D Cup PAP)有澳門、香港、上海、深圳、成都、綿陽、高雄、越南、馬來西亞、菲律賓、印度尼西亞等亞太區國家及地區的 518 名中小學生參加競賽活動,教育暨青年局陸榮輝先生等頒獎。個人賽獎項:初小組冠軍(上海劉昱辰同學)、中小組冠軍 (綿陽陳奕文同學) 、高小組冠軍(成都程浩同學);

初中組冠軍(濠江中學高偉盛同學);高中組冠軍(培道中學廖汶鋒同學)。

9月12日 拜訪譚俊榮司長。

11月4日 於高美士中葡中學多功能廳舉辦“海峽兩岸小學數學課堂教學交流展示”,邀請吉林省 長春市第二實驗小學 劉麗萍校長講“學校領道如何做好數學教改工作”經驗介紹、上海浦東 梅園小學 沈瑾老師作小三年級〈軸對稱圖形〉展示課(同善堂同學參與)、吉林省 長春市第二實驗小學 林晶老師作小四年級〈可能性〉展示課(浸信同學參與)、臺灣臺東 廣原國小 邱泓智老師作小五年級〈分數的乘法與分數基本概念〉展示課(培正同學參與)。

12月9日、10日 於高美士中葡中學禮堂舉辦第三屆小學“新思維數學”澳門杯課堂教學比賽。

進入決賽老師:

浸信中學李煥棉老師,課題:小五〈認識方程(一)〉

新華學校樑雪婷老師,課題:小三〈 24小時報時制〉

明愛學校林麗燕老師,課題:特殊教育輕度班〈初步認識分數〉

濠江中學附屬小學譚慧欣老師,課題:小三〈初步認識分數〉

化地瑪聖母女子學校吳毅清老師,課題:小二〈認識時、分〉

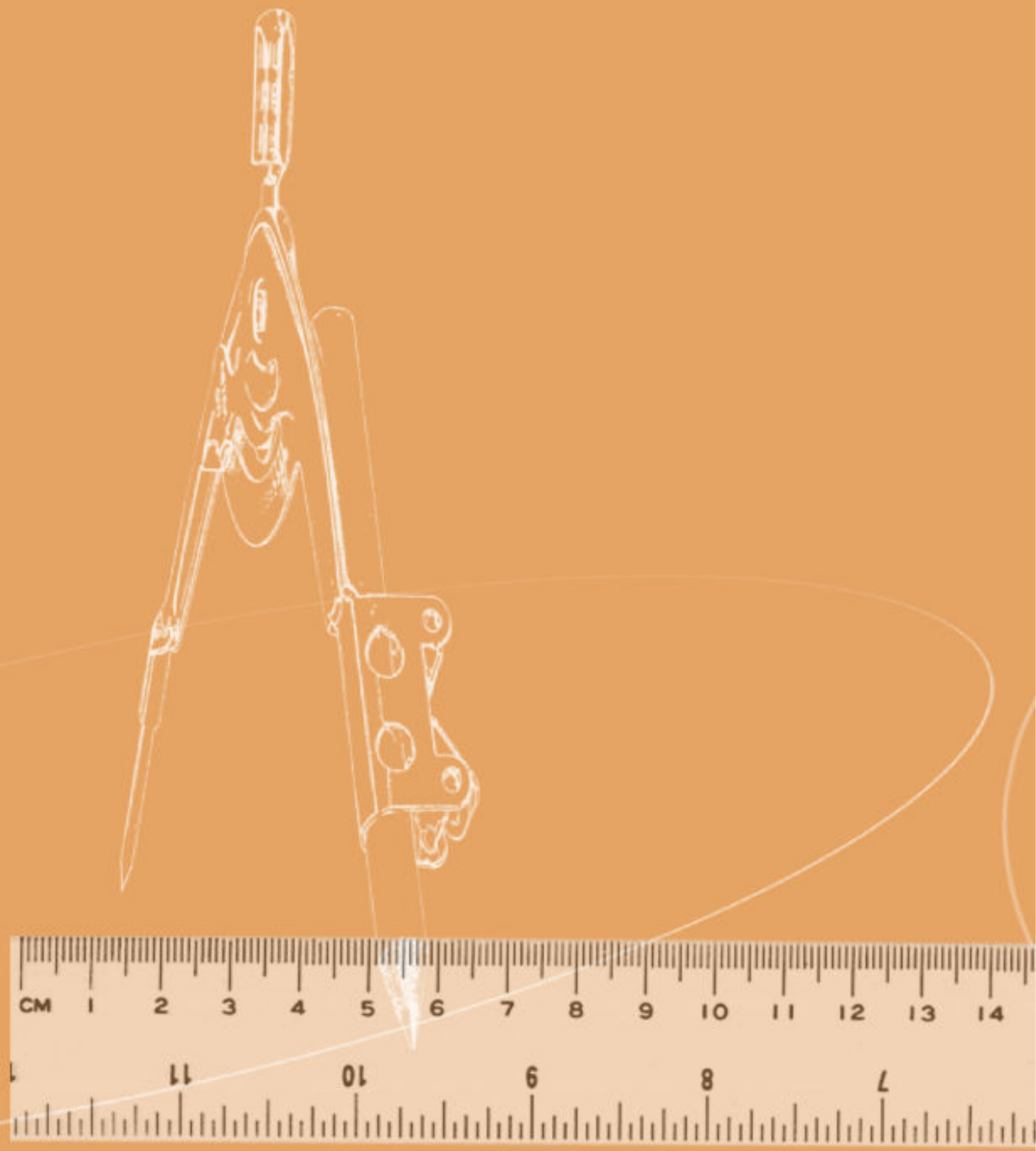
評委:方運加教授(首都師範大學數學係)、邱學華院長(常州大學嘗試教育科學研究院)、史豐寶主任(史豐收速算法推廣中心)、鄭志民主任(澳門數學教育研究學會副會長)、蔡兆明(澳門數學教育研究學會副理事長)。

評選結果:

一等獎:李煥棉老師、譚慧欣老師

二等獎:樑雪婷老師、林麗燕老師、吳毅清老師

12月 《澳門數學教育》第十五期出版。


CM 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14
11 10 9 8 7