第十四期 No.14
ISSN 1814-2176

# Educação Matemática de Macau

# 澳門数学教育

——张奠宙 題

# Mathematics Education in Macau

澳門數學教育研究學會出版

2016年12月

ISSN 1814-2176

# 澳門隊赴美參加第 41 屆全美高中數學競賽
（2016 年 5 月 31 日至 6 月 9 日）


澳門隊獲國際組團體總分亞軍、澳門隊員合體照

隊員靜聽施教練之賽前訓示

B 隊成員與導師、汪領隊合照

拉斯維加斯內華達大學校區賽場一瞥

澳門隊參觀當地機械工程學院

# 2016 亞太小學數學奧林匹克賽（新加坡華僑中學）
（2016 年 5 月 26 日至 29 日）


澳門代表隊師生合照


濠小李俊賢同學獲新加坡亞太小學數學奧林匹克賽白金獎


濠小黃欣婷同學獲新加坡亞太小學數學奧林匹克賽白金獎


濠小黃欣婷同學獲新加坡亞太小學數學奧林匹克賽榮譽獎

# 赴四川參訪學習、觀光交流

（2016 年 7 月 28 至 8 月 2 日）


拜訪四川成都市成華小學

汪會長與四川教育廳處長會面


本會成員與成華小學教師進行座談會

成華小學校長介紹校園

四川九寨溝合影

四川羌少數民族村合影

澳門数学教育（第十四期） 2016 年 12 月

# 目　　錄



澳門教育暨青年局
澳　門　基　金　會　贊助

澳門數學教育研究學會出版
澳門新聞局編號：2877
地址：澳門南灣街 107 號
刊頭題詞：張奠宙教授
排版：廣源紙業文具行
印刷：文寶印務有限公司
刊號：ISSN 1814－2176

# 基於問題的探究性數學學習

## —— 近地小行星(2011UW158)自轉週期研究

Mathematics Learning Base on The Research Project – Research on Rotational Period of NEA:2011UW158

澳門培道中學　金　鑫　吳文希　劉善恒

【摘要】針對小行星光變觀測與分析,建立數學模型,利用傅立葉級數與最小二乘法使用 Matlat 數學軟件進行對比研究。在高等院校以及科研單位與中學攜手搭建一個將科研專案科普化提供給中學生可以進行探究式的研究學習平臺。中學生在這樣的科研專案下進行自主的探究性的數學學習。

【關鍵字】數學建模、探究學習、小行星光變

***Abstract***: *This research of the rotational period of asteroids, basing on the light curves observed at Purple Mountain Observatory in Nanjing, built a mathematical model by Fourier series method as well as least square method. Universities research institutes and secondary schools worked together to build inquiry – learning platform, it supported high school students, optically variable asteroid observation and analysis. Students´ carried out research projects with independent inquiry learning.*

***Keywords***: *mathematical model, Inquiry Learning, Asteroid light changed and analysis*

## 1. 前言

國際數學大師陳省身先生晚年任教於天津南開大學,在一次課堂上一位學生拿著一道奧數題目來請教大師。陳省身先生看了看題目,表示不會做。至今華人中唯一榮獲被稱爲世界數學領域諾貝爾獎的菲爾茲獎的丘成桐先生在回應陳省身大師這段故事的時候說道“奧數”題目很少是一流的數學家出的,而且這些題目出得很偏。對學生來說,解決非一流數學家出的題目,沒什麼特別了不起的。更嚴重的是,學生們習慣於解決別人出的問題,而不是自己發現的問題,以後不會有很強的創新能力。中國培養數學人才的方法局限性很大,“奧數”更是如此,只讓他學習數學方面的知識,其他方面的知識很少學習。“知識面窄對於學生一生的成長和發展都不利,有的人因此毀了前途。”

筆者由小學開始學習奧數，參加奧數比賽，進入教師行列之後又開始了奧數的培訓工作。但是筆者對於現時數學教學一味追求奧數訓練的做法實在不能苟同。奧數並不可以培養學生的數學家思維，甚至偏離了數學作爲工具學科的功能性作用。學生上了奧數課，題目就會解，沒有學過就不會。根據統計，適齡青少年適合進行奧數訓練的學生只有 3%，這只是適合訓練的數字，而不是可以有機會獲得奧數比賽優異成績的學生人數。然而事情又沒有這樣簡單，筆者所任職的學校每年級大概有 120 人左右，如果按照 3% 的比例，應當平均每年級只有 3.6 名學生適合進行奧數學習，但是筆者所在的學校並不是出類拔萃的名校，這 3.6 名同學很有可能有一位到兩位同學選擇了所謂的名校就讀。本校各年級中適合奧數學習的人數很少，基於這樣的情況，身爲一位元數學老師需要考慮奧數訓練何去何從？

作爲一名進行數學教學的前線教師，我們要用怎樣的方法提昇學生的數學思維能力或是提高學生應用數學於實際當中，解決一些實際的問題？

基於這樣的想法，我們開展了**"基於問題的探究"**式數學教學。通過一個預設好的項目，製造一個問題情境，學生展開自主學習，尋找數學方法，建立數學模型，進而解決實際問題。

## 2. 基於問題的探究式數學教學專案簡介

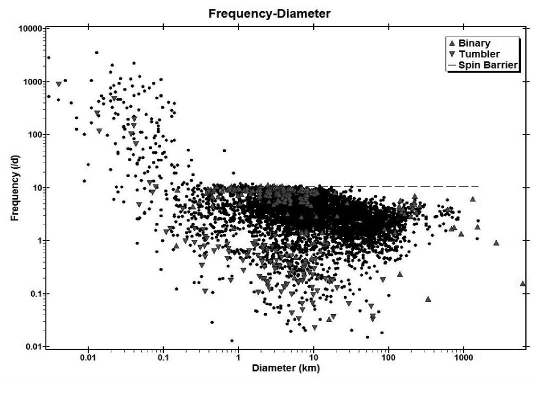
科研重視研究的結果，教育重視學習的過程。科研與教育之間是否可以有機的結合起來而成爲中學教育中一種新的學習模式？而又如何透過科研項目科普化（趙軍，2014）從而實現探究式的研究性學習呢？

一個偶然的機會可以使得澳門培道中學天文小組的同學參與到中科院南京紫金山天文臺與澳門科技大學合作進行的"大樣本小行星光變觀測與分析"的天文科研專案之中。雖然這是一個前沿科研專案，但是由天文學科研專案入手進行探究式的研究性學習難度適中易於入手。

### 2.1. 小行星光變觀測與分析專案簡介

高等科研機構研究的**"大樣本小行星光變觀測與分析"**是通過位於紫金山天文臺盱眙觀測站的大型地面望遠鏡開展對小行星的大視場觀測，采集大樣本小行星的光變曲線。同時對幾十甚至上百顆小行星同時做光度監測、收集數據。而我們的同學的參與過程只針對其中一顆小行星做觀測分析。通過研究的過程，進行探究性學習並了解科研的過程與方法。

我們研究對象爲 2011UW158 小行星，這是一顆近地小行星（NEA）。它在 2011 年 10 月 25 日通過泛星計畫即全景巡天望遠鏡和快速回應系統（Panoramic Survey Telescope and Rapid Response System，Pan－STARRS）設於美國夏威夷茂宜島海勒卡拉火山觀測站所發現。我們選擇這顆小行星作爲研究對象，是由於它的特殊性決定的。如右圖所示，大部分小



行星的直徑超過兩公里,自轉速度超過兩小時。而 2011UW158 小行星的直徑小,轉速快,成分特殊(90% 爲白金),并且在2015年7月最爲接近地球。於是,我們於2015年8月前往紫金山天文臺盱眙觀測站,使用其大型地面望遠鏡開展對小行星做大視場觀測,采集小行星的光變曲線。

### 2.2. 數據分析與處理

我們由科研專案的研究目標與步驟著手出發將科研專案科普化。依託澳門科技大學的科研團隊,中學生全程參加大樣本小行星光變觀測與研究項目。在探究的過程中,不斷提出問題,提出假設,自主的去尋找研究方法,一邊學習相關的科學知識。科研重視知識成果的獲得,而教育重視的是知識獲得的過程,尤其針對青少年科學素養的培養更是如此。

因此在針對小行星的觀測研究過程中,我們的最終目標是針對小行星進行物理觀測如測光觀測與光譜觀測,得到小行星的光變曲線。分析所觀測的數據,由光變曲線找出光變週期,計算反演小行星的軌道位置以及形狀。

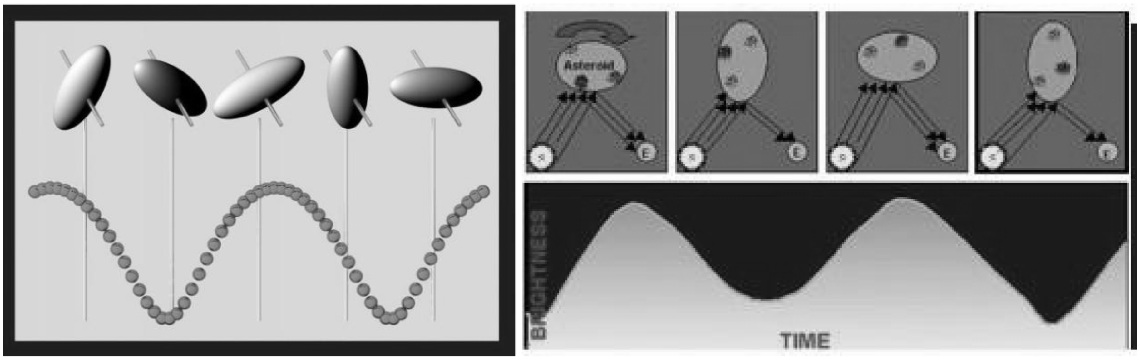
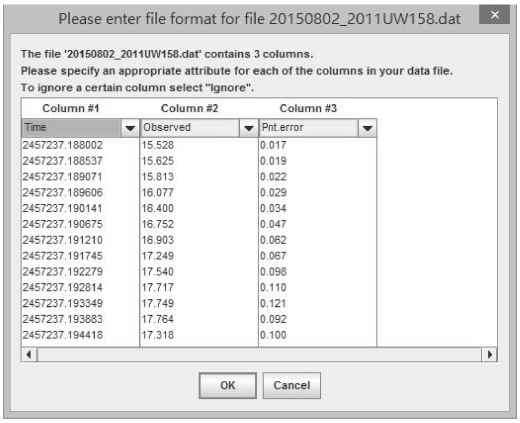



圖2.2 光變曲綫的獲得

但問題來了,我們如何驗證自己反演的計算方法正確呢?教師引道學生設計模擬驗證實驗,即製作不同材質、形狀大小的小行星模型,在實驗室中模擬太陽光平行照射小行星而產生光變曲綫,用以驗證我們的研究方法的可行性。另一方面,參與本項目的同學在 2015 年 8 月期間前往紫金山天文臺盱眙觀測站與中科院的專家學者進行探討交流與學習,直接進行觀測並搜集資料,並將獲得的資料對小行星的週期等參數進行計算。


Please enter file format for file 20150802_2011UW158.dat

The file '20150802_2011UW158.dat' contains 3 columns.
Please specify an appropriate attribute for each of the columns in your data file.
To ignore a certain column select "Ignore".

| Column #1 | Column #2 | Column #3 |
|---|---|---|
| Time | Observed | Pnt.error |
| 2457237.188002 | 15.528 | 0.017 |
| 2457237.188537 | 15.625 | 0.019 |
| 2457237.189071 | 15.813 | 0.022 |
| 2457237.189606 | 16.077 | 0.029 |
| 2457237.190141 | 16.400 | 0.034 |
| 2457237.190675 | 16.752 | 0.047 |
| 2457237.191210 | 16.903 | 0.062 |
| 2457237.191745 | 17.249 | 0.067 |
| 2457237.192279 | 17.540 | 0.098 |
| 2457237.192814 | 17.717 | 0.110 |
| 2457237.193349 | 17.749 | 0.121 |
| 2457237.193883 | 17.764 | 0.092 |
| 2457237.194418 | 17.318 | 0.100 |

OK Cancel

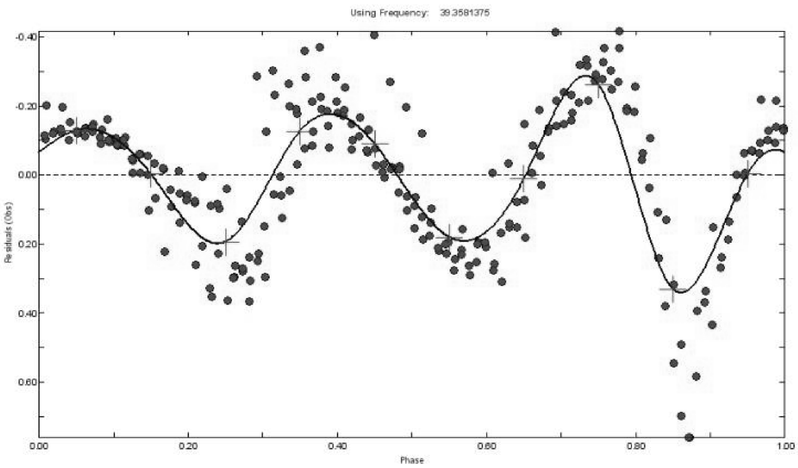
圖2.3 2011UW158號近地小行星光變量據

本探究項目的創新之處就是由澳門科技大學與培道中學攜手搭建一個中學生科學研究的探究性學習平臺,將中學生的探究學習搭建在高等院校的研究項目之上,令學生走出校園站在科研第一綫,去體會科學探索的過程與方法。精進自身的學業,同時爲澳門的未來培養本地的科技人才。

## 3. 探究性數學學習的開展

關於小行星的研究,包括小行星的旋轉週期,在太陽係的研究中發揮越來越重要的作用。有超過60 萬顆小行星被發現,但很少知道他們的物理參數,如旋轉週期。然而,關於小行星的主要研究數據是由地面觀測站收集的光曲線,直到現在。自1906 年以來,當羅素首先嘗試從在對立面上觀察到的光曲線中道出反射率圖時,已經有許多研究集中於從光曲線道出小行星的物理參數。圖2. 3 顯示的就是我們所獲得的2011UW158 號近地小行星四天的光變數據。第一欄表示的是時間(單位爲儒略日),第二欄表示的是星等,第三欄表示的星等誤差。

因爲從地面望遠鏡觀察到的小行星的亮度經常受到望遠鏡的大氣和精度的影響,并且很難收集足夠的光曲線爲這麼多的小行星。并且我們使用的盱眙觀測站的近地望遠鏡非常智慧,當有類似雲或飛機等遮擋物遮擋望遠鏡的觀測對象時候,望遠鏡會自動停止拍攝,但是這樣的智能會令到我們的數據獲得並非按照時間軸等差拍攝,因此我們首先需要對所獲得的數據進行處理選擇,選擇時間坐標等差的部分進行計算。




右圖即是我們利用 *Mat-lab* 選擇合適的數據範圍

### 3. 1. 選擇數學模型

#### 3. 1. 1 傅裏葉級數法與曲線擬合 Fourier series method and Curve fitting

在數學中,傅裏葉級數是一種將函數表示爲簡單正弦波之和的方法。更正式地,它將任何週期函數或週期信號分解爲一組簡單振盪函數(即正弦和餘弦)的和。

如果 $f(x)$ 是具有週期 $P$ 的週期函數。那麼,我們可以以這種形式寫入函數:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n cos\frac{2\pi nx}{p} + b_n sin\frac{2\pi nx}{p}\right),$$

當然我們可以將上式用以下的形式表達:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot e^{i\frac{2\pi nx}{p}}$$

在這裏:

$$a_n = \frac{2}{p}\int_{x_0}^{x_0+p} f(x) \cdot cos\left(\frac{2\pi nx}{p}\right)dx$$

$$b_n = \frac{2}{p}\int_{x_0}^{x_0+p} f(x) \cdot sin\left(\frac{2\pi nx}{p}\right)dx$$

$$b_n = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \ for \ n > 0 \\ a_0, \ for \ n = 0 \end{cases}$$

隨著$n$的值增加,該函數被更準確地表示。然而,我們不能得到$n$的值到無窮大。所以在本文中,我們設置 $n$ 的最大值爲 20,這是效率和精度之間的適當平衡。

曲線擬合是構建曲線或數學函數的過程,該曲線或數學函數具有與可能受制約的一系列數據點的最佳擬合。當然曲線擬合問題分爲兩類:線性曲線擬合和非線性曲線擬合,這取決於數據在所有未知數中是否是線性的。在這裏,我們使用線性曲線擬合來擬合我們的光變曲線。

以下是我們使用 Mat - lab 軟件編程擬合曲線的部分代碼解說:

- 函數 ReadLC_T1 將觀測資料讀取並儲存一陣列中

```
function [T,rmse] = ReadLC_T1(RFileName,N,DateNum,WS,WE,BU)
                                                  fidr = fopen(RFileName,'r')

    % Read out the Object name and number and display them
    AsteroidNumber = fgetl(fidr)
    AsteroidNumber = AsteroidNumber(end - 5:end)
    AsteroidName = fgetl(fidr)
    AsteroidName = AsteroidName(12:end)

    % Read out the Julian Day, brightness and observation error
    LC = [ ]
    LC1 = [ ]
    while 1

      LineData = fgetl(fidr)
      ……
      …
End
```

- 函數 julian2greg 將儒略日轉換爲西歷

```
ffunction [year,month,day,hour,minu,sec,dayweek,dategreg] = julian2greg(JD)
    error(nargchk(1,1,nargin))

    I = floor(JD + 0.5)
    Fr = abs(I - (JD + 0.5))
    ……
    ……
    dayweek = {'Sunday''Monday''Tuesday''Wednesday''Thursday''Friday''Saturday'}
    dayweek = dayweek{nd + 1}
    format('long','g')
    dategreg = [year month day hour minu sec]
end
```

- 函數 Fourier_series_N 透過多次的 LS_Fourier 運算結果找出最佳週期轉速

```
function [T,omega,sse] = Fourier_series_N(w_s,w_e,bu,datax,datay,n)
w = w_s:bu:w_e
P_A = []
X_2 = zeros(1,length(w))

for m = 1:length(w)
[p,x_2] = LS_Fourier(w(m),datax,datay,n)

P_A = [P_A;p']
X_2(m) = x_2
end

[sse,u] = min(X_2)

……
……

for m = 1:length(l)
x = l(m)
P = [1,cos(omega*x),sin(omega*x),cos(2*omega*x),sin(2*omega*x),
     cos(3*omega*x),sin(3*omega*x),...]
for z = 1:2*n+1
sum = sum + P_A(u,z)*P(z)
end

L(m) = sum
sum = 0
end

plot(datax,datay,'b*','MarkerSize',12)
……
……
end
```

### 3.1.2 **最小二乘法與線性曲線擬合** Least squares and linear curve fitting

最小二乘法是求回歸分析確定系統的近似解的標準方法。最小二乘意味著整體的解決方案,最大限度地減少每個方程的結果中的錯誤的平方的總和。最重要的應用是在資料擬合。在最小二乘意義上的最佳擬合最小化殘差平方和,殘差是觀察到的值和模型提供的擬合值之間的差異。

目標包括調整模型參數尋找最適合的資料集。一個簡單的資料集由 $n$ 個點陣$(x_i, y_i)$, $i = 1, \cdots, m$, $x_i$ 爲自變量, $y_i$ 爲因變量。這個模型的方程爲 $f(x,\beta)$,其中 $m$ 可調參數被保存在向量 $\beta$。我們的目標是通過最小二乘法找出最小的 $\chi^2$,令到我們找到最好的點,即當殘差 $\chi^2 = \sum_1^m r_i^2$

爲最小值的時候。殘差$\chi^2$ 定義爲該模型預測值與實際值之間的差異。$r_i = y_i - f(x_i, \beta)$

以下爲使用 Mat－lab 編程最小二乘法選取最優解的部分代碼，

● 函數 LS_Fourier 利用傅立葉級數計算出所求的係數（a0，a1… an，b1… bn）和與所對應之的最小二乘法結果並回傳。

```
function[A,X2] = LS_Fourier(w,datax,datay,n)
    sum = 0
    sum_y = 0
    sum_1 = zeros(2*n+1,2*n+1)
    sum_y_1 = zeros(2*n+1,1)
    A = zeros(2*n+1,1)

    for i=1:2*n+1
      for j=1:2*n+1
        for k=1:length(datax)
        x = datax(k)
          P =[1,cos(w*x),sin(w*x),cos(2*w*x),sin(2*w*x),cos(3*w*x),...]
          sum = sum+P(i)*P(j)
          if j == 2*n+1
            sum_y = sum_y+P(i)*datay(k)
            end
          end
          sum_1(i,j) = sum
          sum = 0
        end
        sum_y_1(i,1) = sum_y
        sum_y = 0
      end

      A = sum_1\sum_y_1

      k = 1
      i = 1
      sum = 0
      sum_y = 0

      for k=1:length(datax)
        x = datax(k)
        P=[1,cos(w*x),sin(w*x),cos(2*w*x),sin(2*w*x),cos(3*w*x),
           sin(3*w*x),...]

          for i=1:2*n+1
            sum = sum+A(i)*P(i)
          end

          sum_y = sum_y+(datay(k)-sum)^2
          sum = 0
```

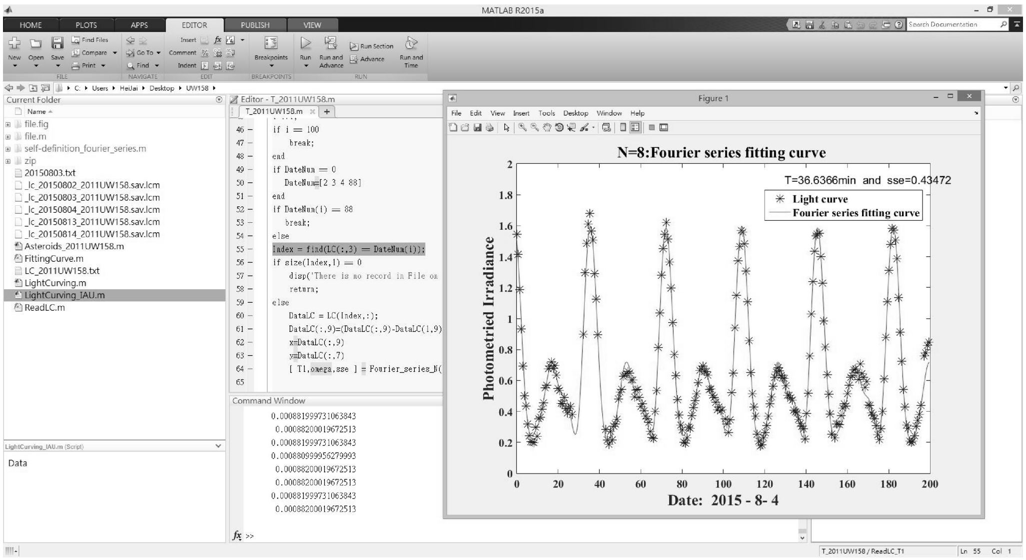
```
            end

        X2  =  sum_y
        clear sum sum_y sum_1 sum_y_1 P i j k
end
```

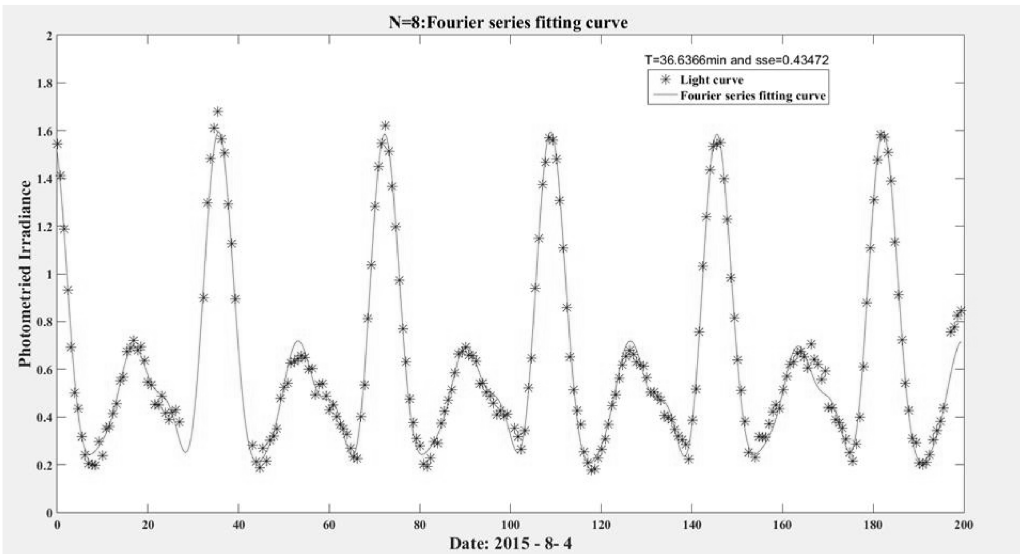
## 4. 數學建模的計算結果

我們不同的小組使用不同的演算法,不同的軟體分別進行計算。之後比較幾組同學的答案來相互驗證。

我們知道傅裏葉級數在週期函數中有廣泛應用,因此使用 Matlab 與 Period 兩個軟體進行計算,以下是兩個軟體分別計算的結果。

### 4.1. 使用 Matlab 傅裏葉級數的計算結果

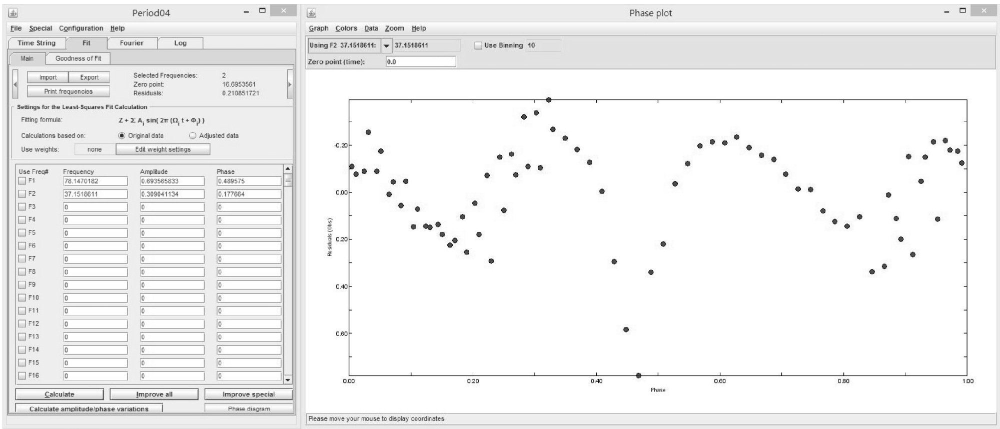


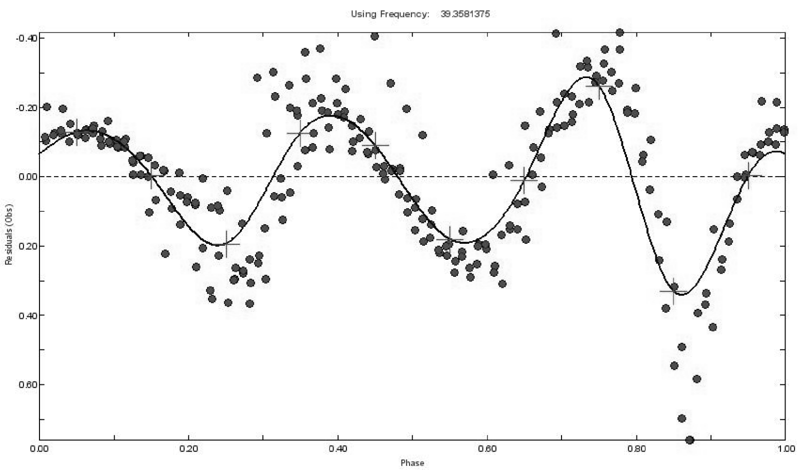



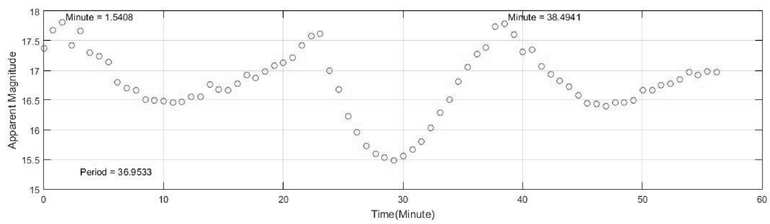
我們經過 8 次的傅裏葉級數的變換可以在上圖中明顯看到 2011UW158 小行星自轉週期約爲 36.63 分鐘。

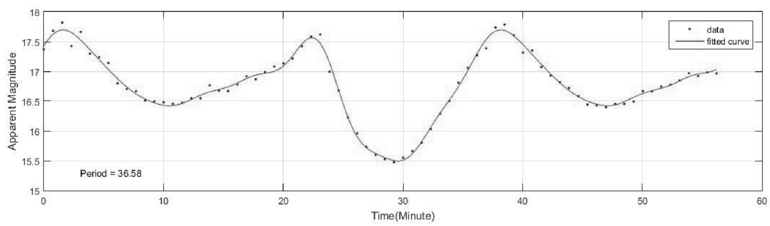
### 4.2. 使用 Period 傅裏葉級數的計算結果

經過幾次計算之後我們得到下圖,選取其中部分週期放大之後可以發現結果約爲 39.35 分鐘。



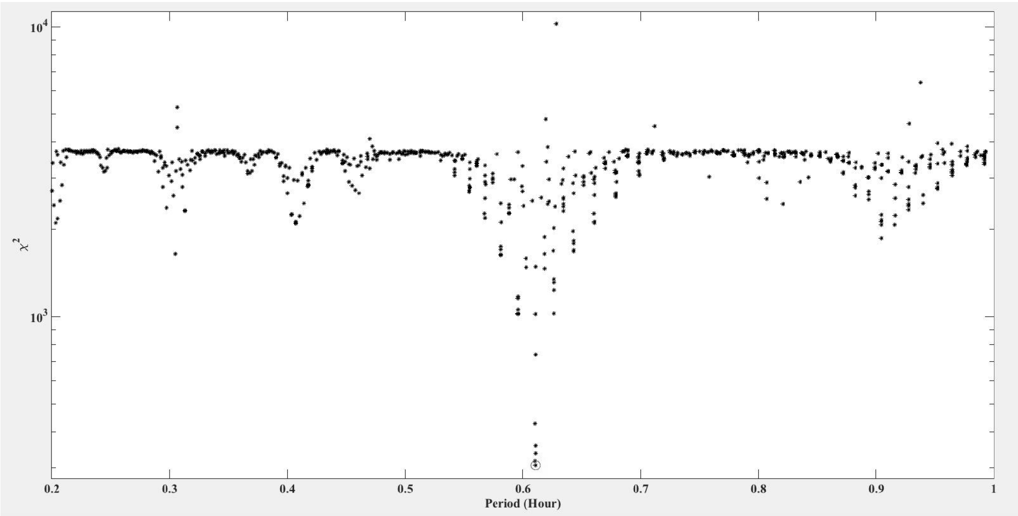



### 4.3. 使用 Matlab 最小二乘法的計算結果

$$X^2_{min} = \sum_{1}^{m} \left( \frac{f_n - f_n'}{e_n} \right)^2$$

如上公式,若 $f_n$ 與 $f_n'$ 相差越小,誤差 $e_n$ 越小,那麼就越符合我們的精確值,因此如下圖所示,我們清楚的可以看到最低點爲 0.62$h$ 約爲 37.15 分鐘。




## 5. 結語

我們希望能借著這次對 2011UW158 近地小行星的研究能了解到科學研究的整個過程及了解如何行用一些程式來計算出小行星自轉速度,並從科學研究中學到何謂自主學習,科學研究專案是一個需要參與者發現或提出問題,再與別人一起提出解決問題的設想,利用各種方法解決問題,養成質疑、批判、反思、民主、嚴謹、認眞、求實、負責等等的科學態度和科學研究精神,並利用所學知識找出問題的答案。而在過程可能會出現相關知識並不是我們學習的內容或是一些在大學中才會學到的知識,而我們就要自己從網上或相關的書籍中尋找一些的內容或是一些計算方,就像這次研究會利用到的計算方法,我們在中學中還未學到,因此我們便要從老師和教授那裏得知一些相關的補充知識和計算的方法,而這就是我們希望在本次科學研究中能學到自主學習,而我們亦能從中學習到一些我們昇上大學後要學習到的一些計算方法。而我們這次主是希望能計算出它的自轉速度,其中我們亦進行了很多不同的假設,再利用老師和教授們的補充知識來解決這些假設,從而得出最後亦是我們想得到的,問題的答案。


**參考文獻:**

[1] Peter Schulte, et al. (5 March, 2010). The Chicxulub Asteroid Impact and Mass Extinction at the Cretaceous – Paleogene Boundary, Science, 327(5970): 1214 – 1218

[2] Russell, H. ,1906. Onthelight – variationsofasteroidsandsatellites. Astron. J. 24(5),1 – 18.

[3] Lu,X. ,Zhao,H. ,You,Z. ,2013. A faste llipsoid model for asteroids inverted from light curves. Res. Astron. Astrophys. 13(4),465 – 472.

[4] Lu,X. ,Zhao,H. ,You,Z. ,2014. Cellinoid shape model for asteroids, Earth, Moon Planets112(1 – 4), 73 – 87.

[5] The Signal and the Noise: Why So Many Predictions Fail – but Some Dont. By Nate Silver

[6] Data Preparation for Data Mining: Text. By Dorian Pyle.

[7] Xiao – Ping Lu , Wing – Huen Ip,2015,Cellinoid shape model for multiple light curves, Planetary and Space Science 108(2015)

[8] 高等數學,同濟大學數學教研室,高等教育出版社第四版,78 – 84,310 – 316

[9] MATLAB 數值計算,Cleve B. Moler, 喻文健譯,機械工業出版社 2006 出版,121 – 135,210 – 216

[10] 教育部基礎教育司 基礎教育課程改革綱要

[11] 教育部基礎教育司 普通高中研究性學習實施指南

[12] 郭蓮花(2004)。探究學習及其基本要素的研究《學科教育》

[13] 徐學福(2002)。探究學習的內涵辨析。《教育科學》,18 卷第 3 期,33 – 36

[14] 趙軍、王麗(2014)。促進科研項目科普化的對策及相關思考,《科普研究》,第 9 卷第 51 期,23 – 28。

# $A. P.$ 和 $G. P.$ 相關問題
# 一題多解的四個典型案例

澳門數學教育研究學會　鄭志民

從等差數列($A. P.$)的定義,可以推出等差數列($A. P.$)的通項 $a_n$ 的公式及其變形與前 $n$ 項和 $S_n$ 的兩大公式:

$$a_n = a_1 + (n-1)d, a_1 = a_n - (n-1)d, d = \frac{a_n - a_1}{n-1}, n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1;$$

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}, S_n = na_1 + \frac{n(n-1)d}{2}.$$

(其中 $a_1$ 爲首項,$d$ 爲公差,$n$ 爲項數,$a_n$ 爲通項,$S_n$ 爲前 $n$ 項之和.)

讓 $a_n$ 作爲“首項”,$a_m$ 作爲“末項”,把通項公式“推陳出新”,便可以得到相應的拓廣形式及其變形:

$$\boxed{a_m = a_n + (m-n)d.} \text{(兩項關係)}$$

$$a_n = a_m - (m-n)d, d = \frac{a_m - a_n}{m-n}, m = \frac{a_m - a_n}{d} + n.$$

(由 $a_m = a_1 + (m-1)d$ 和 $a_n = a_1 + (n-1)d$ 聯立可得上述變形公式.)

上述的公式更可以在數軸上加以幾何解釋:

對於 $a_n = a_1 + (n-1)d$,設 $d > 0$,則分別有圖 1 和圖 2:

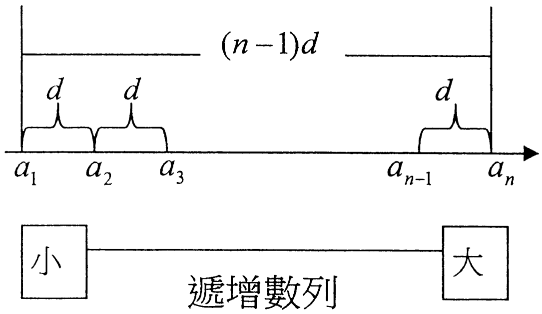



圖 1

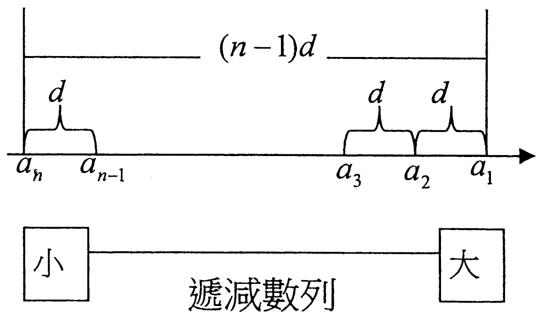



圖 2

對於 $a_m = a_n + (m-n)d$,設 $d > 0, m > n$,則分別有圖 3 和圖 4:

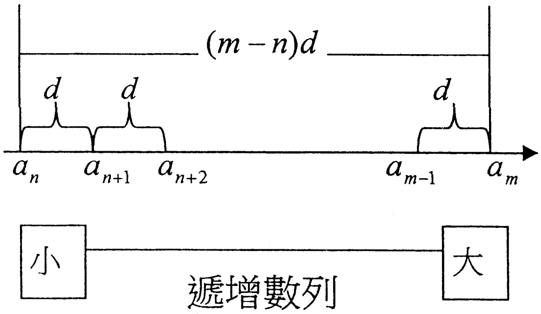



圖 3

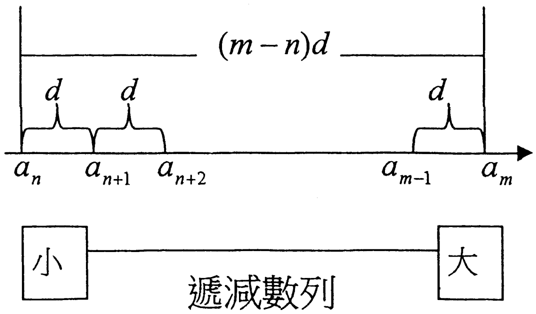



圖 4

此外,由等差數列($A.P.$)的定義更可以推出許多重要的性質:

(1) 若 $\{a_n\}$ 爲 $A.P.$,$b$ 爲常數,$d$ 爲公差,則 $\{a_n + b\}$ 也爲 $A.P.$,$b$ 爲常數,且公差爲 $d$.

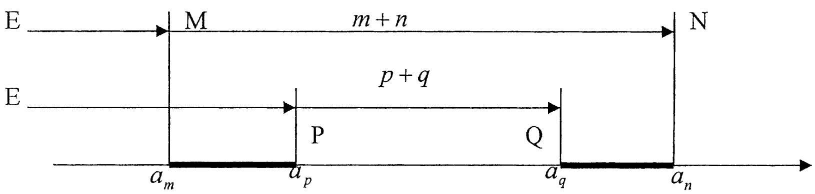
(2) 若 $\{a_n\}$ 爲 $A.P.$,常數 $k \neq 0$,$d$ 爲公差,則 $\{ka_n\}$ 也爲 $A.P.$,常數 $k \neq 0$,且公差爲 $kd$.

(3) 若 $\{a_n\}$,$\{b_n\}$ 均爲 $A.P.$,公差分別爲 $d_1, d_2$,常數 $k_1 \neq 0, k_2 \neq 0$,則 $\{k_1a_n + k_2b_n\}$ 也爲 $A.P.$,且公差爲 $k_1d_1 + k_2d_2$.

(4) 若 $\{a_n\}$ 爲 $A.P.$,且項數 $p, q, r$ 爲 $A.P.$,則 $a_p, a_q, a_r$ 也成 $A.P.$,反之也對(三項關係).

(5) 若 $\{a_n\}$ 爲 $A.P.$,$m, n, p, q, r$ 爲正整數,且有 $m + n = p + q$,且 $a_m + a_n = a_p + a_q$,反之也對(四項關係).

性質(5)也可作如下的幾何解釋:




($EM + EN = EP + EQ$,即 $m + n = p + q$.)

(6) 若 $a$、$A$、$b$ 成 $A.P.$,則 $A$ 叫做 $a, b$ 的等差中項,且 $A = \dfrac{a+b}{2}$($a = 2A - b, b = 2A - a$),反之也對(三項關係).

類似地,從等比數列($G.P.$)的定義,也可以推出等比數列 $G.P.$ 的通項公式及其變形與前 $n$ 項和 $S_n$ 的公式:

$$a_n = a_1q^{n-1}, a_1 = \frac{a_n}{q^{n-1}}, q = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}, n = \frac{lga_n - lga_1}{lgq} + 1;$$

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, S_n = \frac{a_1 - a_nq}{1-q}.$$

(其中 $a_1$ 爲首項,$q$ 爲公比,$n$ 爲項數,$S_n$ 爲前 $n$ 項的和.)

讓 $a_n$ 作爲“首項”,$a_m$ 作爲“末項”,把通項公式“推陳出新”,便可以得到相應的拓廣形式及其變形:

$$\boxed{a_m = a_n + q^{m-n}.} \text{(兩項關係)}(m > n)$$

$$a_n = a_m q^{m-n}, q = \sqrt[m-n]{\frac{a_m}{a_n}}, m = \frac{lga_m - lga_n}{lgq} + n.$$

上述的公式也可以(如 $A.P.$)類似地在數軸上加以幾何解釋(本文從略),有興趣者可分 ①$a_1 > 0, q > 1$;②$a_1 > 0, 0 < q < 1$;③$a_1 > 0, q < 0$;④$a_1 > 0, q = 1$ 分別得遞增數列,遞減數列,擺動數列,常數列的幾何解釋.

同樣地,由等比數列($G.P.$)的定義也可以推出許多重要性質:

(1) 若$\{a_n\}$ 爲 $G.P.$,$q$ 爲公比,常數 $k \neq 0$,則$\{ka_n\}$ 爲 $G.P.$,常數 $k \neq 0$,且公比爲 $kq$.

(2) 若$\{a_n\}$,$\{b_n\}$ 均爲 $G.P.$,公比分別爲 $q_1, q_2$,則$\{a_n \cdot b_n\}$ 也爲 $G.P.$,且公比爲 $q_1 \cdot q_2$.

(3) 若$\{a_n\}$ 爲 $G.P.$,且項數 $p, q, r$ 成 $G.P$,則 $a_p, a_q, a_r$ 也成 $G.P.$,反之也對(三項關係).

(4) 若$\{a_n\}$ 爲 $G.P.$,$m, n, p, q$ 爲正整數,且 $m + n = p + q$,則 $a_m \cdot a_n = a_p \cdot a_q$,反之也對(四項關係).

(5) 若 $a, G, b$ 成 $G.P.$,則 $G$ 叫做 $ab$ 的等比中項,且 $G = \sqrt{ab}$,反之也對(三項關係).

善於利用 $A.P.$ 和 $G.P.$ 的定義、通項公式(及其變形和拓廣形式),前 $n$ 項和公式,特別是相關的性質,都可以簡捷地解 $A.P.$ 和 $G.P.$ 的相關問題,甚至可以做到一題多解.

下面四個例題的一題多解,便是典型的案例.

〔**例 1**〕已知$\{a_n\}$ 爲 $A.P.$,$a_3 = 9, a_9 = 12$,求 $a_{15}, a_{21}, a_{22}$.

〔**解法一**〕$\because \{a_n\}$ 爲 $A.P.$,$a_3 = 9, a_9 = 12$,

$$\therefore \begin{cases} a_1 + 2d = 9, \\ a_1 + 8d = 12. \end{cases} \quad \therefore a_1 = 8, d = \frac{1}{2}.$$

故 $a_{15} = a_1 + (15-1)d = 8 + 14 \times \frac{1}{2} = 15$,

$a_{21} = a_1 + (21-1)d = 8 + 20 \times \frac{1}{2} = 18$,

$a_{22} = a_1 + (22-1)d = 8 + 21 \times \frac{1}{2} = 18\frac{1}{2}$.

(此解法爲“通法”—— 列方程組求解法,屬**基本的解法**,也是最常用的解法.)

〔**解法二**〕$\because \{a_n\}$ 爲 $A.P.$,且 $a_3 = 9, a_9 = 12$,又 $a_m = a_n + (m-n)d$,

$$\therefore d = \frac{a_m - a_n}{m-n} = \frac{a_9 - a_3}{9-3} = \frac{12-9}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2},$$

$\therefore a_{15} = a_3 + (15-3)d = 9 + 12 \times \frac{1}{2} = 15$,

$$a_{21}=a_3+(21-3)d=9+18\times\frac{1}{2}=18,$$

$$a_{22}=a_3+(22-3)d=9+19\times\frac{1}{2}=18\frac{1}{2}.$$

（此解法運用了等差數列通項公式的拓廣形式 $a_m=a_n+(m-n)d$ 及變形公式 $d=\frac{a_m-a_n}{m-n}$,屬**“巧解法”**.）

〔**解法三**〕$\because\{a_n\}$ 爲 $A.P.$,且 $a_3=9$,$a_9=12$,又 3,9,15 成 $A.P.$,$\therefore a_3,a_9,a_{15}$ 成 $A.P.$,

$\therefore a_{15}=2a_9-a_3=2\times12-9=15$;

同理 9,15,21 成 $A.P.$,

$\therefore a_9,a_{15},a_{21}$ 也成 $A.P.$,

$\therefore a_{21}=2a_{15}-a_9=2\times15-12=18$;

由 $a_m=a_n+(m-n)d$,知

$$d=\frac{a_m-a_n}{m-n}=\frac{12-9}{9-3}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2},$$

$$\therefore a_{22}=a_3+(22-3)d=9+18\times\frac{1}{2}=18\frac{1}{2}.$$

（此解法運用了等差數列中等差中項的變形公式——$a_m,a_n,a_p$ 成 $A.P.$,則 $a_p=2a_n-a_m$ 及等差數列中通項公式的拓廣形式 $a_m=a_n+(m-n)d$ 之變形公式 $d=\frac{a_m-a_n}{m-n}$,屬**“妙解法”**,但屬**“特法”**,若 3,9,15;9,15,21 不成 $A.P.$,則此法不通.）

〔**解法四**〕$\because\{a_n\}$ 爲 $A.P.$,且 $a_3=9$,$a_9=12$,

$$\therefore\frac{a_{15}-a_9}{15-9}=d=\frac{a_9-a_3}{9-3},$$

$$\therefore\frac{a_{15}-12}{6}=\frac{12-9}{6},$$

$$\therefore a_{15}=3+12=15;$$

同理 $\frac{a_{21}-a_9}{21-9}=d=\frac{a_9-a_3}{9-3}$,

$$\therefore\frac{a_{21}-12}{12}=\frac{12-9}{6},$$

$$a_{21}=2\times3+12=18;$$

同理 $\frac{a_{22}-a_9}{22-9}=d=\frac{a_9-a_3}{9-3}$,

$$\therefore\frac{a_{22}-12}{13}=\frac{12-9}{6},$$

$$\therefore a_{22}=\frac{1}{2}\times13+12=18\frac{1}{2}.$$

（此解法運用了等差數列的通項公式 $a_m=a_n+(m-n)d$ 之變形公式 $\frac{a_m-a_n}{m-n}=d=\frac{a_p-a_q}{P-q}$，設 $d$ 而不求 $d$，“聲東擊西”去解題，屬**“巧妙解法”**，且此解法具普遍性.）

〔**例 2**〕在 $\triangle ABC$ 中，$A$，$B$，$C$ 的對邊分別是 $a$，$b$，$c$，已知 $a^2$，$b^2$，$c^2$ 成 A. P.，

求證：$\frac{cosA}{a}$，$\frac{cosB}{b}$，$\frac{cosC}{c}$ 成 A. P..

〔**证法一**〕在 $\triangle ABC$ 中，$a^2$，$b^2$，$c^2$ 成 A. P.，

$\therefore -2a^2,-2b^2,-2c^2$ 也成 A. P.，

$\therefore a^2+b^2+c^2-2a^2,a^2+b^2+c^2-2b^2,a^2+b^2+c^2-2c^2$ 也成 A. P.，

即 $b^2+c^2-a^2,a^2+c^2-b^2,a^2+b^2-c^2$ 也成 A. P..

又 $abc\neq 0$，

$\therefore \frac{b^2+c^2-a^2}{2abc},\frac{a^2+c^2-b^2}{2abc},\frac{a^2+b^2-c^2}{2abc}$ 也成 A. P.，

即 $\frac{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{a},\frac{\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}}{b},\frac{\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}{c}$ 也成 A. P.，

$\therefore \frac{cosA}{a},\frac{cosB}{b},\frac{cosC}{c}$ 成 A. P..

（此證法屬**綜合法**，利用等差數列的性質結合餘弦定理證題.）

〔**证法二**〕在 $\triangle ABC$ 中，$a^2$，$b^2$，$c^2$ 成 A. P.，

$\therefore a^2+c^2=2b^2$，

又 $cosA=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},cosB=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac},cosC=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，

$$\therefore \frac{cosA}{a}+\frac{cosC}{c}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2abc}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2abc}=\frac{2b^2}{2abc}=\frac{2(2b^2-b^2)}{2abc}$$

$$=\frac{2(a^2+c^2-b^2)}{2abc}=2\times\frac{\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}}{b}=2\times\frac{cosB}{b},$$

故 $\frac{cosA}{a},\frac{cosB}{b},\frac{cosC}{c}$ 成 A. P..

（此證法也屬**綜合法**，利用等差中項的充要條件——“$a^2$，$b^2$，$c^2$ 成 A. P. $\Leftrightarrow 2b^2=a^2+c^2$”，代數式的恆等變形結合餘弦定理證題.）

〔**证法三**〕在 $\triangle ABC$ 中，$a^2$，$b^2$，$c^2$ 成 A. P.，$\therefore a^2+c^2=2b^2$，

又 $a^2=b^2+c^2-2bccosA,b^2=a^2+c^2-2accosB,c^2=a^2+b^2-2abcosC$，

$\therefore b^2+c^2-2bccosA,a^2+c^2-2accosB,a^2+b^2-2abcosC$ 也成 A. P.，

$\therefore (b^2+c^2-2bccosA)+(a^2+b^2-2abcosC)=2(a^2+c^2-2accosB)$，

則 $bccosA+abcosC=2accosB$，

從而 $bc\cos A, ac\cos B, ab\cos C$ 成 $A.P.$，

又 $abc \neq 0$，

故$\frac{\cos A}{a},\frac{\cos B}{b},\frac{\cos C}{c}$ 成 $A.P.$.

（此證法屬**綜合法**，利用等差中項的充要條件，代數式的恆等變形結合餘弦定理證題.）

〔**证法四**〕在 $\triangle ABC$ 中，$a^2,b^2,c^2$ 成 $A.P.$，

$\therefore a^2+c^2=2b^2$，

又$\frac{(b^2+c^2-a^2)+(a^2+b^2-c^2)}{2}=b^2=2b^2-b^2=a^2+c^2-b^2$，

$\therefore b^2+c^2-a^2, a^2+c^2-b^2, a^2+b^2-c^2$ 成 $A.P.$，

又 $abc \neq 0$，

$\therefore \frac{b^2+c^2-a^2}{2abc},\frac{a^2+c^2-b^2}{2abc},\frac{a^2+b^2-c^2}{2abc}$ 也成 $A.P.$，

即$\frac{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{a},\frac{\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}}{b},\frac{\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}{c}$ 也成 $A.P.$，

$\therefore \frac{\cos A}{a},\frac{\cos B}{b},\frac{\cos C}{c}$ 成 $A.P.$.

（此證法屬**綜合法**，利用等差中項的充要條件，等差數列的性質，代數式的恆等變形結合餘弦定理證題.）

〔**证法五**〕在 $\triangle ABC$ 中，要證明$\frac{\cos A}{a},\frac{\cos B}{b},\frac{\cos C}{c}$ 成 $A.P.$，只需證$\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos C}{c}=\frac{2\cos B}{b}$，

根據餘弦定理知，只需證

$\frac{b^2+c^2-a^2}{2abc}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2abc}=2\times\frac{a^2+c^2-b^2}{2abc}$，

又只需證$(b^2+c^2-a^2)+(a^2+b^2-c^2)=2(a^2+c^2-b^2)$，

即只需證 $a^2+c^2=2b^2$，

也即只需證 $a^2,b^2,c^2$ 成 $A.P.$，

而 $a^2,b^2,c^2$ 成 $A.P.$（已知），且以上各步，步步可逆，

$\therefore \frac{\cos A}{a},\frac{\cos B}{b},\frac{\cos C}{c}$ 成 $A.P.$.

（此證法屬**分析法**，利用等差中項的充要條件，代數式的恆等變形結合餘弦定理證題.）

〔**证法六**〕在 $\triangle ABC$ 中，要證明$\frac{\cos A}{a},\frac{\cos B}{b},\frac{\cos C}{c}$ 成 $A.P.$，

只需證$\frac{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{a},\frac{\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}}{b},\frac{\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}{c}$ 成 $A.P.$，

這只需證$\frac{b^2+c^2-a^2}{2abc},\frac{a^2+c^2-b^2}{2abc},\frac{a^2+b^2-c^2}{2abc}$ 成 $A.P.$，

這又只需證 $b^2+c^2-a^2, a^2+c^2-b^2, a^2+b^2-c^2$ 成 $A.P.$，

也即只需證$(b^2+c^2-a^2)-(a^2+b^2+c^2), (a^2+c^2-b^2)-(a^2+b^2+c^2)$,

$(a^2+b^2-c^2)-(a^2+b^2+c^2)$ 成 $A.P.$，

即 $-2a^2, -2b^2, -2c^2$ 成 $A.P.$，

也即只需證 $a^2, b^2, c^2$ 成 $A.P.$，

而 $a^2, b^2, c^2$ 成 $A.P.$（已知），且以上各步，步步可逆，

$\therefore \frac{cosA}{a}, \frac{cosB}{b}, \frac{cosC}{c}$ 成 $A.P.$.

（此證法屬**分析法**，利用等差數列的性質，代數式的恆等變形結合餘弦定理證題.）

〔**例 3**〕若$(z-x)^2-4(x-y)(y-z)=0$，求證 $x, y, z$ 成 $A.P.$.

〔**证法一**〕

$$\begin{aligned}\because 0 &= (z-x)^2-4(x-y)(y-z)\\ &= z^2-2zx+x^2-4xy-4yz+4y^2+4zx\\ &= z^2+2zx+x^2-4xy-4yz+4y^2\\ &= z^2+2(x-2y)z+(x-2y)^2\\ &= (2+x-2y)^2,\end{aligned}$$

$\therefore z+x-2y=0$，即 $z-y=y-x$.

根據等差數列的定義，知 $x, y, z$ 成 $A.P.$.

〔本題結論可以歸結爲證明 $x+z-2y=0$，而已知條件是關於 $x, y, z$ 的二次式，因此要先證明$(x+z-2y)^2=0$.〕

〔**证法二**〕$\because (z-x)^2-4(x-y)(y-z)=0$，

$\therefore [-(x-y)-(y-z)]^2-4(x-y)(y-z)=0$，

$(x-y)^2-2(x-y)(y-z)+(y-z)^2=0$，

$[(x-y)-(y-z)]^2=0$，

$(x-2y+z)^2=0$.

$\therefore z+x-2y=0$，也即 $z-y=y-x$.

根據等差數列的定義，$x, y, z$ 成 $A.P.$.

〔**证法三**〕由已知條件表明，對於以 $x-y, y-z$ 爲根的關於 $t$ 的二次方程爲

$$[t-(x-y)][t-(y-z)]=0,$$

$$t^2+(z-x)t+(x-y)(y-z)=0,$$

有 $\triangle=(z-x)^2-4(x-y)(y-z)=0$，從而兩根相等，

$\therefore x-y=y-z$，

根據等差數列的定義，$x, y, z$ 成 $A.P.$.

〔**证法四**〕當 $x-y=0$ 時，根據已知條件$(z-x)^2-4(x-y)(y-z)=0$，可知，

$x=y=z$，結論顯然成立.

當 $x-y\neq 0$ 時，作關於 $t$ 的二次方程

$(x-y)t^2+(z-x)t+(y-z)=0$,

有 $\triangle=(z-x)^2-4(x-y)(y-z)=0$,

從而兩根相等,$t_1=t_2$.

又由$(x-y)+(z-x)+(y-z)=0$知,方程一根爲1,因而另一根也爲1,

根據韋達定理知,$\frac{y-z}{x-y}=t_1\cdot t_2=1$,

即$x-y=y-z$,

按等差數列的定義,$x,y,z$成$A.P.$.

〔**证法五**〕$\because (z-x)^2-4(x-y)(y-z)=0$,

$\therefore (z-x)^2=4(x-y)(y-z)$,

由不等式$4ab\le(a+b)^2$,可得

$(z-x)^2=4(x-y)(y-z)\le[(x-y)+(y-z)]^2=(x-z)^2$.

等號當且僅當$x-y=y-z$時成立,

按等差數列的定義,$x,y,z$成$A.P.$.

〔注:$\because (a-b)^2\ge0$,$\therefore (a+b)^2-4ab\ge0$,$4ab\le(a+b)^2$,當且僅當$a=b$時,不等式取等號.〕

〔**证法六**〕可將已知式$(z-x)^2-4(x-y)(y-z)=0$視爲$y$的二次方程,得

$$4y^2-4(z+x)y+(x+z)^2=0,$$

解得$y=\frac{4(z+x)\pm\sqrt{16(z+x)^2-16(x+z)^2}}{4\times2}=\frac{z+x}{2}$.

$\therefore x-y=y-z$,

按等差數列的定義,$x,y,z$成$A.P.$.

〔**证法七**〕設$x=y+c$,$z=y+d$,代入已知式$(z-x)^2-4(x-y)(y-z)=0$,得

$$(d-c)^2+4cd=0,\text{即}(d+c)^2=0,$$

$\therefore c=-d$,即$x-y=y-z$.

按等差數列的定義,知$x,y,z$成$A.P.$.

〔**例 4**〕有四個數,前三數成$A.P.$,後三個數成$G.P.$,并且等一個數與第四個數之和爲16,第二個數與第三個數之和爲12,求這四個數.

〔**解法一**〕根據題意,可設四個數分別爲$x-d,x,x+d,y$,

| $x-d$ | $x$ | $x+d$ | $y$ |
|---|---|---|---|
| 第一數 | 第二數 | 第三數 | 第四數 |

則有$\begin{cases}x+(x+d)=12, & (1)\\(x-d)+y=16, & (2)\\(x+d)^2=xy, & (3)\end{cases}$

由(1),可得$d=12-2x$,分別代入(2),(3)得

$$\begin{cases}3x+y=28, & (4)\\(12-x)^2=xy, & (5)\end{cases}$$

由(4),可得 $y=28-3x$,代入(5) 得

$(12-x)^2=x(28-3x)$,

即 $x^2-13x+36=0,(x-4)(x-9)=0$,

$\therefore x_1=4,x_2=9$,

$y_1=16,y_2=1$,

$d_1=4,d_2=-6$.

$\therefore$ 所求的四個數分別爲 0,4,8,16 或 15,9,3,1.

(此解法設三個未知數 $x,y,d$,並藉助於框圖表達出第四個數,列三元一次方程組求解.)

〔**解法二**〕根據題意,可設四個數分別爲 $x,y,12-y,16-x$,

| $x$ | $y$ | $12-y$ | $16-x$ |
| --- | --- | --- | --- |
| 第一數 | 第二數 | 第三數 | 第四數 |

則有 $\begin{cases}2y=x+(12-y), & (1)\\(12-y)^2=y(16-x). & (2)\end{cases}$

由(1),可得 $x=3y-12$,代入(2),得

$(12-y)^2=y(28-3y)$,

即 $y^2-13y+36=0,(y-4)(y-9)=0$,

$\therefore x_1=0,x_2=15$,

$y_1=4,y_2=9$.

$\therefore$ 所求的四個數分別爲 0,4,8,16 或 15,9,3,1.

(此解法設兩個未知數 $x,y$,並藉助於框圖表達出其他兩個數,列二元二次方程組求解.)

〔**解法三**〕根據題意,可設四個數分別爲 $16-xq^2,x,xq,xq^2$,

| $16-xq^2$ | $x$ | $xq$ | $xq^2$ |
| --- | --- | --- | --- |
| 第一數 | 第二數 | 第三數 | 第四數 |

則有 $\begin{cases}x+xq=12, & (1)\\16-xq^2+xq=2x. & (2)\end{cases}$

由(1),可得 $x=\dfrac{12}{1+q}$,代入(2),得

$16-\dfrac{12}{1+q}\cdot q^2+\dfrac{12}{1+q}\cdot q=\dfrac{24}{1+q}$.

即 $3q^2-7q+2=0,(3q-1)(q-2)=0$,

$\therefore q=2$,或$q=\frac{1}{3}$,$x=4$,或$x=9$.

∴ 所求的四個數分別爲0,4,8,16或15,9,3,1.

(此解法設兩個未知數$x,q$,並藉助於框圖表達出其他兩個數,列二元二次方程組求解.)

〔**解法四**〕根據題意,可設四個數分別爲$3y-12,y,12-y,16-(3y-12)$,

| | | | |
|---|---|---|---|
| $3y-12$ | $y$ | $12-y$ | $16-(3y-12)$ |
| 第一數 | 第二數 | 第三數 | 第四數 |

則有$(12-y)^2=y(28-3y)$,

即$y^2-13y+36=0,(y-4)(y-9)=0$,

$\therefore y_1=4$,或$y_2=9$.

∴ 所求的四個數分別爲0,4,8,16或15,9,3,1.

(此解法設一個未知數$y$,並藉助於框圖表達出其他三個數,列一元二次方程組求解.)

〔**解法五**〕根據題意,可設四個數分別爲$a,b,c,d$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
| 第一數 | 第二數 | 第三數 | 第四數 |

則有$\begin{cases} a+d=16, & (1) \\ b+c=12, & (2) \\ 2b=a+c, & (3) \\ c^2=bd. & (4) \end{cases}$

由(1)+(2),得

$a+b+c+d=28$, (5)

把(3)代入(5),得

$d=28-3b$.

又由(1),又可得

$a=16-d=-12+3b$.

由(2),得$c=12-b$,代入(4),可得

$(12-b)^2=b(28-3b)$,

$\therefore b^2-13b+36=0,(b-4)(b-9)=0$,

$\therefore b_1=4$,或$b_2=9$;$c_1=8$,或$c_2=3$;

$a_1=0$,或$a_2=15$;$d_1=16$,或$d_2=1$.

∴ 所求的四個數分別爲0,4,8,16或15,9,3,1.

(此解法設四個未知數$a,b,c,d$分別表達四個數,列出四元一次方程組求解.)

〔**注**〕上述五種解法中,顯然(**解法五**)易設且易列方程組,但解方程組就較難、較繁;而

**(解法四)**雖然**“難設元”**,但**易列方程**,**易解方程**,應屬**最好的解法**. 上述解法中,都借用了框圖表達四個數,方便解題,有可取之處.

**參考資料:**

[1] 羅增儒,惠州人編著:《怎樣解答高考題數學題》,陝西師範大學出版社 1994 年版.

[2] 澳門濠江中學校本教材:(高一代數下冊).

〔注〕本文刊登於《澳門數學教育——澳門教育文選(第二輯)》$P256-P268$,中國社會科學出版社 2012 年版.

# 説説“一無是處”之“1 在高中數學中的運用”

澳門數學教育研究學會　鄧海棠

“一無是處”的英文翻譯是:without a single redeeming feature; devoid of any merit.

《漢語大詞典》對“一無是處”條列如下:

**【解釋】**:是:對,正確. 沒有一點兒對的或好的地方.

**【出自】**:明·張岱《與胡季望》:“是猶三家村子,使之治山珍海錯,烹飪燔炙,一無是處. 明眼觀之,只發一粲.”

**【近義詞】**:一團漆黑、一無可取、百無一是.

**【反義詞】**:十全十美、白璧無瑕、勿庸置疑.

**【語法】**:動賓式;作謂語、補語、賓語;含貶義.

“1”是人們再熟悉不過的一個數字了. 在正整數中是第一個數,卻是最小的一個數.

說“1”是“一無是處”,那是對“1”的曲解,就如《鐵齒銅牙紀曉嵐》(片頭曲)“誰說書生百無一用”!

日常生活中第一個數,卻是最好的最大的一個數字,說一不二,鏗鏘有力,不屈不撓,擲地有聲,更是一個不尋常的且很奇妙的一個數字. 在解題中靈活運用“1”的作用,對提高解題能力,培養良好的觀察習慣和思考問題的洞察力,大有裨益. 本文試從“希望杯”全國數學邀請賽高二年級的題目爲主來對“1”在高中數學中的運用加以闡述.

## 一、比較大小,“1”是目標

〔例 1〕已知的大小關係是 $0<a<b$, $x=\sqrt{a+b}-\sqrt{b}$, $y=\sqrt{b}-\sqrt{b-a}$. 則 $x,y$ 的大小關係是__________. (“希望杯”全國數學邀請賽第十一屆高二第一試第 11 題)

〔解〕$\dfrac{x}{y}=\dfrac{\sqrt{a+b}-\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{b-a}}=\dfrac{\sqrt{b}+\sqrt{b-a}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{b}}$,

$$\because a+b>b-a, \therefore \frac{x}{y}<1. \therefore x<y.$$

〔評析〕這是中學代數中的常見內容. 其最基本的方法是作差比較法或作商比較法或利用函數的單調性. 作商與 1 比較大小,順理成章,也很簡潔.

要注意的是：　　$a,b>0$ 時,$\dfrac{a}{b}>1 \Leftrightarrow a>b$;

$a,b<0$ 時,$\dfrac{a}{b}>1 \Leftrightarrow a<b$.

## 二、巧妙構設,“1”是橋樑

〔**例 2**〕設 $a>b>c,n\in N$,且$\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{1}{b-c}\geq\dfrac{n}{a-c}$恆成立,則 $n$ 的最大值爲(　　).

(“希望杯”全國數學邀請賽第十一屆高二第一試第 7 題)

*A.* 2　　*B.* 3　　*C.* 4　　*D.* 5

先看命題:若 $a_1>a_2>\cdots>a_n>0$,則$\dfrac{1}{a_1-a_2}+\dfrac{1}{a_2-a_3}+\cdots+\dfrac{1}{a_{n-1}-a_n}\geq\dfrac{(n-1)^2}{a_1-a_n}$.

〔**證明**〕$\because a_1>a_2>\cdots>a_n>0$,

$\therefore a_1-a_2,a_2-a_3,\cdots,a_{n-1}-a_n>0$.

故由柯西不等式,得

$$\left(\frac{1}{a_1-a_2}+\frac{1}{a_2-a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}-a_n}\right)[(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+\cdots+(a_{n-1}-a_n)]\geq$$

$$\underbrace{(1+1+\cdots+1)^2}_{(n-1)\text{個}1}=(n-1)^2.$$

即$\left(\dfrac{1}{a_1-a_2}+\dfrac{1}{a_2-a_3}+\cdots+\dfrac{1}{a_{n-1}-a_n}\right)(a_1-a_n)\geq(n-1)^2$.

$\because a_1-a_n>0$,

$\therefore \dfrac{1}{a_1-a_2}+\dfrac{1}{a_2-a_3}+\cdots+\dfrac{1}{a_{n-1}-a_n}\geq\dfrac{(n-1)^2}{a_1-a_n}$.

由此可得本賽題的如下解法:

$\because a>b>c$,

$\therefore a-b>0,b-c>0,a-c>0$.

$\therefore \dfrac{1}{a-b}+\dfrac{1}{b-c}\geq\dfrac{(1+1)^2}{a-b+b-c}=\dfrac{4}{a-c}$.

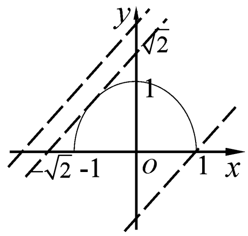
由題意,$n\leq 4$. 故選 *C*.

〔**評析**〕應用柯西不等式,往往將原式左端乘以 1 來構成不等式的條件式子,“1”起到了橋樑作用.

## 三、幾何之圓,“1”是半徑

〔**例 3**〕設不等式 $\sqrt{1-x^2}\geq x+t$ 的解集是 $\varnothing$,則實數 $t$ 的取值範圍(用區間形式)是________.(“希望杯”全國數學邀請賽第一屆高二第一試第 18 題)

〔**解**〕作出函數 $y = \sqrt{1-x^2}$ 的圖像(即圖中的半圓) 及函數 $y = x+t$ 的圖像(即圖中斜率爲 1 的直綫係). 由題意,直綫應在半圓的上方. 由圖像可知直綫 $y = x+t$ 在 $y$ 軸上的截距 $t > \sqrt{2}$. 故填($\sqrt{2}, +\infty$).




〔**評析**〕這是一道藴含著豐富數學思想方法的好題. 數形結合思想解決了問題,體現了這道題的豐富内涵. 揭示了本題的幾何背景.

## 四、條件證明,“1”是突破

〔**例 4**〕已知 $x$、$y$、$z > 0$,并且 $\frac{x^2}{1+x^2} + \frac{y^2}{1+y^2} + \frac{z^2}{1+z^2} = 2$. 求證:$\frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2} \leq \sqrt{2}$(“希望杯”全國數學邀請賽第一届高二備選題).

〔**解**〕由 $\frac{x^2}{1+x^2} + \frac{y^2}{1+y^2} + \frac{z^2}{1+z^2} = 2$,

得 $\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) + \left(1 - \frac{1}{1+y^2}\right) + \left(1 - \frac{1}{1+z^2}\right) = 2$.

即 $\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{1+z^2} = 1$.

應用柯西不等式,

$$\left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{1+z^2}\right)\left(\frac{x^2}{1+x^2} + \frac{y^2}{1+y^2} + \frac{z^2}{1+z^2}\right) \geq \left(\frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2}\right)^2.$$

於是 $1 \times 2 \geq \left(\frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2}\right)^2$

即 $\frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2} \leq \sqrt{2}$.

〔**評析**〕條件不等式證明的關鍵在於如何利用條件,而當條件難以直接利用或條件式顯得相當復雜時,通常應當將條件適當轉化,通過不同形式的换元、靈活(變形) 應用基本不等式、柯西不等式, 以及一些重要的結論, 也是證明不等式的常用方法.

## 五、解題聯想,“1”是範圍

〔**例 5**〕函數 $f(x) = \frac{x^2-2x+2}{2x-2}(x>1)$ 的最小値爲(　　)(“希望杯”全國數學邀請賽第七届高一培訓題第 2 題)

*A*. $-1$　　*B*. 1　　*C*. $-2$　　*D*. 2

〔**解法一**〕因爲 $x > 1$,聯想到 $|sec\theta \geq 1|$,於是令 $x = sec^2\theta, \theta \in (0, \frac{\pi}{2})$,則 $x-1 = tan^2\theta$.

$$f(x)=\frac{x^2-2x+2}{2(x-1)}=\frac{(x-1)^2+1}{2(x-1)}=\frac{tan^2\theta+1}{2tan\theta}=\frac{1}{2}\left(tin\theta+\frac{1}{tan\theta}\right)$$

$$\geq\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{tan\theta\cdot\frac{1}{tan\theta}}=1,$$

當且僅當 $tan^2\theta=\frac{1}{tan^2\theta}$,即 $x=2$ 時,$f(x)_{min}=1$. 故選 $B$.

〔**解法二**〕$f(x)=\frac{1}{2}\left[(x+1)+(\frac{1}{x-1})\right]$. 因爲兩個互爲倒數的數,在它們等於 $\pm1$ 時,其和可以取到絕對值的最小值. 即當 $x-1=\pm1$,即 $x=2$ 或 $x=0$ 時,$f(x)$ 的絕對值最小.

又 $x>1$,故 $x=2$ 時,$f(x)$ 的絕對值最小.

又 $f(x)>0$,

$\therefore f(x)_{min}=f(2)=1$. 選 $B$.

〔**解法三**〕設 $\varphi(x)=x^2-2x+2(x>1)$,$g(x)=2x-2(x>1)$.

$\because \varphi(x)-g(x)=x^2-2x+2-(2x-2)=x^2-4x+4=(x-2)^2\geq0$,

$\therefore \varphi(x)\geq g(x)>0$.

$\therefore \frac{\varphi(x)}{g(x)}\geq1$,即 $f(x)\geq1$,$\therefore f(x)_{min}=1$. 故選 $B$.

〔**解法四**〕$f(x)=\frac{x^2-2x+2}{2x-2}=\frac{(x-1)^2+1}{2(x-1)}(x>1)$.

由此聯想到萬能公式:$sin\alpha=\dfrac{2tan\frac{\alpha}{2}}{1+tan^2\frac{\alpha}{2}}$.

令 $x-1=tan\frac{\alpha}{2}>0$,則 $f(x)=g(\alpha)=\dfrac{1+tan^2\frac{\alpha}{2}}{2tan\frac{\alpha}{2}}=\frac{1}{sin\alpha}>0$.

$\therefore sin\alpha>0$,又 $-1\leq sin\alpha\leq1$,$0<sin\alpha\leq1$,$\frac{1}{sin\alpha}\geq1$,即 $f(x)\geq1$.

$\therefore f(x)_{min}=1$. 故選.

〔**解法五**〕$\because x>1$,$\therefore x-1>0$.

$$f(x)=\frac{(x-1)^2+1}{2(x-1)}=\frac{x-1}{2}+\frac{1}{2(x-1)}\geq2\sqrt{\frac{x-1}{2}\cdot\frac{1}{2(x-1)}}=1,$$

當且僅當 $\frac{x-1}{2}=\frac{1}{2(x-1)}$,即 $x=2$ 時取等號.

$\therefore f(x)_{min}=1$. 故選 $B$.

〔**解法六**〕$\because x>1$,

$\therefore f(x)=\frac{x^2-2x+2}{2x-2}=\frac{(x-2)^2+2x-2}{2x-2}=\frac{(x-2)^2}{2x-2}+1\geq1$,

當 $x=2$ 時取等號. 故選 $B$.

〔**解法七**〕由 $y=\dfrac{x^2-2x+2}{2x-2}$ 去分母並整理得 $x^2-(2+2y)x+2+2y=0$.

$\because x\in R, \therefore \triangle=(2+2y)^2-4(2+2y)\geq 0$,即 $y^2-1\geq 0$.

$\therefore y\leq -1$ 或 $y\geq 1$.

$\because x>1, \therefore y=f(x)=\dfrac{(x-1)^2+1}{2(x-1)}>0. \therefore y\geq 1$.

當 $y=1$ 時,由 $1=\dfrac{x^2-2x+2}{2x-2}$,解得 $x=2\in(1+\infty)$,

$\therefore f(x)_{min}=1$. 故選 $B$.

〔**評析**〕解法二、六、七都是運用高一知識解決問題的,其餘解法都用到了不等式知識,以解法五、六最爲簡捷.

〔**解法七**〕運用的是判別式法. 運用此法是有前提的,如果將題中限制條件“$x>1$”去掉,此法總能解決問題. 但有了“$x>1$”的限制,此法就不一定能奏效. 只有當 $y=1$ 時求出的 $x$ 的值在 $x>1$ 的範圍内時,1 才是最小值,否則 1 就不是最小值,應當另尋他法加以解決.

事實上,若將此題改爲“求函數 $f(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{2x-2}(x\geq 3)$ 的最小值”,此法就失靈了. 因爲 $y=1$ 時,$x=2\notin[3+\infty)$. 故 $y$ 取不到 1,也就談不上 $y_{min}=1$ 了.

當然,在如此情況下,其他解法也未必盡可奏效. 反而在解法七所得的結果中可以獲知 $y\geq 1$(可推斷 1 爲局部極小值)或 $y\leq -1$(可推斷 $-1$ 爲局部極大值),在這種情況下,幾乎可以斷定,在指定範圍 $x\geq 3$ 中,將邊界值 $x=3$ 代入,就可得到在指定範圍($x\geq 3$)内的絕對極小值 $\dfrac{5}{4}$,又當 $x=0$ 時,$y$ 有局部極大值 $-1$,如在指定範圍 $x\leq -2$ 内求極大值,就可判定以邊界值 $x=-2$ 代入即得. 而其他的解法於某些指定範圍内(例如 $x\leq -2$ 時)就並沒有給予我們資料可作這樣的判定.

故而知:**解題聯想,“1”是範圍.**

## 六、發散公式,“1”是技巧

〔**例 6**〕設 $x,y,a,b$ 爲正實數,$a,b$ 爲常數,且 $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}=1$,則 $x+y$ 的最小值爲________.(“希望杯”全國數學邀請賽第十一屆高二培訓題)

〔**解法一**〕設 $\begin{cases}\dfrac{a}{x}=cos^2\alpha,\\ \dfrac{b}{y}=sin^2\alpha.\end{cases}$

則 $x+y=asec^2\alpha+bcsc^2\alpha=a+b+atan^2\alpha+bcot^2\alpha$

$\geq a + b + 2\sqrt{ab}.$

當 $a\tan^2\alpha = b\cot^2\alpha$,即 $\tan^4\alpha = \dfrac{b}{a}$ 時取等號,

$\therefore (x+y)_{min} = a + b + 2\sqrt{ab}.$

〔**解法二**〕$x + y = (x+y)(\dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{y}) = a + b + \dfrac{ay}{x} + \dfrac{bx}{y} \geq$

$$a + b + 2\sqrt{\frac{ay}{x} \cdot \frac{bx}{y}} = a + b + 2\sqrt{ab},$$

當且僅當$\dfrac{ay}{x} = \dfrac{bx}{y}$時取等號. $\therefore (x+y)_{min} = a + b + 2\sqrt{ab}.$

〔**解法三**〕令$\overrightarrow{m} = (\sqrt{x},\sqrt{y})$,$\overrightarrow{n} = \left(\sqrt{\dfrac{a}{x}},\sqrt{\dfrac{b}{y}}\right)$,則$\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$,

$\because |\overrightarrow{m}|^2 \cdot |\overrightarrow{n}|^2 \geq |\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n}|^2$,

$\therefore (x+y)(\dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{y}) \geq (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$. 即 $x + y \geq a + b + 2\sqrt{ab}.$

當且僅當$\overrightarrow{m}$、$\overrightarrow{n}$共綫,即當$(\sqrt{x},\sqrt{y}) = \lambda\left(\sqrt{\dfrac{a}{x}},\sqrt{\dfrac{b}{y}}\right)$,亦即$\dfrac{x}{y} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$時取等號.

$\therefore (x+y)_{min} = a + b + 2\sqrt{ab}.$

〔**解法四**〕$x + y = (x+y)(\dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{y}) = a + b + \dfrac{ay}{x} + \dfrac{bx}{y} \geq \left(\sqrt{x}\cdot\sqrt{\dfrac{a}{x}} + \sqrt{y}\cdot\sqrt{\dfrac{b}{y}}\right)^2 = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{ab}$,

當且僅當$\dfrac{x}{\frac{a}{x}} = \dfrac{y}{\frac{b}{y}}$,即$\dfrac{x^2}{y^2} = \dfrac{a}{b}$時取等號.

$\therefore (x+y)_{min} = a + b + 2\sqrt{ab}.$

〔**解法五**〕設 $x + y = k$,即 $y = k - x$,代入$\dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{y} = 1$,得 $x^2 + (b - a - k)x + ka = 0.$

$\because x \in R^+$,由 $\triangle \geq 0$,得 $k \geq a + b + 2\sqrt{ab}$ 或 $k \leq a + b - 2\sqrt{ab}$(舍去).

由 $\triangle = 0$,求得 $x = \sqrt{a}(\sqrt{a} + \sqrt{b})$,$y = k - x = \sqrt{b}(\sqrt{a} + \sqrt{b})$,

$\therefore \dfrac{x}{y} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$ 時,$(x+y)_{min} = a + b + 2\sqrt{ab}.$

〔**解法六**〕$x,y,a,b \in R^+$ 且$\dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{y} = 1 \Rightarrow 0 < \dfrac{a}{x} < 1, 0 < \dfrac{b}{y} < 1 \Rightarrow x > a > 0, y > b > 0.$

設 $x = a + \mu, y + b + \nu(\mu,\nu > 0)$ 代入$\dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{y} = 1$,得 $\mu\nu = ab$(定値).

$\therefore x + y = a + b + \mu + \nu \geq a + b + 2\sqrt{\mu\nu} = a + b + 2\sqrt{ab}$,

當且僅當$\mu = \nu = \sqrt{ab}$,即$\frac{x}{y} = \frac{a + \sqrt{ab}}{b + \sqrt{ab}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$時取等號.

$\therefore (x + y)_{min} = a + b + 2\sqrt{ab}.$

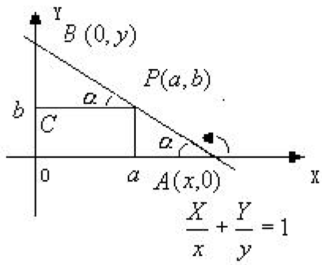
〔**解法七**〕由解法六知$x > a > 0, y > b > 0$. 記$k = x + y$, ①

由$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1$,得$y = \frac{bx}{x - a}$,代入①可得$k = (x - a) + \frac{ab}{x - a} + \frac{ab}{x - a} + (a + b) \geq a + b + 2\sqrt{ab}$,

當且僅當$\begin{cases} x - a = \frac{ab}{x - a} \\ x - a > 0 \end{cases}$,即$x = a + \sqrt{ab}$時取等號,此時$y = b + \sqrt{ab}$.

$\therefore$ 當$\frac{x}{y} = \sqrt{\frac{a}{b}}$時,$(x + y)_{min} = a + b + 2\sqrt{ab}.$

〔**解法八**〕如右圖,在平面直角坐標係$XOY$中,由已知條件$x, y, a, b \in R^{+}$及$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1$知直綫$\frac{X}{x} + \frac{Y}{y} = 1$過第一象限内的定點$P(a, b)$,$x + y$便是該直綫在兩坐標軸上的截距之和. 如圖所示,設$\angle BAO = \alpha$,則$\angle BPC = \alpha$,由圖可知$A(x, 0)$,$B(0, y)$,$x = OA = a + b\cot\alpha, y = OB = b + a\tan\alpha$.




$\therefore x + y = a + b + b\cot\alpha + a\tan\alpha \geq a + b + 2\sqrt{ab}$

當且僅當$b\cot\alpha = a\tan\alpha$,即$\tan\alpha = \sqrt{\frac{b}{a}}$時取等號.

$\therefore (x + y)_{min} = a + b + 2\sqrt{ab}.$

〔**解法九**〕如右上圖,在平面直角坐標係$XOY$中,設過定點$P(a, b)$的直綫方程爲$Y - b = k(X - a)$. 易求得直綫在$X$軸與$Y$軸上的截距分别爲$x = a - \frac{b}{k}, y = b - ak$.

$\therefore x + y = a + b + (-\frac{b}{k}) + (-ka)$. $\because k <$, $\therefore -\frac{b}{k} > 0, -ka > 0$.

故$x + y \geq a + b + 2\sqrt{(-\frac{b}{k})(-ka)} = a + b + 2\sqrt{ab}$,當且僅當$\begin{cases} -ka = \frac{b}{k}, \\ k < 0. \end{cases} \Rightarrow k^2 = \frac{b}{a}$時取等號.

$\therefore (x + y)_{min} = a + b + 2\sqrt{ab}.$

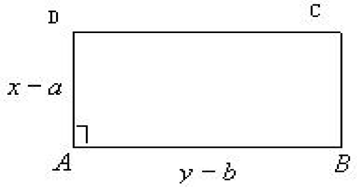
〔**解法十**〕由已知,得$bx + ay - xy = 0$,即$xy - bx - ay = 0$.

$\therefore xy - bx - ay + ab = ab$,即$(x - a)(y - b) = ab$.

又由$bx = xy - ay = y(x - a)$,$ay = xy - bx = x(y - b)$得$x - a > 0, y - b > 0$.

如右圖,設四邊形$ABCD$是長方形,令$AD = x - a, AB = y - b$,則$S_{ABCD} = ab$(定值).

由於面積爲定値的長方形中,正方形的周長最小.




於是可得 $x-a=y-b=\sqrt{ab}, x=a+\sqrt{ab}, y=b+\sqrt{ab}$.

$\therefore x+y\geq a+b+2\sqrt{ab}$.

當且僅當 $x=a+\sqrt{ab}, y+b+\sqrt{ab}$ 時, $(x+y)_{min}=a+b+2\sqrt{ab}$.

〔**評析**〕考慮到 $x,y,a,b\in R^{+}$ 且 $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1$,解法一運用三角代換,是常用方法. 兩個正數的積爲定值,則和有最小值,解法二將 $x+y$ 改寫成 $(x+y)\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}\right)$,使之可運用這一結論求最值,這是一種常用的技巧. 解法三構造向量求最值,使得新教材中向量這一工具得到應用,雖然解法並不很簡單,但其意義仍不應低估. 柯西不等式在數學競賽中佔有很重要的地位,解法四表明,運用柯西不等式解題十分方便. 解法七表明,運用均值不等式求最值,應注意**"一正,二定,三相等"**,重視配湊技巧的運用.

美國著名數學教育家玻利亞說過,**"對於一個非幾何問題,去找一個清晰的幾何表達式,可能是走向解答的重要一步"**. 解法八、九、十正是這樣做的. 充分挖掘代數問題的幾何背景,搆造適當幾何圖形,運用數形結合的思想,常常可以收到意想不到的解題效果,同時也可培養我們的發散思維和創造性思想的能力.

當然,運用這些公式需要適當的配湊技巧,可通過先換元以後再利用公式;可運用整體思想與方程思想解決最值問題;可通過換元,再將問題轉化爲求兩曲綫有交點的條件,雖有一定難度,但它體現了數學各分支內容之間的內在聯繫,當一個問題難以解決時,通過發散思維,將其轉化爲一個與之等價的較易解決的問題,這是一種常用的數學思想方法,也是高考的明確要求,體現了新教材中知識的創新應用.

## 七、輪換對稱,"1"是極致

〔**例7**〕設 $x,y$ 爲正數,且 $x+y=1$,證明 $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\geq 9$(加拿大第三屆數學競賽題).

〔**證明**〕$\because x+y=1, \therefore x^{2}+y^{2}=1-2xy$.

搆造二次函數 $f(t)=(t-x)^{2}+(t-y)^{2}$,

由推論"算術平均數不大於平方平均數即 $\frac{a+b}{2}\leq\sqrt{\frac{a^{2}+b^{2}}{2}}$",平方化簡得 $(x+y)^{2}\leq 2(x^{2}+y^{2})$.

$\therefore 1^{2}\leq 2(1-2xy)$,得 $xy\leq\frac{1}{4}$.

$$\therefore \left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)=\frac{xy+x+y+1}{xy}=1+\frac{2}{xy}\geq 1+8=9\text{,即}\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\geq 9.$$

〔**評析**〕關於此題中的值,還可以通過輪換對稱的性質求得.

如果一個代數式裏的字母按照某個次序輪換,所得的代數式與原式恆等,我們就把這個代數式叫做關於這些字母的輪換對稱式. 如 $a+b+c$,$abc$, $\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}+\sqrt{c+1}$,$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ 等都是關於 $a$、$b$、$c$ 的輪換對稱式.

如果已知條件式和待求式都是關於某些字母的輪換對稱式,則當且僅當這些字母相等時,待求式取得最值. 再取一些特殊值(要滿足條件式,但各字母取值不全相同)驗證,便可確定待求式是最大值還是最小值. 據此,本題中$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)$的最小值還可這樣求得:當且僅當$x=y=\frac{1}{2}=0.5$時,$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)$取得最小值$\left(1+\frac{1}{0.5}\right)\left(1+\frac{1}{0.5}\right)=3\times 3=9$.

高中數學中的"1",作爲一個簡單而又實用的數字,任何數乘以或除以 1 的值都不變的特點,能有助於我們快速解題. 一些常見常用的值爲"1" 的代數關係式如下:

$\boldsymbol{1=tanx\cdot cotx=sinx\cdot cscx=cosx\cdot secx.}$

$\boldsymbol{1=sin^2+cos^2x=sec^2x-tan^2x=csc^2x-cot^2x.}$

$\boldsymbol{1=tan(k\cdot 180^\circ+45^\circ)=cot(k\cdot 180^\circ+45^\circ)=i^{4k}(k\in Z)=log_a a=lg10=lne=x^0(x\neq 0).}$

**"1" 還有幾何方面的意義. 如單位圓, 單位向量, 單位矩陣, 單位復數,圓錐曲綫中的抛物綫的離心率等等,都含有"1" 的意義.**

**18 世紀是科學的鼎盛時期,當時的許多數學家在研究 $e$、$\pi$、$i$ 的關係時試圖給較重要的幾個數定位,但是説法各具千秋,$e^{i\pi}+1=0$ 這個式中所涉及的 5 個數正是"好事" 的數學家所要尋找的,按照人們認識數的歷史它們應該是 $1,0,\pi,i,e$. 這五個數及其關係直到今天都為數學界拍案叫絶,特别是歐拉公式 $e^{ix}=cosx+isinx$($e$ 是自然對數的底,$i$ 是虛數單位). 它將三角函數的定義域擴大到復數,建立了三角函數和指數函數的關係,它在復變函數論裏佔有非常重要的地位. 當 $x=\pi$時,就有 $e^{i\pi}=0$,它是數學裏最令人著迷的一個公式,奇巧而有趣的是,數學史詩中的"五朵金花"—— 中性數 0、基數 1、虛數單位 $i$、圓周率 $\pi$、自然對數的底數 $e$ 竟能組成一個重要的"最美的等式",不可謂不絶!它將數學裏最重要的幾個數字聯繫到了一起. 兩個超越數:自然對數的底 $e$,圓周率 $\pi$;兩個單位:虛數單位 $i$ 和自然數的單位1,以及被稱為人類偉大發現之一的0,並把她們的關係發展到了極致. 在這個偉大的結論裏,我們可以確定公式當真是缺"1" 不可!"1" 在數學領域的地位的重要性同此可見一斑!**

**就讀高中的同學們,請在學習高中數學的時候,專心鑽研,細心品味,從心體驗,在"意料之外" 與"令人震驚" 之中,一次又一次體驗數學"1" 之内在美和外延美.**

**參考文獻：**

《“希望杯”全國數學邀請賽高二數學培訓教程》,氣象出版社出版.

〔注〕本文原文刊登於《澳門教育叢書(文選)[第二輯](2012)》P244 - 255,此文中已原文作補充和修改.

# 思維引道的三層模式

澳門坊眾學校　黃　剛

培根說過:數學是思維的體操。數學教學中可以有嚴謹的證明過程,也應該有生動活潑的探索過程,從中可以培養學生多方面的能力,例如想像,類比,聯想,直覺,頓悟,分析,綜合等等. 只有這樣,才能使學生去觸摸數學的脈搏,了解數學的“眞相”,探索解題的途徑和解題的經驗,達到眞正的“授之以漁”的目的.

有人說,思維培養是一件易講難做的事,因爲當幾種不同的思維方式一起擺放在學生面前時,難免花多眼雜,禾苗和韭菜分不淸楚。特別是澳門目前的狀況,目前的環境,提昇思維,確實是一件花費頗“巨”的事,也即是需要我們打一場艱苦的“持久戰”. 但我們是不得不做,即使艱難,這或許是我們每一位數學教師的使命. 當然,擺在我們面前的有兩條路:一是知之可爲而爲之,確是上策,這樣不用花費我們的諸多精神;二是知之難爲而爲之,筆者覺得這樣更能顯得“英雄”本色,與學生們同苦同樂,不怕挫折,成就使命.

從數學本身來說,思維又是數學的靈魂,離開了思維,數學還能剩下些什麼? 所以,筆者的觀點是教數學除了教知識,更重要的是教思維. 若只是**“授之以魚”**,對教者而言,是相對容易的一件事,學生得到的只是一份大禮物,不需要知道其中的來龍去脈;而**“授之以魚”**,對教者而言,是相當困難的一件事,學生需要懂得事情的前因後果,但是,當他懂得此方法之後,學生就能由此出發,去抓到越來越多的**“魚”**,達到**“教是為了不用教”**的目的.

多年前,筆者曾經聽過當時的長沙鐵道學院的一名教授的教學專題講座,現在這個學院不知改名叫什麼了,當時也記了詳盡的筆記,很可惜現在也找不到了,只記得他從一道簡單的初中數學題出發,一路地進行思維引道,由低至高,最後變成了高中數學題,甚至大學數學題,心中是相當的佩服. 這一番的景象,使我記憶頗深,延續至今,也給我在思維培養上提供了許多啓迪. 思維培養需要方法,尤其難的是進行思維的引道. 下面是筆者在實施思維培養方面的一個嘗試,以此作爲抛磚引玉作用.

〔**例**〕已知 $x \in (0, +\infty)$,求證:$\dfrac{1}{1+x} < ln\dfrac{1+x}{x} < \dfrac{1}{x}$.

第一層引道:**道數法**. 從所學知識引申開去.

〔**分析**〕這是筆者在數學培訓班中的一道培訓題目,發現學生覺得非常難以理解和掌握,一者難在題目形式繁複,結構多元,不等式兩邊式子不同;二者難在切入點難尋,不知從何入手;三者難在基本方法應用不上,諸如比差法,綜合法,都難以直接應用到解題之中. 學

生們發愁了,互相的討論,一片嘈雜誌,但始終無法想得出辦法.

筆者適時的引道,把視野放大些,我們所學習的方法中,是否有能解決的方法嗎?譬如放縮法,判別式法,或者搆造法?學生還是疑慮,即使搆造成了一個函數,例如 $F(x) = ln\frac{x+1}{x} - \frac{1}{1+x}$,又如何解題呢?函數的性質之中,只有單調性可以同"不等式",同"比較大小"有聯繫,但此函數屬兩種類型函數的"複合體",並不易單純道出它的函數性質.

這時老師指出,還有一種辦法可以道出函數的單調性,尤其是復雜函數的單調性,這種辦法就是**道數法**. 下面試解之.

〔**解**〕令 $F(x) = ln\frac{x+1}{x} - \frac{1}{1+x}$,

$$F'(x) = \frac{x}{x+1}\cdot(\frac{x+1}{x})' - (\frac{1}{x+1})' = \frac{x}{x+1}\cdot\frac{(x+1)'x-(x+1)x'}{x^2} - \frac{1'(x+1)-(x+1)'}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x}{x+1}\cdot\frac{x-(x+1)}{x^2} - \frac{-1}{(x+1)^2} = \frac{-1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{-(x+1)+x}{x(x+1)^2} = \frac{-1}{x(x+1)^2} < 0\ [\because x \in (0, +\infty)].$$

$\therefore F(x)$ 在$(0, +\infty)$ 遞減,即 $0 < x < +\infty$ 時,$F(x) > F(-\infty)$.

而 $F(+\infty) = 0 + ln1 = 0$.

故 $ln\frac{x+1}{x} - \frac{1}{1+x} > 0$,即 $ln\frac{x+1}{x} > \frac{1}{1+x}$.

同理令 $G(x) = \frac{1}{x} - ln\frac{x+1}{x}$,

$$G'(x) = (\frac{1}{x})' - \frac{x}{x+1}\cdot(\frac{x+1}{x})' = \frac{-1}{x^2} - \frac{x}{x+1}\cdot\frac{(x+1)'x-(x+1)x'}{x^2}$$

$$= \frac{-1}{x^2} - \frac{x-(x+1)}{x^2} = \frac{-2}{x^2} < 0.$$

$\therefore G(x)$ 在$(0, +\infty)$ 上遞減,即 $0 < x < +\infty$ 時,$G(x) > G(-\infty)$.

而 $G(+\infty) = 0 + ln1 = 0$.

故$\frac{1}{x} - ln\frac{x+1}{x} > 0$,即$\frac{1}{x} > ln\frac{x+1}{x}$,從而有$\frac{1}{1+x} < ln\frac{1+x}{x} < \frac{1}{x}$.

第二層引道:**"中間式" 換元法**. 爲何要換元?從哪換?

〔**分析**〕上面的方法學生會覺得較煩,一來運算量大,二來學生對單調性應用中要用到 $0 < x < +\infty$,有點難以理解. 有沒有更好的辦法?這時候要進行引道了,想往換元的思路上去引道,但怎麼引?首先向學生提出的**第一個觀點是**:遇到問題,我們當然想到的是基本的解法,從所學知識去考慮,但碰到較復雜的問題時,基本方法解不了或雖有可解,但較爲繁瑣,怎麼辦?有沒想過將復雜的形式化簡?**第二個觀點是**:如果你想化簡,應從那個方面化?**第三個觀點是**:以前有沒遇到過將復雜問題轉化成簡單問題的方法?有的學生可能會想起,以前有聽過用換元來處理復雜問題的方法,當然也有些學生一臉茫然. 這時引入換元法是

時候了,但學生還是會感到難以切入,有點思維短路的感覺:如果要換,從那裏換起?**第四個觀點是:**你想那部分變簡單?想那部分變簡單就從那裏變. 一番的討論之後,學生們意見統一起來了:**從中間變**. 於是,我們這個換元就叫**"中間式" 換元法**.

〔**解**〕令 $t = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x} > 1$,則

原式化爲 $1 - \frac{1}{t} < lnt < t - 1$.

令 $f(t) = lnt - (1 - \frac{1}{t})$,則

$\because f'(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} = \frac{t+1}{t^2} > 0$, 故 $f(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上是增函數,

$\therefore f(t) > f(1) = 0$.

$lnt > 1 - \frac{1}{t}$.

從而有 $ln\frac{x+1}{x} > \frac{1}{1+x}$.

再令 $g(t) = t - 1 - lnt$,則

$\because g(t) = 1 - \frac{1}{t} > 0$　故 $g(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上是增函數,

$\therefore g(t) > g(1) = 0$.

$\therefore t - 1 > lnt$.

即 $\frac{1}{x} > ln\frac{x+1}{x}$,

從而有 $\frac{1}{1+x} < ln\frac{x+1}{x} < \frac{1}{x}$.

**第三層引道:"旁邊式換元法"**. 從發散的思維來看

〔**分析**〕方法二顯得簡單多了,學生從中感受到了"換元法" 的威力,但有人會提出:爲何要從中間換元,有其他方式可以換元嗎?從實際意義上來說,換元只不過是另外選擇一個參照係,選擇參照係的方法可以有許多,區別只在於簡單與否. 所以,從其他角度來進行換元,當然是可以的. 或者,可以嘗試從旁邊去換元,這就產生了**"旁邊式換元法"**. 下述便是此種解法的嘗試.

〔**解**〕若令 $t = \frac{1}{x+1} \in (0,1)$,

則 $\frac{1}{x} = \frac{t}{1-t}, \frac{x+1}{x} = \frac{1}{1-t}$.

原式可化爲 $t = ln\frac{1}{1-t} < \frac{t}{1-t}$.

令 $F(t) = ln\frac{1}{1-t} - t$,則

$\because F'(t) = (1-t)\cdot(\frac{1}{1-t})' - 1 = (1-t)\cdot\frac{-(1-t)'}{(1-t)^2} - 1.$

$= \frac{1}{1-t} - 1 = \frac{t}{1-t} > 0.$

故 $F(t)$ 在 $(0,1)$ 上是增函數, $\therefore F(t) > F(0).$

$\therefore ln\frac{1}{1-t} - t > 0$,即 $ln\frac{1}{1-t} > t.$

$\therefore ln\frac{x+1}{x} > \frac{1}{x+1}.$

再令 $G(t) = \frac{t}{1-t} - ln\frac{1}{1-t}$,則

$$\begin{aligned}\because G'(t) &= \frac{t'(1-t)-t(1-t)'}{(1-t)^2} - (1-t)(\frac{1}{1-t})' \\ &= \frac{1-t+t}{(1-t)^2} - (1-t)\frac{0-(1-t)'}{(1-t)^2} = \frac{1}{(1-t)^2} - \frac{1}{1-t} \\ &= \frac{1-(1-t)}{(1-t)^2} = \frac{t}{(1-t)^2} > 0.\end{aligned}$$

$\therefore G(t)$ 在 $(0,1)$ 上是增函數, $G(t) > G(0).$

$\therefore \frac{t}{1-t} - ln\frac{1}{1-t} > 0$,即 $\frac{t}{1-t} > ln\frac{1}{1-t}$,也即 $\frac{1}{x} > ln\frac{x+1}{x}.$

$\frac{1}{1+x} < ln\frac{1+x}{x} < \frac{1}{x}.$

以上三種方法,主要考慮從學生的思維出發,去進行思維引道. 第一種思維,從學生所學知識出發,方法上較易爲學生接受,但運算量大,較爲抽象;第二種思維,學生們很喜歡,解題簡潔,但難以找到切入點;第三種思維方法屬於發散性的思維,對引道學生的思維能力發展有一定的作用,可以和學生們一起去探索,去推道,說不定可以培養出一批勇於探索,不畏辛苦的學生. 這就是當老師的得著了,盡管過程艱難,但這是值得的.

事實上,在一些學生眼裏看來,總會認爲老師是了不起的人物,無論多難的題目,老師都會一下子就想得出解題方法,而忽略了老師其實也是**“凡人”**一個,老師們的思維能力也是一步一步的累積起來的. 故而筆者經常同學生講的一句說話就是:**聰明來自積累,只要同學勇於探索和思考,勤於累積,總有一天也會成為思維的强者**.

# 從小學數學視角探討核心素養的雙重關係與四大意識

浙江省杭州市時代小學　唐彩斌

“核心素養”注定將是一個 2016 年的教育熱詞,作爲小學數學教師,熱詞更需冷思考,不應固守老經驗排斥新概念,不該套用新詞彙替代老做法,需要與時俱進不斷學習,深入明晰“熱詞”背後的關鍵要義,才能找準深化數學課程改革路徑,厘清核心素養與學科核心素養(也稱學科關鍵能力)之間的關係,明確從課程整體規劃到常態課堂的具體實施,一步一個腳印,一點點地改變,只有這樣,核心素養才會在學生身上生長。

## 一. 聚集核心素養的意義與内涵.

爲什麼要關注核心素養? 從關注知識、能力到關注核心素養,是在國際視野下課程改革昇級的走向。與一般的學術問題討論有所不同,基於核心素養的課程建設也是國家對學校的要求。在《教育在於全面深化課程改革落實立德樹人根本任務的意見》明確提出,將核心素養體系置於我國深化課程改革、落實立德樹人目標的基礎地位,作爲深化工作的“關鍵”因素;明確提出了核心素養體系,要求組織研究提出各學段學生發展核心素養體質,明確學生應具備的適應終身發展和社會發展需要的必備品格和關鍵能力。作爲義務教育階段的小學教學教育工作者,我們有責任做好基於核心素養下深化課程改革.

什麼是核心素養? 較早提出核心素養的是世界經濟合作與發展組織(OECD),後來聯合國教科文組織、歐盟等國際組織、美國、芬蘭等世界發達國家也紛紛提出核心素養,盡管提法不完全一致,但歸結起來總聚焦三大方面的素養,分別指向“人與自我”“人與社會”“人與工具”,形成的基本共識是:核心素養是指未來社會發展和個人終身發展所需要的關鍵能力與人格特徵。核心素養包括知識、能力,也包括態度價值觀,也包括認知素養和非認知素養。相關專家梳理了世界各國的核心素養,發現普遍受到關注的核心素養有 4 個方面:合作交往、公民素養、資訊素養與批判性思維.

我國也高度重視核心素養的培養,2016 年 2 月,教育部委托中國教育學會也對外發佈了“中國學生核心素養”(徵求意見稿),從 3 個維度來搆架:自主發展、社會參與、文化修養;二級指標分爲 9 個維度具體爲社會責任、國家認同、國際理解;人文底蘊、科學精神、審美情

趣;身心健康、學會學習、實踐創新,進而細化爲 25 個小指標,分別爲誠信友善,合作擔當,法治信仰,生態意識,國家意識,政治認同,文化自信,全球視野,新生差异,人文積澱,人文情懷,崇尚眞知,理性思維,勇於探究,感悟鑒賞,創意表達,樂學善學,勤於反思,數字學習,珍愛生命,健全人格,適性發展,熱愛勞動,批判質疑,問題解決。雖然沒有最後定稿,但國家層面的核心素養框架已基本成型。

## 二. 核心素養與數學學科核心素養的雙重關係.

從學科的視角來分類,核心素養包括跨學科核心素養和學科核心素養,對於小學生來說,學科教學佔據了最重要的時間和陣地,一個人的素質是經過一門一門學科的教學去實現的,離開了學科培養學生的核心素養,將會是無本之源。那麼,什麼是小學數學學科的核心素養呢? 不同定義的方式,就對應着不同的內涵。

從種屬關係來分析,在學生的核心素養中某一門學科能實現培養哪些核心素養中的素養? 作爲數學老師,在實施數學課程方案的時候,我們需要思考:數學學科在孩子身上能夠產生哪些變化? 對孩子的素養在哪些貢獻? 這一點上,臺灣地區基於核心素養的課程規劃值得借鑒。在全臺灣出臺整體的核心素養體系後,就請各個學科組認領各自學科能勝任完成的核心素養任務。(蔡清田,2015)如果按照這樣的邏輯關係分析,那麼小學數學學科的核心素養,就是應該在學生的核心素養中請選擇出適合小學數學學科培養的素養。筆者曾經隨機選取了浙江省各個地區各個學校的 200 位小學數學教師代表做嘗試,請老師們從國家發佈的"中國學生核心素養"(徵求意見稿)的 25 個 3 級指標中,選取出 5 項您認爲最符合小學數學學科來培養的核心素養,結果前五項爲:勇於探究、理性思維、合作擔當、批判質疑和問題解決。盡管,筆者也淸楚,目前的樣本數據還不夠大,反映的結果還不夠典型,但從種屬關係來提煉學科核心素養的思路已不言而喻,至少能反映一個群體對小學數學學科最能培養學生什麼核心素養形成共識。答案有兩種方式得知,一種是自上而下公佈通知,一種是自下而上探索,以上的方式和路徑應該屬於後者。如果教師自己就是答案的發現者,可能會在落實的過程中更具主動性。

從類比關係來分析,數學學科核心素養所用的素養名詞不一定是在學生的核心素養中,而是用同樣的思想方法分析什麼是最爲核心的,只不過學生核心素養是針對整個人,而學科核心素養是針對學科教學過程中的對象。從目前筆者所查閱的文獻來看,更多的學科素養的提出,指的就是這種關係背景下的分析。2013 年徐斌艷教授曾做過關於數學學科核心能力研究的綜述,指出最早提出學科核心能力的是全美數學教師理事會 1989 年頒佈的《學校數學課程與評價標準》。同時,她基於國際視野,又結合中國國情,提出了義務教育階段學生 6 個方面數學核心能力:從數學角度提出問題、數學表征與變換、數學推理與論證、數學建模、數學地解決問題、數學交流。2015 年,馬雲鵬教授指出,《義務教育數學課程標準(2011 年版)》提出的 10 個"核心詞"即數感、符號意識、空間觀念、幾何直觀、數據分析觀

念、運算能力、推理能力、模型思想、應用意識和創新意識,其實就是小學數學學科的核心素養。2016 年,**數學課程標準修訂組組長史寧中教授對數學學科的核心素養曾解讀為 3 句話:用數學的眼光觀察現實世界,用數學的思維分析現實世界,用數學的語言表達現實世界。**更爲重要的是,他溝通了這 3 個核心素養與《數學課程標準》所提及的數學基本思想與核心詞之間的關係,什麼是數學的眼光,就是要數學抽象,而數學抽象的具體表現就是符號意識、數感、幾何直觀、空間想象;什麼是數學的思維:就是要強調邏輯推理,而邏輯推理具體表現爲推理能力、運算能力;什麼是數學的語言,就是要強調數學模型,數學模型具體表現在模型思想、數據分析觀念。這樣,就搆架起數學學科的核心素養體系。

## 三. 核心素養下深化數學課程改革的 4 個意識.

### 1. 育人目標的整體意識:學科教學中也要關注跨學科素養。

平時,學科教師常常習慣"學科"思維,作爲研究,是應該深入學科,但作爲培養人,不應該受學科所限。每一個教育者都肩負着"立德樹人"的根本任務,致力於學生核心素養的培養。學科教學時,自然會關注到學科的核心素養,但與此同時也要關注跨學科的素養。關於認知性素養的同時,關注非認知素養的培養。

數學教學過程中也要關注"誠信友善",同桌之間對答案,對就是對,錯就坦然承認錯,"不會悄悄改一改,把錯假裝對",不僅能坦然地提出來,不會不懂裝懂,這就是"誠信";同桌之間,有競爭,但也要友善,同桌有好的表現,想出了不一樣的方法,要替對方感到高興;數學教學過程中也要關注"合作擔當",當面對一個有挑戰的任務時,要學會獨立思考,也要學會合作分工,在分工的過程中也要學會擔當,在一定規則下輪到發言就要大方表達;數學教學過程中也要關注"人文情懷",雖然大而言之,數學屬於理科,但絕不因此而缺少人文,不僅數學的學習素材可以融入人文,學習數學的過程本身也可以充滿人文。就像有人用"永遠的永遠"來描述圓周率,用鄭板橋的竹來描述抽象,用唐詩宋詞來練習乘法口訣。數學教學過程中也要關注"創意表達",不僅要求學生會做,而且要學生會說,不僅會解題,而且還要學會表達"爲什麼",面對同一個問題,倡導學生不同的理解與表達,即使面對同一個分數二分之一,學生能用不同的圖示來表征,面對同一個數學關係,學生也能用不同的圖示來表示,這些都是數學教學中應該關注的"創意表達"。數學教學過程中也要關注"感悟鑒賞",感悟老師或同伴精妙的解法,感悟數學分析的獨特,欣賞同伴與衆不同的思考,欣賞數學中的奇妙,感受數學文化的潤澤,感受數學思想的精妙。數學可以很豐富,數學的視野可以很開闊。

素養是具有綜合性的,某一種素養難以與一門課或者某一個具體的教學環節直接對應起來,但是,如果僅僅停留在這樣的認識上,每一個學科老師都不去關注學科的教學中哪些素養得到了更多的培養,那麼核心素養的培養將只是空談。素養本位下的數學課堂,不僅要關注那些我們已經熟悉的學科素養,而且還要多關注一些跨學科的素養,我們可以不斷

地催促自己:基於素養本位的課堂,我們可以做哪些改變,我們的哪些教學行爲的改變,是爲了培養學生的哪些方面的素養? 盡管素養不是灌輸和強加的,但至少反思和意識會讓素養培養的過程更有意義和更有效。如果每一個普通的數學課堂,我們都一點一滴地開始關注,核心素養才會轉變爲學生的素質。

**2. 學習内容的核心意識:聚焦核心,改造内容,減負增質.**

我們常說“方向比速度更重要”,確定了核心素養就是確定了課程實施的方向。個人樸素地認爲:核心,就是要告訴我們教育者什麽是最重要的。我們在教育教學的時候要把什麽作爲最高優先級。另外聚焦“核心”,便於我們對照核心素養優化原有的數學教學內容,通常有三種方式:增、刪、改。如果有哪些核心素養,之前教學中關注得不夠的,那就需要增加;如果原來教學的內容都指向於同一種核心素養,那就需要刪減;如果原來的有些教學內容,不足以充分地關注到某種核心素養,那就可以需要調整。對於具體的小學數學教學內容來說,如果說“人文積澱”和“閱讀理解”不夠,可以加強數學閱讀,數學閱讀是對原有數學學習的體系的豐富與補充,拓寬數學學習的綫索,能提昇學生閱讀理解、創意表達等各方面的能力。如果有一些通過不斷機械重復訓練而成的“算”的技能,已經有出現學力過剩的迹象,那就需要適可而止,不要再在“速度”上“秒秒計較”,比如20 以內進位加法,據調查發現,接近 80% 的孩子在學習之前就已經掌握 36 式中的 30 式以上,如果在課堂上和課外還要不斷地用口算卡片練習,從核心素養的角度來分析,沒有任何太大的價值。以前在數學教學中,“做題”是常用的形式,很多學生會“做”但不會“說”,以前我們也不太重視,基於素養的課堂就提醒我們需要強化學生“數學的語言來表達現實世界”,就需要在課堂有意識培養學生的表達能力,甚至有需要幫助學生學會“怎麽說”,具體到是否能用“如果……那就……”來表達一個數學結論。

“核心素養”的觀念至於知識、技能和態度價值觀之上,更能統領教學的走向。核心素養的提出,不應該簡單地理解爲在原有教育目標上所做的“加法”,而是目標更爲精準的“簡”法,基於核心素養的精簡整合,更能把握學生成長的關鍵。把握核心,不拘泥於技術的細節,孩子的數學素養能得到更寬闊的發展。

**3. 教學方式的未來意識:促進個别化、信息化、全球化的學習方式。**

核心素養的提出面向“未來”的。隨着信息技術的飛速發展和全球化進程的迅猛推進,作爲形成核心素養的過程,教學方式也理所當然具有“未來”特徵。

“班不一定是原來的班”,未來的班級將打破同一個教室同一群人一起學習的界限,走班制已經從國外走進國内,已經從高中走向義務教育,走班的實質是爲每一個不同的學生提供可以選擇的班級,因材施教,最大程度地實現學習的個别化。每一個學生都有專屬於自己的課表,可以有不同的學習進度。倘若,在小學階段全面實施走班有困難,增強數學的課程的豐富性,也可以讓學生在學習小學數學時開始選擇,不一定是不同學習內容的選擇,可以是學習同一内容不同程度獲得的目標選擇。

“課已經不再是原來的課”,在信息化的未來,紙質課本不是學生學習數學的唯一材料,

本班的老師也不是指導學生的唯一幫手,學習數學時,會有專門的電子書包,專門的學習資源包,會有專用的數學學科教學軟件、專用學習記錄平臺,未來的課堂學生可以自帶移動設備,就像帶上"鉛筆盒"一樣。微課會逐漸豐富,並會通過大數據沉澱後形成精品微課群,老師和學生都是微課的建設者,未來的數學學習中,當學生遇到困難時,也許只要"微"一下。如今,"數字學習"已被列爲學生的核心素養,藉助信息化的手段來實現學習已是終身學習的一種基本技能。

"學校已經不再是原來的學校",在全球化的今天,世界是平的,學校已經沒有了"圍牆"。國際化不應簡單地理解爲"學外語""遊學"。在學習數學的過程中,我們可以選用具有國際元素的素材,用埃及的金字塔來講黃金比,用意大利的國旗來講三分之一,用法國的盧浮宮講三角形,在介紹小數的時候講講德國人的發明。也可以引進國外的數學名題趣題,領略國外數學家的人物傳記,把國外數學的優質課程整合到我們已有的數學課程體系中來,與此同時,"數學"教育也是我國教育的強勢學科,我們也應該有民族自信,通過各種渠道各種方式向世界輸出小學數學的"中國經驗"。

**4. 學習評價的全面意識:多樣式多維度地評價學習過程和結果。**

基於核心素養的學習,是在育人,不是在育分。如果還是用原來的一個分數或者一個等級來描述學生的獲得,顯然是不能客觀全面地刻劃出學生全面素養的。評價應該發生改變,不能依靠原來傳統的方式和單一的角度來評價全面的素養。

紙筆很難測試出在素養本位課程實施過程中的所有獲得,我們需要創設新的評價方法和手段,倡導檔案袋評價,應用現代化便捷的手段加以跟踪記錄,更爲全面地描述學生素養的形成過程。可以是學生在課堂上從數學角度提出的一個富有挑戰性的問題、可以是對一個習題已知條件的不同表征、可以是對一個問題獨特的理解、也可以是一個與衆不同的解法、甚至可以是一個訂正了幾次還沒有對的錯誤、也可以是對學習某一個數學新知的"驚嘆"感想……形式可以是一張圖片,可以是一段文字,也可以是一段視頻,用多樣有序的檔案來記錄學生豐富多彩的數學學習生活,而不只是那一個個乾巴巴的分數。

如果說僅憑一堆豐富的檔案材料來判斷學生的數學學業會顯得主觀,一定要客觀地分出高下來,那也應該力求更加全面、科學、客觀。在日常的教學生活中,我們常常對自己的教學不滿意,只是因爲隔壁班比自己班的平均分高一點;對學生的成績很遺憾,只是因爲分數只有 89,離優秀 90 分還差一分。我們常常藉助一個不具典型性的小樣本來得出一個一般性的評價結論,不科學也不客觀。我們需要共同建設基於大數據的數學學習質量監測平臺,能對一個班級、一個學生個體作出相對評價,描述出在群體中相對的水平位置,同時藉助大數據揭示學生個體在不同數學能力維度的相對優勢和不足,以便於針對性的彌補與改進。與此同時,我們要豐富評價學生數學學業成就的維度,從基本知識、基本技能、學習態度情感、創造性思維、實踐應用能力等等更多維度來進行等級評價,搆成評價學生數學學習的雷達圖,不斷完善評價維度和指標,形成基於數學學科素養的評價體系。芬蘭的一位數學教師曾經這樣說:一個分數不應該成爲學生學習數學的全部,讓每一個學生能夠感受到

積極健康的成長是最爲重要的。學習數學的意義是在學習數學的過程中根據自己的表現爲自己設定一個合適的學習目標,將來走上社會,能根據自身的表現設定一個合適的人生目標。也許,只有這樣的心態與胸懷,我們才會從更廣闊的維度爲學生創建更全面的評價體系。

**參考文獻:**


[1] 教育部:關於全面深化課程改革落實立德樹人根本任務的意義,2014 年 3 月 30 日。

[2] 張緒培:核心素養如何轉化爲學生素質,光明日報,2015 年 12 月 22 日。

[3] 蔡清田:課程發展與設計的關鍵 DNA 核心素養,五南圖書出版公司,2015 年 2 月。

[4] 徐斌艷:數學學科核心能力研究,全球教育展望,2013 年 6 月。

[5] 馬雲鵬:關於數學核心素養的幾個問題,課程教材教法,2015 年 9 月。

[6] 史寧中:推進基於學科核心素養的教學改革,中小學管理,2016 年 2 期。

[7] 唐彩斌:芬蘭數學教學成功的秘密,小學數學教師,2016 年 3 月。

# 澳門小學數學教育的現狀與趨勢

全國嘗試教學理論研究學會理事長　邱學華

澳門在廣東省珠海市南端,由澳門半島和幾個小島組成,面積約 32.8 平方公里,現有人口 58.7 萬人。它被葡萄牙侵佔了 400 多年,終於在 1999 年 12 月 20 日回歸祖國,成立了澳門特別行政區。

澳門是東西文化交匯處,文化教育也呈現多元化,在回歸前,澳門沒有自己的小學數學教學大綱,沒有自己編寫的課本,大部分學校借用香港課本,小部分學校使用大陸課本,直到 2006 年,由澳門數學教育研究學會汪甄南會長主編《新思維小學數學課本》正式出版,才有澳門自己編寫的課本,這套課本既體現了國際數學教育的潮流,又吸取大陸課本中的中國特色,受到澳門教師的歡迎。2015 年澳門教育暨青年局(簡稱教青局)正式頒佈中小學各學科《基本學力要求》(相當於大陸的課程標準),從小學數學教學內容上分析看,正逐步向大陸靠近。

以前,澳門小學數學的教材和教法大都搬用香港的,基本上是西方化,澳門教青局大力推動同大陸教育的交流,我幾次到澳門宣講嘗試教學法,受到他們的關注。2000 年,教青局派小教處長李嘉麗和中教處長陳寶雲,親自到山東濟南參加全國第十屆嘗試教學法學術年會,並深入內地考察,她們深切感受到嘗試教學法對轉變教師教育觀念和有效地提高教育質量有着重大作用。2001 年以教青局的名義邀請我到澳門講學和培訓教師。在澳期間,向全體中小學校長作學術報告,教青局蘇朝暉局長親臨聽講,並在會上公開宣佈在全澳中小學數學科推廣嘗試教學法。我親自上示範課,舉辦工作坊,指導教師備課上課,盛况空前,這是迄今爲止,澳門教育界規模最大的一次教研活動。

2002 年澳門成立數學教育研究學會,由汪甄南先生任會長。他畢業於上海師範大學數學係,後任上海縣教師進修學校教師,八十年代初到澳門發展。他不僅有很高的數學素養,而且有很深的大陸情結。他通過數學教育研究學會平臺,采用"請進來","走出去"的辦法,架設澳門與大陸之間密切交流的橋樑。

請進來,除邀請專家講座外,主要是邀請小學數學名師上觀摩課,前後邀請了吳正憲、華應龍、林良富、黃愛華、唐彩斌、卞小娟、劉莉、虞怡玲、何藝燕、周莫涵、張宏池等上觀摩課。

走出去,除組織教師赴內地學習參觀考察外,還培養教師到大陸參與各種賽課活動。早在 1997 年楊寶珠老師赴廣東佛山代表澳門上公開課。2015 年 11 月在河南洛陽舉行的

第三屆孔子杯小學數學課堂教學大賽中澳門教師邵敏和楊玉婷上的《三角形面積計算》獲得了特等獎。

原來在澳門,不時興聽課,“各自爲政”,“閉門造車”,現在數學教育研究學會每年舉行1－2次小學數學課堂教學比賽,推動了對課堂教學的研究,鼓勵互相聽課觀摩,教師的教學水平逐年得到提高。近幾年來,又開展新思維數學課堂教學大賽。每次賽課,我都應邀作爲評委,親眼目睹澳門小學數學教師的成長。

由於加強了中小學數學教學,多方面吸取大陸的數學教育經驗,使澳門中小學整體水平得到提高,2015年,澳門數學教育研究學會率領高中生參加在美國舉行的高中國際數學競賽,在有大陸、香港、臺灣、新加坡等強隊參與的情况下,澳門代表隊獲得冠軍,受到澳門特別行政區政府的嘉獎。

澳門回歸後,經過十多年的努力,從小學數學發展的趨勢來看,澳門逐步靠近大陸,擺脱香港及西方的影響。出臺了澳門數學《基本學力要求》,編出了澳門本土的《新思維小學數學課本》,成立了澳門數學教育研究學會,變化是巨大的,成績是顯著的,發展前景是樂觀的,我們不能低估澳門數學教育的實力。

我每年去澳門1—2次,參與培訓教師,課堂教學大賽,從小學數學課堂教學改革趨向來看,主要有以下幾個方面。

**第一、强調學生自學。**

在澳門宣傳和推廣嘗試教學法已有近20年,大部分教師都已接受“先練後講,先學後教”要求學生自學的教學思路。有部分學校在高年級引進“導學案”,要求學生在課前預習。强調自學課本,重視教科書的作用。

**第二、組織小組交流。**

從每年比賽課的情况來看,大都是采用小組圍坐的形式。算題先在小組內討論交流,然後派代表上臺講解板書。當然也有的課,徒有虛名,沒有充分利用小組合作學習,這方面他們正在努力。

“學生討論不起來,啓而不發”,解決這個難題,關鍵要選準討論的問題,大家都會的不要討論,大家都不會的也不要討論,有的會有的不會或大家都疑惑不解的才有討論的價值。

**第三、重視課堂練習。**

練習是學生自主學習的重要形式,只有通過練習,學生才能眞正掌握知識和形成技能。過去,澳門教師講的太多,學生練的太少。教師講話太多,勢必佔用學生練習時間,當堂做不完只能留到課後去做,加重了學生作業負擔。現在重視課堂練習,練習量有了提高,但是很多課練習量還是不夠。

另外還有一種不利的傾向,教師不重視利用課本上的題目,教師另外布置的題目太多、太雜,“喧賓奪主”。這個問題他們正在研究解決。

**第四、適當運用小平板電腦。**

澳門有些學校已把小平板電腦引進課堂。例如,一次賽課中培正中學附小邵敏老師的

《三角形面積計算》,學生把兩個全等的三角形拼成一個平行四邊形,或者把一個平行四邊形剪成兩個全等三角形,這個剪拼過程用小平板拍攝下來,然後推選一個代表,一邊放映剪拼的過程,一邊講解推理的過程。預先在小組內分工,有導演、攝像、操作員以及講解員。這樣可以充分發揮小平板的作用,原來各小組操作,是互相看不到的,現在用小平板,把各組的剪拼操作過程還原出來,使大家看的淸淸楚楚。整個拍攝工作是集體創作,各人在小組要做好自己的角色,互相配合,才能出色地完成任務。另外,應用平板電腦爲工具,完成預定的任務是一個現代人必須掌握的能力。

這樣上課,我在大陸還沒有見過,這是個了不起的創新。因而在 2015 年在河南洛陽舉行的第二屆孔子杯小學數學課堂教學大賽,這堂課獲得好評,評爲特等獎。

他們沒有搞所謂的"翻轉課堂",認爲這種提前聽教師講解的"翻轉課堂",華而不實,無助學生提高自學能力。

**第五、正在研究"如何鼓勵學生提問"。**

從目前澳門大多數課來看,幾乎都看不到學生提出問題。這是一個大問題,他們正在研究解決。

學生能夠提出問題,是學生自主學習的表現,是他們積極思維的結果,也是創新的開端。

課堂上學生沒有提出問題,主要原因是教師沒有給學生提問題的機會。一堂課可以多次讓學生提出問題:自學課本後問學生"有什麼不懂的地方";嘗試練習後問學生:"你們有什麼問題可以提出來";全課結束前讓學生說:"這堂課你們有什麼收穫? 還有什麼問題?"

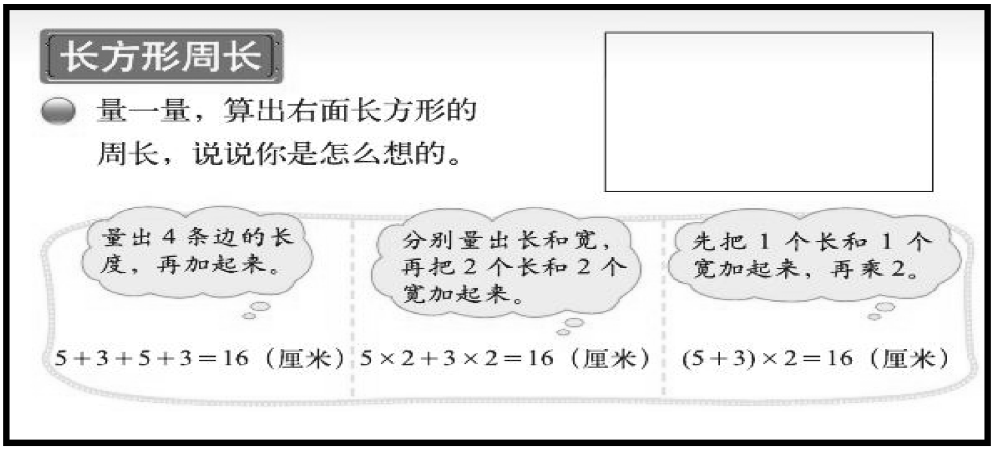
培養學生的創新精神就從提問開始,教學、教學,教學生學;學問、學問,引學生問。

澳門的小學數學課堂,經過 10 多年的努力,已舊貌換新顔了,値得我們學習。由於澳門的特殊地理位置,是東西方的交匯處,具有中國特色的小學數學教育的理論和經驗,也可以從澳門走向世界。

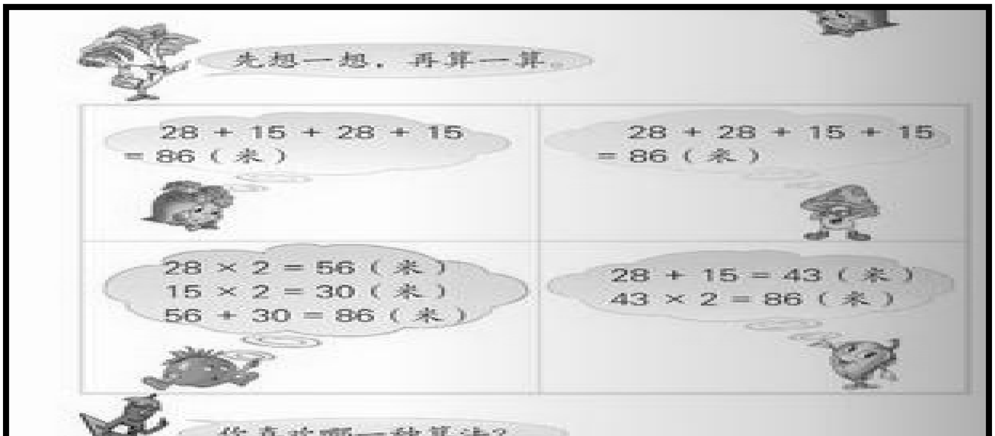
# 《長方形、正方形的周長》交流課教學反思

四川省成都市雙林小學　張家寬

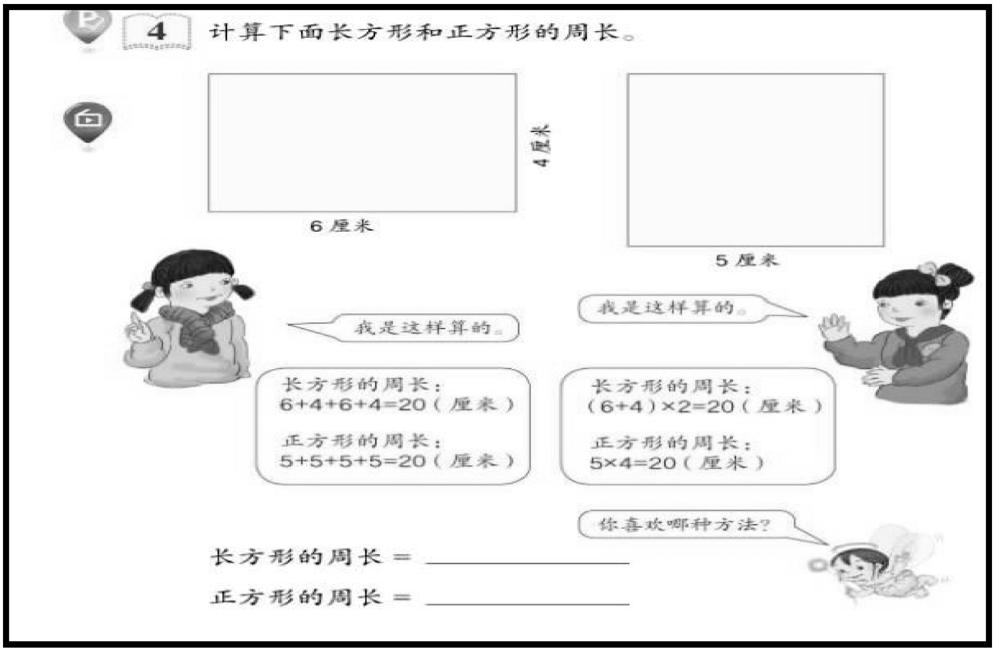
《長方形、正方形的周長》一課是“圖形與幾何”板塊的一節內容。這是學生學習了“什麼是周長”一課後根據周長的概念總結概括出長方形、正方形的周長的計算方法。開展交流課之前我們參考了人教版、蘇教版、北師大版等內地普遍使用的版本後我們對本課的設計及在課堂實施過程中所反映的“現象”，有如下幾點和教育同仁分享。




北師大版《長方形、正方形的周長》




蘇教版《長方形、正方形的周長》




人教版《長方形、正方形的周長》

## 一、巧設情景,溝通數學與生活的聯繫。

《課標》中提出“人人學有價值的數學”,是指人人能獲得必需的數學,數學應滿足學生未來社會生活的需要,能適應學生個性發展的要求。“有價值”的數學應該與學生的現實生活密切聯繫。學習數學是重要的,將數學融於生活更是必要的。分析了三個版本的教材後發現在教學中教師需要靈活使用教材,增加一些教材之外的利於使學生感受到“生活中的數學”。由於三年級學生的認知水平,加之我們本次又是與澳門學生首次接觸。更需要創設一個適當的情境來吸引學生參與課堂。最後我們選擇了既能代表四川成都特點又能夠受到學生喜歡的熊貓作爲了情境“主人公”。開課時教師設計的熊貓玩耍、鍛煉身體的小視頻,動畫課件其目的都是能在第一時間內抓住學生的視綫。這個情景的設計又不是孤立而存在的,它與後面的長方形的出現也做了一個伏筆。熊貓散步後回頭一看,自己走過的路綫是一個長方形。後面的教學環節就可以順勢開展。

## 二、積累經驗,為探索與發現奠定根基。

“圖形與幾何”板塊的內容是學生的空間觀念形成的重要載體。這塊內容的學習與研究歷來都是一個重點、難點。要突破這個難點,教師在教學過程中就必須突出關注學生“活動經驗”的積累過程。三種版本的教材在編寫的脈絡上有一個共性:**量——算——觀察——發現——提昇**。前面的四步都是爲了使學生獲得感知,便於積累必要的從事數學活動經驗和數學思考的經驗。“基本活動經驗”的積累不能一蹴而就,需要不斷的觀察、想象、描述、再現;拼擺、測量、畫圖;操作、分析、推理。在“周長”這個單元的學習中,結合豐富的

實例,注重親身體驗,逐步引導學生積累活動經驗。

本課中設計了通過“對比觀察”積累活動經驗。在開課的環節中首先讓學生觀察熊貓的路綫圖,喚起了潛藏在他們內心深處的“長方形”的認識。這個喚起不僅是外形的喚起,更多的還是他們對長方形特徵的回憶,學生的回憶更便於後一步根據特徵進行動手操作。在通過觀察長方形周長的計算算式,總結長方形周長公式環節是提昇了學生對“觀察”二字的理解。這個環節,學生不僅要觀察更多的是那些通過觀察算式的共性與個性發現本質的“异同”,提煉長方形周長的公式。在課堂中學生的確通過自己的觀察發現了三個算式的不同點是外在形式不同的算式“10 + 6 + 10 + 6、10 × 2 + 6 × 2、(10 + 6) × 2”,緊接着學生立刻提煉出了三個計算方法“長 + 長 + 寬 + 寬、長 × 2 + 寬 × 2、(長 + 寬) × 2”。如果沒有對算式的外在形式的觀察,後面的計算公式是無法觸及到的。接下來是觀察幾個不同方法的相同點——比較這些不同的方法之間的相同點。這個觀察是屬於高層次的觀察總結。課堂中學生出現的情况也與我們在內地幾次試講出現的情况相似,那就是能通過觀察發現不同的方法中蘊藏的相同點的學生數量很少,比內地孩子還少。澳門執教班級中有 4 個小朋友舉手發言,而內地班級以 40 人一班爲例,有 10 個左右發言。這個想象說明我們內地在長期關注了學生相關能力、素養的培養後效果是明顯的。

通過動手操作積累活動經驗。引導學生在操作、交流等活動中,逐步理解長方形周長的實際意義,獲得更多、更直觀的有關周長的經驗,建立計算周長方法。學生在測量長方形卡紙的長與寬的過程中出現了以下兩種方法,一是四條邊都測量,二是測量一條長,一條寬。通過這個操作獲得,學生體驗到了長方形的周長就是將四條邊相加,如果沒有這個測量活動,學生是無法獲得長方形的周長和其他圖形的周長一樣,都是將所有邊綫的長度相加。課中出現的兩種測量方法也爲後續出現多種計算周長的方法積累了基礎。正因爲有不用的測量方法,學生才能出現“連加、乘加”的計算方法。

## 三、突出計算圖形周長的一般方法,注重探索過程的展示交流。

在“北師大”版“周長”這個單元中着重突出如下周長計算的一般方法,前一課呈現了大量不同形狀多邊形周長計算的問題,幫助學生理解了周長概念的同時,也初步學會計算周長的一般方法,即把所有邊的長度相加在一起。在此之上來研究“長方形、正方形的周長”。課中學生們通過自己的探究,發現了三種不同的方法 ,一種方法是根據圖形的特徵解決問題的。在課中我們並沒有強調一定要“舍”與“取”。三種版本的教材中“人敎版”和“蘇敎版”中出現了一句“你喜歡哪種方法?”,而“北師大”版的教材中卻連這句話都沒有。這充分說明了鼓勵學生選擇適合自己喜歡的方法,在生活中解決問題時選擇適合具體情境的方法才是最好的方法。在課堂實施中我們也發現同學們對於自己研究出來的方法的解釋都是基於以上兩種思路進行的。同時我們也關注到澳門地區有的教材中是倡導對於三種方法進行優化提煉的。這一差异正是此次交流活動中所碰撞的“智慧的火花”之一吧!

# 重在“體驗”貴在“引導”

## ——《面積的認識》教學反思

四川省成都市成華小學校　張　倩

數學教學是一種數學活動的教學，在新課標的指導下，力求做到以學生發展爲本。在整個教學過程中，學生不是依賴教師的講解獲得知識，而是通過自己觀察、操作、思考和討論交流，在學習過程中主動獲得面積的概念。

新課程改革以後，數學概念的教學出現了很多變化，其中有一條就是弱化了對概念文字表述的記憶，重在理解和解釋。澳門是東西方文化的交匯處，教育也呈現多元化。但我想，“以生爲本”的兒童教育觀是我們共同的追求，這也是我在設計整節課的指導思想。

### 一、在豐富的生活背景上學習數學，强化感知，建立概念。

《數學課程標準》指出：“學生的數學學習內容應當是現實的，有意義的，富有挑戰性的，這些內容有利於學生主動地進行觀察、實驗、猜測、驗證、推理與交流等數學活動。”學習內容來自學生生活實際，在學生已有的經驗的基礎上學習，可使學習更有效。因爲，學習內容貼近學生知識經驗，符合學生心理特徵，容易形成知識結構，同時也充分體現了學習生活化的理念。

面積的概念具有較强的抽象性，學生理解起來會有一定的難度，爲了使學生較好地理解和掌握“面積”這個比較抽象的概念，我從故事入手，以尼羅河水泛濫引出歷史上測量面積的需要，告訴學生：數學概念不是憑空而來，而是有其產生的歷史背景。然後畫下兩塊“田”，直接涂滿顔色，初步區分了周長和面積。接着，讓孩子們用手指去指“田”的周邊一周，又讓孩子摸整塊“田”，這是用不同的動作來區分周長和面積，讓學生初步感受今天認識的面積和以前學習的周長既有區別又有聯繫，以達到多角度、多方位地理解面積的含義。再接着是對圖形進行分類：封閉的、非封閉的，這是讓學生對概念的學習精確化和拓展化。找生活中物體的面，讓學生感知物體的面有大有小；數文具盒的表面，這是讓學生感知面在體上，感受“物體的面”隨處可見，初步建立面的表象。這樣層層深入，環環相扣，學生在不知不覺中理解了面積的含義，有一種水到渠成的感覺。體現了現代教育思想所倡導的“數學課堂教學應向學生提供與生活實際密切聯繫的、有價值的、富有趣味的教學內容”這一基

本理念,學生由最初直觀認識面積上昇到對面積的理解,前者是後者的基礎,後者是前者的昇華。

## 二、經歷用多種方法比較面積的過程,體驗比較策略的多樣性。

學習的過程是一個認知的過程,又是一個探索的過程,使數學知識成爲學生看得見、摸得着、聽得到的現實,眞正感受到數學的眞諦與價值。

爲了使學生體驗統一面積單位的必要性,在比較兩個圖形面積的大小時,我設計數學遊戲,製造矛盾衝突,將學生引入重重矛盾之中,接着引導學生動手操作,加以求證,使他們經歷了從"觀察——重叠——拼剪——拼擺——用統一的標準來擺——面積單位的建立"這一過程,通過師生評價、生生評價等,在合作交流的過程中每個人的想法都成了課程資源,在交流的過程中不斷補充、完善,吸取別人好的做法,實現了資源共享,讓學生從中學到比較面積的方法,得到解決問題的經驗,養成解決問題要想好策略的好習慣。學生始終在興奮中思考、探索,學習不再枯燥乏味,而是充滿了挑戰和樂趣,同時也爲下一節課學習"面積單位"做了必要的鋪墊。

## 三、鞏固練習,深化認識面積,突破學生學習難點。

學生從一維"長度"到二維"面積"的學習是學生對空間形式認識發展上的一次飛躍,相比"長度"而言,"面積"更爲抽象。爲了讓學生更好的加以理解與區分,因此在練習的設計時,特意針對部分學生模糊點來進行設計,我先出示了兩個長方形的其中一條邊,請學生根據這兩條邊來判斷哪個長方形的面積大,此時引起了學生的爭論,這個時候的學生是帶着問題在思考,策略性的探求已經從"外壓"轉化爲求知的"內需",再通過學生動手描一描以及多媒體輔助的動畫演示,讓學生形象地理解了要比較哪個長方形的面積大,必須要知道長方形的長和寬,這也爲後面學習"面積的計算"打下了基礎。這個過程既凸顯了"面"與"綫"的本質區別,也進一步促進學生眞正理解面積的內涵,形成清晰、正確的認識。

**回味課堂之餘,覺得還有些值得我深思的問題:**

1. 我們強調學習數學的感覺,但也不能忽視感覺所帶來的負面效應,帶着感覺學數學,最終目的不應該是跟着感覺走,而應是站在已有的數學感覺之上進行理性的學習。如何很好地把握這個平衡點,值得我們細細咀嚼,深入探究。

2. 不知道是不是因爲我設計的問題還是語言方面有溝通的障礙,我幾乎看不到學生能主動提出問題,這也是我感到很遺憾的地方。學生能夠提出問題,是學生自主學習的表現,是他們積極思維的結果,也是創新的開端。**培養學生的創新精神就從提問開始,教學、教學,教學生學;學問、學問,引學生問。**

# 以有效的設計促數學基本經驗的積累

## ——記《長、正方形的認識》教學感悟

四川省成都市五桂橋小學　商　靖

偶然拾得這樣一則新聞:"德國在汶川大地震之際曾經捐獻給我國的世界最先進的移動醫院,經過我國技術人員的研究後克隆出了數十臺,世界人民無不感嘆中國人民的才智"。看到這樣的新聞,作爲一名身處一綫的老師,我不禁心生一陣莫名的悲涼——我們現在的教育缺少的就是培養創新型人才。我們的教育不是一條標準化的生産綫,我們不是在培養會做題的"機器"。正如**史寧中教授**所言**"一個創新型人才除了知識之外,還需要一些什麽東西呢?我想主要是思維形式和思維方法,他想問題會不會創新性的想,當然還有一個創新意識問題。"**

怎樣才能培養學生創新性的思維形式和方法呢?落實到小學階段的學習,我覺得其中非常重要的就是**"數學活動經驗"**。那麽何爲**"基本的活動經驗"**呢?**張奠宙**指出:**"數學經驗,依賴所從事的數學活動具有不同的形式。"徐斌艷教授**認爲:**我們還可以將基本活動經驗進一步細化,它包括基本的數學操作經驗;基本的數學思維活動經驗;發現問題、提出問題、分析問題、解决問題的經驗。孔凡哲教授**認爲:**"基本活動經驗"是指"在數學目標的指引下,通過對具體事物進行實際操作、考察和思考,從感性向理性飛躍時所形成的認識。"史寧中教授**認爲:**"基本活動經驗就是會思考問題。"**

雖然一千個人心目中就有一千個"哈姆雷特",但是我們不難從這些專家的觀點中找到一些共通的東西:**第一,基本活動經驗建立在生活經驗基礎上;第二,是在特定數學活動中積累的;第三,其核心是如何思考的經驗;第四,最終幫助學生建立自己的數學現實和數學學習的直覺,學會運用數學的思維方式進行思考。**這無疑都在向我們透露一個信息,我們需要培養的是**"會思——會從頭到尾的思考問題;善行——以思帶行,以行促思"**的具有個性的學生。下面就以《長、正方形的認識》一課爲例,談談我粗淺的認識。

### 一、有效的問題

要想學生會思考問題,作爲教師的我們首先需要修煉的功力就是會提出問題。因爲學生的基本活動經驗並不是指學生一定要動手操作的才是經驗,凡是能調動學生固有知識和

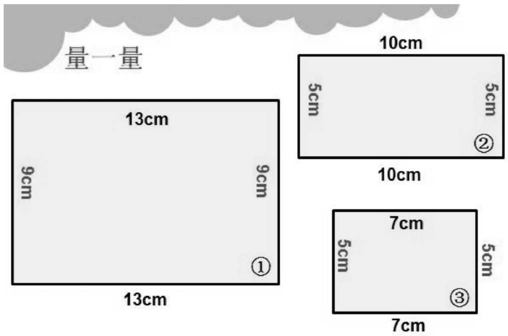
生活經驗的有價值的問題都是學生的基本活動,在這個過程中得到的經驗均是學生的基本活動經驗。而且,教師的思維高度也決定了學生學習知識的深度。

**1. 直指數學學科本質的問題**

所謂數學的學科本質即:1. 對數學基本概念的理解;2:對數學思想方法的把握;3:對數學特有思維方式的感悟;4:對數學美的鑒賞;5:對數學精神(理性精神與探究精神)的追求。以上內容涵蓋了一節課我們所需要解決的根本性的問題,如果作爲教師的我們提出的問題能直接引發學生對於一節課所學知識的學科本質的深層次的思考,那麼就相當於"一把鋼刀插入敵胸膛"。

**【片段 1】**

**師:**誰願意來説一説你測量的結果?(在 PPT 上呈現出 3 個不同長方形長和寬的數據)。




**師:**仔細觀察這些數據,你發現長方形的邊有什麼特徵?

**生 1:**長方形中較長的邊和較短的邊分别相等。

**師:**我們把這樣的一組長邊和短邊都分别叫做長方形的對邊,也就是説長方形的對邊相等。你還有别的方法能驗证這個結論嗎?

**生 2:**可以用折一折的方法進行驗证。

**師:**那正方形的邊又有什麼樣的特徵呢?你能借鑒剛才研究長方形的方法進行研究嗎?

在上述片段中教師引導學生觀察自己操作的結果,並通過深究**"長方形的邊有什麼特徵"**這一核心問題,學生是一觸即發。既實現了對長方形邊的特徵探究方法的梳理,同時也將這樣的探究方法應用到了對正方形邊的特徵的探究活動中。不僅實現了對不完全歸納數學思想的滲透,同時也實現了對數學方法的運用,引領學生從思維的淺水區走向了深水區。

**2. 俯瞰數學學習方法的問題**

古語有雲**"授人以魚,不如授之以漁"**。這就是說,作爲一名教育工作者,**我們現在的"教"是為了"不教"**,此乃教育的最高境界。那麼怎麼才能達到這樣的高度呢?那就需要教師對這個學科有一個深刻的認識,從而實現對學生的學習方法和教師的教學方法的思考和變革。

【片段 2】

**師**:這個動物同學們認識嗎?

**生**:認識! 熊猫!

**師**:你是怎麼認出它是熊猫的?

**生 1**:它是黑白色的。(師點評:抓住了顔色的特徵)

**生 2**:它喜歡吃竹子。(師點評:抓住了生活習性的特徵)

……

**師**:看來有效的觀察就是要學會抓特徵! 你能從上面這些圖形中一眼找出長方形和正方形嗎? 你又能指出這兩個圖形的有什麼特徵呢?

在上述的片段中,雖然老師只是問了一個看似簡單的問題,但是不僅成功地引導學生明白了有效觀察的方法就是抓特徵同時也爲後續學習奠定了基礎,讓學生能迅速地聚焦到對長方形和正方形邊和角的探究上。也許,一個這樣的問題並不能改變什麼,但在這樣的問題中學生一點點的在感悟。滴水都可以穿石,學生長期在這樣的"悟"中得,總有一天量變會引起質變,那麼學生思考問題的角度一定會更高、更全面,那麼創新的思維也就會應運而生。

## 二、有效的活動

美國華盛頓國立圖書館的牆壁上寫有三句話:"我聽見了,但可能忘掉;我看見了,就可能記住;我做過了,便眞正理解了"。沒有積極活動,沒有親身體驗,相信很多知識便會成爲過眼雲烟,很難扎根學生腦海。動手操作能促進學生在"做"數學的過程中對所學知識產生深刻體驗,從中感悟並理解新知識的形成和發展,體會數學學習的過程與方法,獲得數學活動的經驗,同時發展自身的動手操作能力。

【片段 3】

**師**:長方形和正方形的邊和角到底有什麼特徵呢?

**生 1**:長方形和正方形都有 4 個直角。(板書:猜想)

**生 2**:正方形的 4 條邊都相等。

……

**師**:同學們產生了許多的猜想,你們到底猜想得對不對呢? 請用你認爲合適的方法進行驗证。(板書:驗证)

生動手驗证

**師**:誰來説一説你的發現和驗证的方法。

**生**:我用尺子測量的,發現正方形 4 條邊的長度都相等。(板書:正方形 4 條邊都相等,量一量)

**師:**還有和他有相同發現的同學們?請你揮揮手!有和他用不同方法的嗎?

**生:**我是用折的方法。(板書:折一折)

……

在上述的片段中,教師通過有效的活動設計引導學生經歷了**"猜想——驗证——總結"**這一學習數學知識的全過程,同時讓學生明白了解決同一個問題我們可以采用量一量、折一折、數一數等多樣的方法。在活動的每一環節中,教師都通過引導學生"說數學"來將自己的思維過程外顯。在不斷的說中,學生逐步實現了**"會獨立思考,表達自己的想法和經歷與他人合作交流解決問題的過程,嘗試解釋自己的思考過程"**的具體要求,主要體現在以下幾個層次:(1)**説想法,**即說一說關於這個問題我準備用什麼樣的方法去操作,我選擇這樣的方法背後的原因;(2)**説做法,**即說一說我到底是怎麼樣操作的;(3)**説結論,**通過前面的操作和我自己的思考,我有什麼發現。教師再在學生說的基礎上加以引導和總結,不僅得出了長正方形的特徵,還引導學生梳理出了探索長正方形特徵的方法。這樣有效地通過做和說相結合的教學過程,實現了讓學生經歷知識形成的全過程的目的,實現了學會學習的目的,實現了幫助學生積累了學習這一類問題的基本活動經驗的目的。

總之,數學課的核心就是實現對學生思維的訓練,鼓勵學生從多角度、用不同的方法解決問題,從而實現培養創新性人才的終極目標。因此,我們的教學設計一定要圍遶培養學生的思維來展開,在每一節數學課的教學中以**掌握知識為船身、以提昇能力為船槳、以感悟數學思想和方法為方向,引領着學生們在知識的海洋中不斷披荆斬棘、一路前行**!

# 澳門特殊教育概況

澳門數學教育研究學會　伍劍佐

## 前　言

聯合國《殘疾人權利公約》自 2008 年 8 月 31 日起，在中華人民共和國生效（包括澳門特別行政區及香港特別行政區）。公約的宗旨是促進、保護和確保所有殘疾人士能充分和平等地享有一切人權和基本自由，並促進對殘疾人士固有尊嚴的尊重。本文將以文獻探討，把澳門特殊教育的起源、開展及現況整理，期望能令讀者對本澳特殊教育情况加深了解。

## 一、澳門特殊教育的起源

澳門特殊教育開始於 1967 年，由基督教開辦的院舍聖保羅學校，提供聽障成人夜間教育服務；1973 年增辦特殊教育日校（澳門教育暨青年局，2014）。而早於 1960 年前，當時政府缺乏對特殊教育的重視，只有民間社團和天主教機構爲弱能人士開辦服務，積極參與救濟及提供住宿服務（阮邦球，2008）。

雖然現時只找到這些特殊教育的起源文獻，但相信作爲教育界的我們，無論學生是否有特殊教育需要，我們必須本著一顆愛人的心，延續中國幾千多年的教育精神，“有教無類、因材施教”，爲每一位學生提供適切的教育，這是我們教育界應付的責任。

## 二、澳門特殊教育的開展

自 1980 年代中期，澳門社區開始拓展特殊教育，紛紛設立特殊班、特殊學校和特殊訓練中心。經過各界的多年努力，當時澳門政府於 1900 年也開始在教育司屬下設立特殊教育發展委員會；並於 1991 年頒布教育制度法規，確定特殊教育爲澳門教育制度的一個組成部分，闡述特殊教育的宗旨，界定有特殊教育需要人士的類別。翌年，教育心理輔導暨特殊教育中心成立，爲學生進行評估及提供支援服務（澳門教育暨青年局，2014）。

1996 年頒佈第 33/96/M 號法令《特殊教育》，強調平行機會及適切教育，進一步鼓勵及協助有特殊教育需要的學生，融入學校及社會。特殊教育法令具體地制訂各項輔助措施，包括課程內容、教學方法、人員編制、學校硬體配合、學生編班、評量方法及施行細則等。2006 年頒佈的第 9/2006 號法律《非高等教育制度綱要法》，對特殊教育作了新的界定，如

“特殊教育優先在普通學校內以融合的方式實施,亦可在特殊教育機構以其他方式實施。”及“特殊教育的對象包括資優學生和身心存在障礙的學生”。

由 1990 年代開始,特殊教育正式得到政府的重視,並透過法令開展特教的工作,推出了貼近先進國家的新界定。

## 三、澳門特殊教育的現況

今天澳門特殊教育的工作範疇主要分爲對學生的直接和間接服務工作。直接服務工作包括特殊班學生輔導工作、學生評估、治療服務、綜合評估及入學安置建議;間接服務工作提供與特殊教育相關的專業技術支援、資助和協調私立特殊教育及服務機構、對澳門之特殊教育發展提出建議、特殊教育教師培訓工作和推廣特殊教育工作(阮邦球,2008)。

另一方面,董志文(2016a)根據教青局顯示資料表示:政府在 2006/2007 學年開始推出融合教育資助計劃,過去 10 年間融合生數目由 277 人,增加到 2015/2016 學年的 949 人,參與融合教育資助計劃的學校數目有 38 間,其中公立學校有 9 間,分別有 1. 二龍喉中葡小學,2. 樂富中葡幼稚園,3. 北區中葡小學,4. 氹仔中葡學校,5. 何東中葡小學,6. 高美士中葡中學,7. 中葡職業技術學校,8. 二龍喉中葡小學,9. 澳門葡文學校;免費教育學校系統的私立學有 22 間,分別有 1. 聖善學校,2. 海星中學,3. 蓮峰普濟學校,4. 瑪大肋納嘉諾撒學校,5. 沙梨頭坊衆學校,6. 聖瑪沙利羅學校,7. 聖羅撒英文中學,8. 聖德蘭學校,9. 九澳聖若瑟學校,10. 聖玫瑰學校,11. 德明學校,12. 沙梨頭浸信學校,13. 雷鳴道主教紀念學校,14. 庇道學校,15. 福建學校,16. 澳門坊衆學校,17. 澳門中德學校,18. 培華中學,19. 氹仔坊衆學校,20. 澳門三育中學,21. 澳門浸信中學。非免費教育學校系統的私立學有 7 間,分別有,1. 培正中學,2. 聯國學校,3 聖安東尼幼稚園,4. 魯彌士主教幼稚園,5. 聖若瑟教區中學第五校(英文部),6. 聖公會中學(澳門),7. 澳門國際學校,配合了澳門特殊教育在普通學校內以融合的方式實施的發展趨勢。

**表 1 澳門特殊教育最近十個學年的數字**

| 學年 | 特教班(人數) | 融合生(人數) | (特殊教育)教師(人數) |
|---|---|---|---|
| 2006/2007 | 490 | 277 | 86 |
| 2007/2008 | 475 | 264 | 81 |
| 2008/2009 | 471 | 333 | 79 |
| 2009/2010 | 502 | 372 | 81 |
| 2010/2011 | 551 | 426 | 84 |
| 2011/2012 | 560 | 484 | 91 |
| 2012/2013 | 582 | 516 | 96 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2013/2014 | 612 | 692 | 109 |
| 2014/2015 | 624 | 806 | 112 |
| 2015/2016 | 643 | 949 | 124 |

＊資料來源:澳門教育數字概況(2015－2016)。

根據澳門教育數字概況(2015－2016),澳門現時共有10所公立學校、29所私立學校及4所私立特殊教育學校,爲特殊學生提供共三類不同的課程的教育安置,包括融合班、小班及特教班。

### (一)融合班(由融合學校開辦)

第一類是設於普通班的融合生,他們可能因有著下列一項或多項的情況,如:身體機能障礙(包括:聽障、視障、語障、肢障等)、智力範圍屬於臨界智能不足、自閉症、過度活躍症、學習障礙(如:聽、說、讀、寫、數學運算方面有顯著困難)及具長期且持續性的情緒行爲問題,而需要少量的特殊輔助便能與同班同學一起學習及成長的學生。這些學生在普通班級接受教育,並列作融合生,學習內容與該級同學類同,但教師會因應學生的個別特殊需要而采取相應的教學策略來協助學生學習。對於在融合生就讀之班級人數也相應減少,目的是讓學生能得到適度的關注和輔助。班內人數規定每班人數不超過25人,融合生不超過3人,適合公立、私立的幼兒、小學、中學。不論公立還是私立,其融合生的課程原則都是:

1)與普通教育課程相同,

2)按學生的個別情況而作調整,

3)針對某些障礙類別的學生,可能會以免除因其身心條件而不能進行之活動或以其他學習內容代替。

### (二)特殊教育班級小班(由公立學校開辦)

第二類是爲整體學習出現顯著困難的學生而設的特殊教育班級(即小班),這些學生可能爲智力範圍屬於輕度智能不足,且伴隨學習困難或具長期且持續的嚴重情緒及行爲問題,而在學習上需要較大的遷就或輔助。這些學生會在程度較高的特殊班就讀,所學習的科目會較正規教育少,但課程仍然是采用正規教育的課程,目的是讓學生能在教育及生活上融入社會。就讀小班之學生人數較少,且由一名教師及一名助教進行教學,目的是讓學生能得到適度的關注和輔助。班內人數規定每班人數爲8至15人,適合公立學校的小學及初中。按上面所述,目前小班只有公立學校提供,其課程是:

1)與普通班課程相若,增減科目或作部分替代;

2)刪減及簡化普通班教材內容;

3)目前設置小學及初中課程;

4）2010/2011 學年將增設小班高中課程。

### （三）特殊教育班級——特教班（由公立及私人特教學校開辦）

第三類的班級是爲智力屬於中度或以下的學生而設的特殊教育班級（即特敎班），特殊教育班級會爲學生提供個別課程安排及特別教學環境，教學內容除了基本的學科以外，還包括自理、溝通和社會適應等生活訓練；課程也采用以主題編寫的教材爲主，讓學生能得到和他能力及生活相關的學習及訓練。班內人數規定每班人數爲 6 至 15 人，公立學校分三階段（分輕、中、重度）。私立學校包括幼兒、小學、中學教育。公立學校的特敎班學生與私立學生特敎班的學生，其課程的設計依據是有所不同的，茲將分別介紹如下表 2 所示：

**表 2 公立學校與私立學校的特教班課程設計原則**

| 公立學校 | 私立學校 |
|---|---|
| 1）以主題教學方式編寫中文科及常識科。<br>2）按學生的能力編寫其他科目的內容（自理、社交、感知肌能）。 | 1）部分科目內容以主題教學方式編寫，部分則按學生能力縮寫。<br>2）課程設置與普通教育相同。<br>3）改編普通教育的課程內容。 |

＊資料來源：澳門教育暨青年局（2015）。

另外，公立學校特敎班會因應學生不同的階段，其課程設置上都有其不同的理念，第一階段（6 至 10 歲）：教學內容以培養學生心智發展、溝通及生活自理爲主；第二階段（11 至 15 歲）：教學內容以學習工具操作、溝通及人際社交爲主；第三階段（16 至 21 歲）：教學內容以基礎能力訓練及實際工作培訓爲主。

而私立學校所設的特敎班，目前主要有明愛學校，啓聰中心、啓智學校及協同特殊教育學校，茲將其課程理念陳述如下：

一、學前教育（0 至 6 歲）：

1）主要以小組形式進行訓練；

2）課程由學校自行編寫；

3）內容包括認知、自理、語言及肢體活動訓練。

二、小學及中學教育（6 至 21 歲）：

1）主要以學生認知能力分班；

2）內容以認知學習爲主，附設輔導及治療服務；

3）課程以普通教育課本但按個別情況適當適應。

就上述描述，由教育暨青年局表述之有特殊教育需要學生的判定準則如表 3。

**表 3 澳門有特殊教育需要學生的判定準則表**

| | 融合生 | 特教小班學生 | 特教班學生 |
|---|---|---|---|
| 學生狀況 | 身體機能障礙、自閉症、過度活躍症、特殊學習困難 | 長期且持續性的嚴重情緒行爲問題 | 個別課程安排及特別教學環境配合 |
| 學習輔助 | 學習及學校環境給予少量的特別輔助 | 學習上需要較大遷就或輔助 | 個別課程安排及特別教學環境配合 |

＊資料來源:筆者整理。

在學前有特殊教育需要的兒童,已提供全日制、半日制的特殊教育班級及個別訓練之學前特殊教育學校,主要由民間機構開辦,政府支助的形成提供服務,即私立的特殊教育機構及學校;另一方面,政府也逐步開展公立學校的特殊教育步伐,對部分能力稍遜的學生提供特殊教育小班及特殊教育班級(特殊班)。以下分別爲提供特殊教育的私立及公立學校的名稱、服務對象年齡(階段)及教學內容之分類表。

**表 4 私立學校的特殊教育**

| 服務對象年齡 | 設有該程度的學校 | 教學內容 |
|---|---|---|
| 1 歲以上 | 啓聰中心 | 一對一個別教學服務 |
| 0 – 6 歲 | 啓智學校 | 全日制、半日制及一對一個別教學服務 |
| 6 – 21 歲 | 明愛學校 | 全日制特殊教育班,生活應用課程 |
| 由幼稚園至中六(3 歲 – 21 歲) | 協同特殊教育學校 | 全日制特殊教育班,正規教育課程 |

＊資料來源:筆者整理。

**表 5 公立學校的特殊教育**

| 階段 | 設有該程度的學校 | 教學內容 |
|---|---|---|
| 小一至小三 | 北區中葡小學 | 具備全日制特殊教育小班,正規教育課程。 |
| 小四至小六 | 巴波沙中葡小學 | 具備全日制特殊教育小班,正規教育課程。 |
| 中一至中三 | 中葡職業技術學校 | 全日制特殊教育小班,正規教育課程。 |
| | 北區中葡小學 | |
| 第一階段(6 – 10 歲) | (輕度班)、何東中葡小學(中、重度班) | 全日制特殊教育小班,再配合不同的學科學習,包括語文、數學、美術、音樂和體育等。 |

| | | |
|---|---|---|
| | 巴波沙中葡小學 | |
| 第二階段<br>(11－15 歲) | (中、重度班)、<br>氹仔中葡學校<br>(輕度班) | 全日制特殊教育小班,再配合不同的學科學習。 |
| 第三階段<br>(16 歲以上) | 路環中葡學校<br>(輕、中、重度班) | 全日制特殊教育班,未來就業和融入社會之課程爲主。 |

＊資料來源:筆者整理。

綜合上述對澳門特殊教育相關資料之搜集及整理,澳門的特殊教育及融合教育的開展,已有不錯的發展及規模。2015 年 3 月澳門政府對特殊教育政策提出諮詢文本,就《特殊教育制度》的法規向公衆諮詢,而聯合國殘疾人士權利公約也爲澳門特殊教育提供了發展方向。澳門現時不同的特殊教育設置,已能爲不同需要的學生,提供適切的教育安置。政府亦已投入相當的資源開辦特教培訓課程,日後望能爲澳門的特殊教育學士、治療係學士而設立職前培訓課程,加強對特殊教育的專業發展。

**參考文獻:**


阮邦球(2008):澳門特別行政區公共行政,1,81－104(澳門行政暨公職局)。

教育暨青年司(1994):《澳門學校的特徵》(澳門教育暨青年司)。

劉羡冰(2000)著:《澳門教育史》(北京人民教育出版社)。

澳門政府(1995)之第 33/99/M 號法令(澳門政府)。

澳門政府(2006)之第 9/2006 號法律(澳門政府)。

澳門教育暨青年司(1994)之《澳門學校的特徵》(澳門教育暨青年司)。

澳門教育暨青年司(2015)之《教育數字概覽》(澳門教育暨青年司)。

澳門教育暨青年司(2014)之《教育心理輔導暨特殊教育中心》(取自 http://www.dsej.gov.mo/cappee/cappee08/se/se1.html)。

澳門統計暨普查局(2004－2014)之《教育調查》(澳門統計暨普查局)。

聯合國(2006)之《殘疾人權利公約》(聯合國)。

# "密克圓"一題多证巡禮

## — "五點共圓"的典型案例 —

澳門數學教育研究學會　鄭志民

**前國家主席江澤民**,在 1989 年接見我國當年參加國際數學競賽($IMO$) 勝利歸來的金牌獲得者,以及參加 2000 年慶祝澳門回歸祖國一週年慶典,於 2000 年 12 月 20 日到澳門濠江中學視察,接見師生時,都興致勃勃地拋出一道幾何題:**"任意一個五角星的五個三角形的外接圓交於五個點,求证這五個點共圓"**(也即**"五邊形五條邊延長後,兩兩相交成五個三角形,它們的外接圓兩兩相交,除了頂點外有五個交點,此五點共圓"**)(此圓稱爲**"密克($Miguel$) 圓"**,也有的譯爲**"米凱爾圓"** 或**"米庫勒圓"**). 並指出,**"學習幾何能鍛練一個人的思維. 解答數學題,最重要的是培養一個人的鑽研精神"**,對學習幾何,解答數學題的教育價值予以肯定. 很值得每一位關心新世紀我國數學教育改革的同仁們深入思考.

對於這個美妙而又誘人的幾何題,澳門濠江中學數學科組的老師們紛紛披掛上陣. 12 月 23 日結果出來了,濠江中學的四位數學老師分別從不同的角度作出了四種不同的解法,共分兩大類:**楊萬忍**、**鄭志民**和**鄭家秀**三位老師的證法屬**第一類证法,此類证法都是利用圓內接四邊形的判定定理和性質定理,反復進行角的分解、合成和轉化**;劉增榮老師的證法屬**第二類证法,此類证法則注意到欲证共圓的五個點實為"密克($Miguel$) 點"(也有稱之為 $Wallace$ 點),抓住了問題的本質. 劉增榮老師的簡潔证法得到數學專家和數學界同仁的特別欣賞.**

四位數學老師對江主席的**"五點共圓"** 命題作出了解答,大大地鼓舞了濠江中學的師生.

經各大媒體的傳播,消息傳遍了中、港、澳. 國內的老師紛紛致電濠江中學熱熱地祝賀並加以詳細地詢問,**"五點共圓" 問題一時成為中華大地的盛事**!

正如華東師範大學的**數學教育專家,張奠宙教授**在華東師大的數學刊物《數學數學》2004 年第 6 期**"平面幾何的魅力"** 一文中指出的,五角星上某些點共圓的問題早已不在現今的數學教科書中出現了. 繁複而困難的幾何題的證明,一般學生難以學會,也欣賞不了. 但新的**《數學課程標準》**提出,不同的學生應得到不同的數學發展. 將來在高中還要開設《平面幾何》的選修課. 平面幾何的魅力是永存的. 不要求人人做幾何難題,卻必需保持一部分人能夠欣賞平面幾何的魅力. **歐幾裏得《幾何原本》乃是古希臘 500 年的理性思維**

結晶,這份人類精神財富散發的魅力,永遠會被人欣賞.

爲了讓有興趣進一步欣賞和研究這個美妙而又誘人的**“五點共圓”**問題,本文將以**《“密克圓”一題多证巡禮》**爲題來展開**“五點共圓”**的典型案例之**“一題多证”**.

## 一、引子——“五點共圓”相關的“密克($Miguel$)點”定理

### (一)引例——從三圓共點和四圓共點説起

在研究**“密克($Miguel$)點”**定理之前先看看三圓共點和四圓共點的幾個典型例子.

當二圓圓心距離小於二圓半徑之和時,二圓必然相交,而要證明三圓交於一點,我們歸結爲三圓 $C_1$、$C_2$、$C_3$ 共點證法:

(1)$C_1$、$C_2$ 交於 $P$ 點,而 $P$ 在 $C_3$ 上.

(2)$C_1$、$C_2$、$C_3$ 都分别過定點 $P$.

這可從下面所引例題中可以得到印證. 共點圓與共圓點問題的證明方法之間是互相制約、相互聯繫,息息相通,相輔相成. 下面所引例題可供鑒賞!

〔**例 1**〕以三角形三邊爲一邊向外側分别作正三角形,三者的外接圓共點. 此點稱爲**費馬**($P. de Fermat$,**1601—1665,法國)點.**

〔**證明**〕圖 1-1 中,$\triangle ABC'$、$\triangle BCA'$、$\triangle ACB'$ 是 $\triangle ABC$ 外側的三個正三角形. 則 $\angle AB'C = \angle BA'C = \angle AC'B = 60°$,設外接圓 $ABC'$、$BCA'$ 交於 $P$,連 $PA$、$PB$、$PC$,則 $P$、$A$、$C'$、$B$ 四點共圓,$P$、$B$、$A'$、$C$ 四點也共圓, 那麼 $\angle APB + \angle BPC = 120° + 120° = 240°$,這説明 $\angle APC = 120°$,它與四邊形 $APCB'$ 中的對角 $\angle AB'C$ 互補,亦即 $P$ 在 $\triangle ACB'$ 的外接圓上,命題得證.

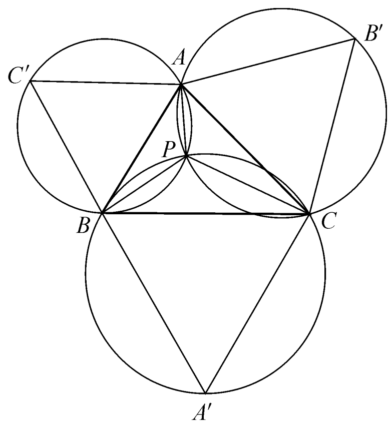


圖1-1

〔**例 2**〕以 $\triangle ABC$ 的邊 $AB$、$AC$ 爲邊,分别在 $\triangle ABC$ 的外部作兩個正方形,又以 $BC$ 邊爲對角線作一正方形,求證:三個正方形的外接圓共點.

〔**分析**〕如圖 1-2 所示,以 $BC$ 邊爲對角線所作正方形的外接圓即以 $BC$ 爲直徑的圓,故只需證明另兩個圓(除交點 $A$ 外的)的另一個交點 $P$ 對 $BC$ 邊所張成直角即可.

〔**證明**〕設以 $AB$、$AC$ 分别爲一邊的正方形的外接圓的交點除點 $A$ 外,還有 $P$ 點. 連 $PA$、$PB$、$PC$,則 $\angle APB = 135°$,$\angle APC = 135°$.($\angle APB$,$\angle APC$ 所

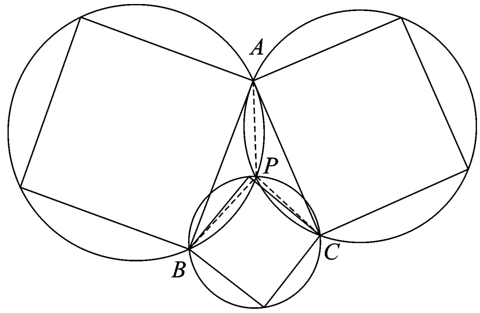


圖1-2

對的弧均爲 $3\times 90°$).

$\therefore \angle BPC = 360° - (135° + 135°) = 90°$;

$\because$ 點 $P$ 在以 $BC$ 爲直徑的圓上,即 $P$ 點在以 $BC$ 爲對角線的正方形的外接圓上.

故三個正方形各自的外接圓共點於 $P$.

〔**例 3**〕已知 $H$ 爲 $\triangle ABC$ 的垂心,$AH$、$BH$、$CH$ 的延長線分別交 $BC$ 於 $H_1$,交 $AC$ 於 $H_2$,交 $AB$ 於 $H_3$,則 $\triangle AH_3H_2$、$\triangle BH_1H_3$、$\triangle CH_2H_1$ 所對應的三個外接圓共點.

〔**證明**〕如圖 1－3 所示,據已知,$H$ 爲 $\triangle ABC$ 的垂心,且 $AH_1\perp BC$ 於 $H_1$,$BH_2\perp AC$ 於 $H_2$,$CH_3\perp AB$ 於 $H_3$.

$\therefore \angle HH_1C = HH_2C = 90°$,$\angle HH_1B = \angle HH_3B = 90°$,$\angle HH_2A = HH_3A = 90°$.

則 $H$、$H_1$、$C$、$H_2$ 四點共圓,$H$、$H_1$、$B$、$H_3$ 四點共圓,$H$、$H_3$、$A$、$H_2$ 四點也共圓,而上述三圓均過 $P$ 點,故 $\triangle AH_3H_2$、$\triangle BH_1H_3$、$\triangle CH_2H_1$ 所對應的三個外接圓共點.

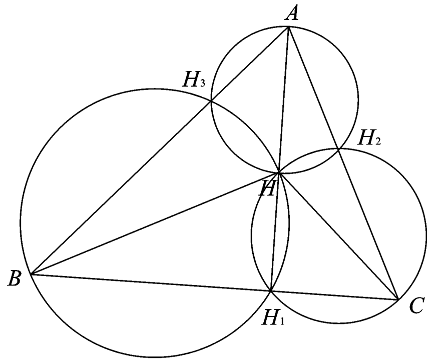


圖1－3

〔**例 4**〕在三角形三邊上各任取一點,分別爲 $X$、$Y$、$Z$. 那麼頂點與兩相鄰邊上所取的點共三點所成三角形分別作外接圓,三圓共點. 此點稱爲**“密克點一”**(數學家密克(*A. Miquel*)在共點圓、共圓點這個課題中屢有創新,建有殊勳,但僅見其姓,名不見經傳,神龍但現其首,令人納罕).

〔**分析**〕在圖 1－4 中,$\triangle ABC$ 三邊上各任取一點,分別爲 $X$、$Y$、$Z$,要證 $\triangle AXZ$、$\triangle BXY$、$\triangle CYZ$ 三個外接圓共點.

如果前二圓共點於 $P$,從 $\angle XPZ + \angle YPZ + \angle XPY = 360°$,$\angle A + \angle XPZ = 180°$,$\angle B + \angle XPY = 180°$,即可得到

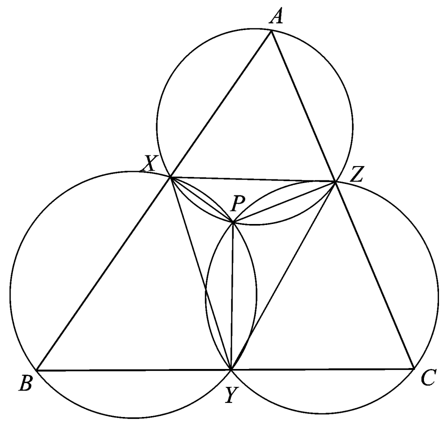


圖1－4

$\angle YPZ = 360° - (180° - \angle A) - (180° - \angle B) = \angle A + \angle B$.

而 $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$,$\therefore \angle YPZ = 180° - \angle C$,即 $\angle YPZ + \angle C = 180°$,

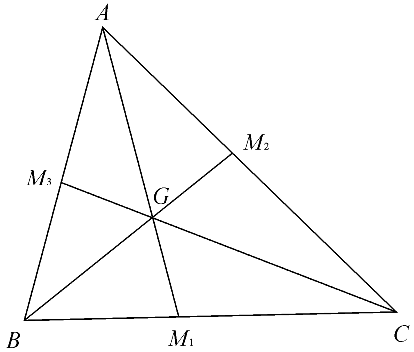
於是 $\angle YPZ$ 與 $\angle C$ 互補,即四邊形 $PYCZ$ 內接於 $\triangle CYZ$ 的外接圓、亦即證明 $\triangle CYZ$ 的外接圓也過 $P$ 點,命題得證. 這個成立的命題稱爲**密克點一定理**.

〔**注**〕由於本命題的正確性被證明,因此可以順利地如圖 1－5(1),1－5(2),1－5(3)及 1－5(4) 得到下述四個命題成立:

其一,$\triangle AM_1M_3$、$\triangle BM_1M_2$、$\triangle CM_2M_3$ 三個外接圓共點;

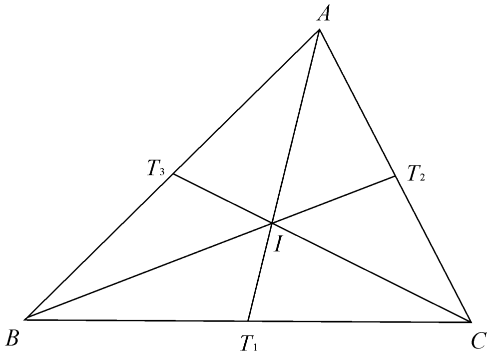
其二,$\triangle AT_1T_3$、$\triangle BT_1T_2$、$\triangle CT_2T_3$ 三個外接圓共點;

(三角形的三條中線)



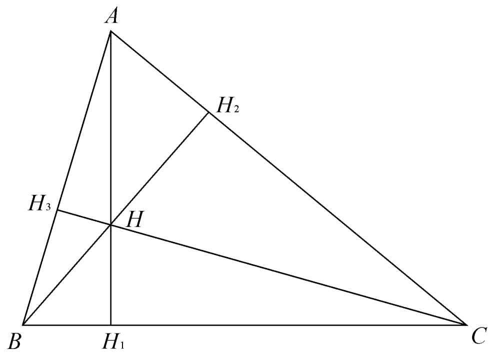

1-5(1)

(三角形的三條角平分線)



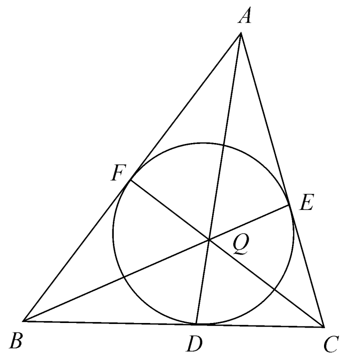

1-5(2)

(三角形的三條高線)




1-5(3)

(三角形的熱爾崗點)




1-5(4)

其三，$\triangle AH_1H_3$、$\triangle BH_1H_2$、$\triangle CH_2H_3$ 三個外接圓共點（見例 3 結論）；

其四，$\triangle BDF$、$\triangle CDE$、$\triangle AEF$ 三個外接圓共點.

〔**注**〕法國數學家**熱爾崗**（*J. D. Gergonne.* 1771 – 1859）發現：三角形有一內切圓，則從頂點到對邊上的切點之連線，三線共點. 此點稱爲三角形的**熱爾崗點**.

〔**例 5**〕內接於圓的四邊形頂點與相鄰邊中點爲頂點形成的三角形外接圓，四圓共點.

〔**證明**〕在圖 1 – 6 中，四邊形 $ABCD$ 內接於圓，設圓心爲 $O$，自 $O$ 向四邊引垂線，垂足 $E$、$F$、$G$、$H$ 就是四邊相應的中點. 那麼 $OE \perp AB$，$OF \perp BC$，$OG \perp CD$，$OH \perp AD$，則 $\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$、$\angle 4$ 依次是 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$、$\angle D$ 的補角. 四組點 $A$、$E$、$O$、$H$；$B$、$F$、$O$、$E$；$C$、$G$、$O$、$F$；$D$、$H$、$O$、$G$ 分別是共圓點. 這四圓都過 $O$. 命題得證.

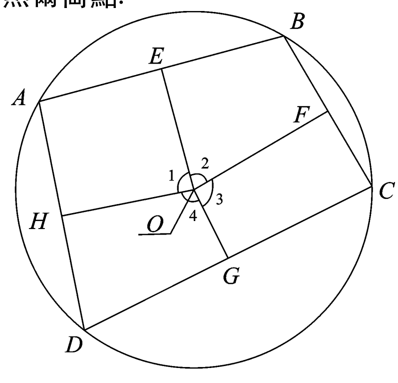



圖1-6

〔**例 6**〕完全四邊形 $AXYCBZ$ 中四個三角形的外接圓四圓共點（此點稱爲**密克點二**，此定理稱爲**密克點二定理**.）且由該點向四直線所作垂線的垂足在一直線上.

〔**分析**〕圖 1 – 7 中，完全四邊形 $AXYCBZ$ 中包含四個三角形：$\triangle XBY$、$\triangle CYZ$、$\triangle ABC$、

$\triangle AXZ$. 它們各有外接圓. 命題的結論是這四個圓共點.

〔**證明**〕首先,在 $\triangle ABC$ 邊 $AB$、$BC$ 上分別取 $X$、$Y$ 兩點,在 $AC$ 延長線上取 $Z$ 點,那麼 $\triangle XBY$、$\triangle CYZ$ 的外接圓除 $Y$ 點外,交於 $P$. 如圖 1－7,連結有關線段,比較有關各角可知:$\angle 1 = \angle 2$,$\angle 3 = \angle 4$,$\angle 5 = \angle 6$(分別是同弧所對的圓周角);$\angle 6 = \angle 7$(對頂角相等). 關鍵是要證 $\triangle AXZ$ 的外接圓是否通過 $P$ 點,回答是肯定的.

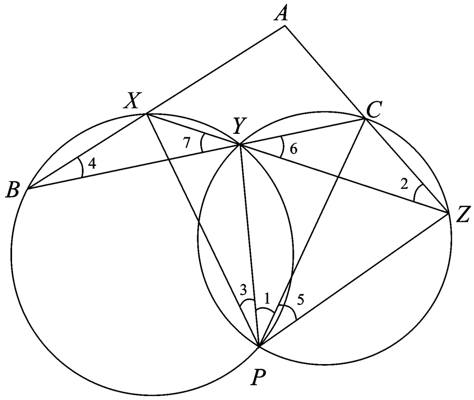



圖1-7

事實上,$\angle 2 + \angle AXZ + \angle A = 180°$,

而 $\angle AXZ = \angle 4 + \angle 7 = \angle 3 + \angle 6$

$= \angle 3 + \angle 5$,

又 $\angle 1 = \angle 2$,

$\therefore$ 四邊形 $AXPZ$ 中一組內對角

$\angle A + \angle XPZ = \angle A + \angle 3 + \angle 1 + \angle 5 = \angle A + \angle 3 + \angle 2 + \angle 5$

$= \angle A + \angle 2 + \angle AXZ = 180°$

$\therefore A$、$X$、$P$、$Z$ 四點共圓.

則 $\triangle AXZ$ 的外接圓過 $P$ 點.

這已證明 $\triangle XBY$、$\triangle CYZ$、$\triangle AXZ$ 的三個外接圓共點.

其次,在 $\triangle AXZ$ 邊 $AZ$,$XZ$ 上分別取 $C$、$Y$ 點,在邊 $AX$ 的延長線上取 $B$ 點. 類似地運用**密克點一**,可證 $\triangle XBY$、$\triangle CYZ$、$\triangle ABC$ 的三個外接圓也共點於 $P$.

綜合上面兩步驟,已證**密克點二定理**爲眞.

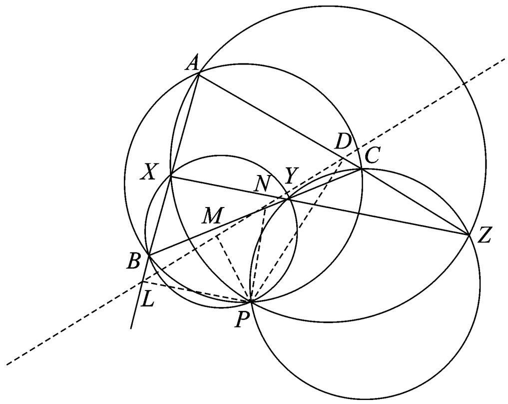



圖1-8

另外,如圖 1－8 所示,設上述四圓共點於 $P$,且 $P$ 至完全四邊形($AXNCBZ$) 四邊 $AB$、$BC$、$XZ$、$AZ$ 所作的垂線之垂線是分別爲 $L$,$M$,$D$ 及 $L$,$N$,$D$;根據摩鬆線定理知,$L$,$M$,$D$ 共線;$L$,$N$,$D$ 也共線. 因此四垂足 $L$,$M$,$N$,$D$ 四點共線.

## (二)"密克($Miguel$) 點"定理

〔**定理**〕兩兩相交的四條直線交成四個三角形,它們的外接圓必同交於一點(此定理稱爲**密克($Miguel$) 點定理**).

〔**证法 1**〕(見上海辭書出版社出版之《數學題解辭典 —— 平面幾何》)

〔**定理**〕已知 $AE$、$AF$、$ED$、$FB$ 四條直線相交於 $A$、$B$、$C$、$D$、$E$、$F$ 六點,構成四個三角形,它們是 $\triangle ABF$、$\triangle AED$、$\triangle BEC$、$\triangle DCF$,求證:這四個三角形的外接圓共點.

〔**分析**〕如圖 1－9 所示,設 $\triangle BEC$ 與 $\triangle DCF$ 的外接圓交點爲 $O$,則只需證明 $\triangle ABF$ 與

$\triangle AED$ 的外接圓也經過點 $O$ 即可.

〔證明〕若 $\triangle BEC$ 與 $\triangle DCF$ 的外接圓交點爲 $O$,連結 $AO$、$BO$、$CO$、$DO$、$EO$、$FO$.

$\because$ $E$、$B$、$C$、$O$ 四點共圓,

$\therefore$ $\angle BEO = \angle OCF$(圓內接四邊形的外角等於內對角).

又 $\because$ $F$、$D$、$C$、$O$ 四點共圓,

$\therefore$ $\angle OCF = \angle ODF$(圓中同弧上的圓周角相等).

$\therefore$ $\angle BEO = \angle ODF$, 故 $E$、$A$、$D$、$O$ 四點共圓, 即 $\triangle AED$ 的外接圓經過點 $O$.

又 $\angle EBO = \angle ECO = \angle AFO$,

$\therefore$ $F$、$A$、$B$、$O$ 四點共圓,即 $\triangle ABF$ 的外接圓也經過點 $O$.

$\therefore$ $\triangle ABF$、$\triangle AED$、$\triangle BCE$、$\triangle DCF$ 的外接圓共點.

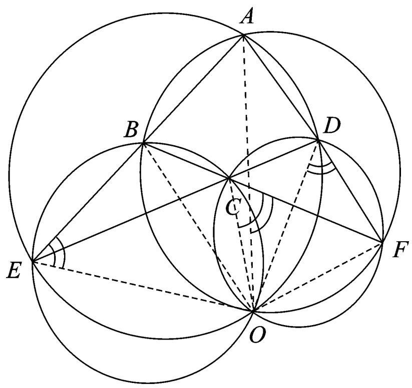



圖1-9

**〔説明〕**(1) 本題中四個三角形的外接圓共點,這個點稱爲密克($A - Miguel$) 點.

(2) 如果本題中的點 $O$ 位在 $EF$ 上,$\because$ $\angle ABC = \angle EOC$,$\angle ADC = \angle COF$,而 $\angle EOC + \angle COF = 180°$,即 $\angle ABC + \angle ADC = 180°$,則四邊形 $ABCD$ 爲圓內接四邊形,則命題的證明更爲簡單.

**〔证法 2〕**(見陳聖德著之《平面幾何一題多證》, 福建人民出版社出版)

如圖 1 - 10 所示,設 $AB$、$AF$、$DF$、$CB$ 四直線交成四個三角形 $\triangle ABC$、$\triangle ADF$、$\triangle BED$、$\triangle CEF$. 今要證明它們的外接圓共點 $P$, 可先作兩個 $\triangle BDE$ 與 $\triangle CEF$ 的外接圓,設其另一交點爲 $P$.

連 $PB$、$PE$、$PC$、$PF$,則 $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$. 故 $C$、$A$、$B$、$P$ 共圓. 也即 $\triangle ABC$ 外接圓也過 $P$.

同理可證,$\triangle ADF$ 的外接圓也過$P$. 故四圓共點$P$.

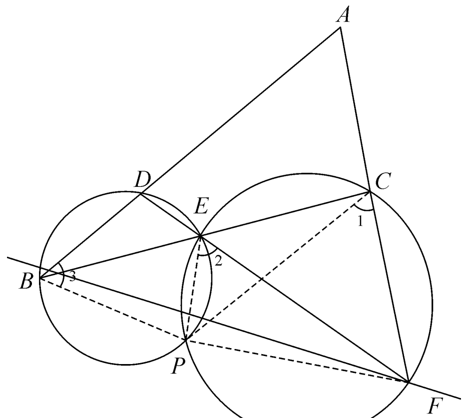



圖1-10

**〔证法 3〕**(見陳聖德著之《平面幾何一題多證》, 福建人民出版社出版) 利用**三角形的垂足線(西摩鬆線) 定理之逆定理**.

如圖 1 - 11 所示,設 $\triangle BED$ 與 $\triangle CEF$ 的外接圓交於$P$. 由$P$引 $\triangle BDE$ 三邊的垂線$PX$、$PY$、$PZ$. 則由西摩鬆線定理知 $X$、$Y$、$Z$ 共線.

其次,引 $PU \perp CF$,則由 $\triangle CEF$ 及其外接圓知, $Y$、$Z$、$U$ 共線.

$\therefore$ $X$、$Y$、$Z$、$U$ 共線.

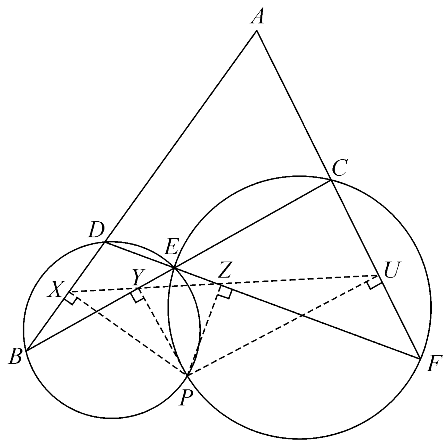



圖1-11

對於 $\triangle ABC$,由於從 $P$ 引三邊的垂線,垂足 $X$、$Y$、$U$ 共線,

故根據西摩鬆線定理的逆定理知,$P$ 在 $\triangle ABC$ 外接圓上.

同理可證 $P$ 在 $\triangle ADF$ 的外接圓上.

故四個三角形的外接圓共點 $P$.

〔**注**〕四直線兩兩相交於六點所成圖形在**近世幾何**中稱爲**"完全四邊形"**,故 $P$ 點稱爲完全四邊形 $ACEDBF$ 的**"密克點"**. 如在 $\triangle ABC$ 三邊 $BC$、$CA$、$AB$ 或其延線上各取一點 $P$、$Q$、$R$,則三個三角形 $ARQ$、$BPR$、$CPQ$ 的外接圓也共點. 這點也稱**"密克點"**,證法類似(可見下述的補充證明).

*〔**證明**〕如圖 1－12 在 $\triangle ABC$ 的兩邊 $AB$、$AC$ 上分別取 $P$、$Q$ 點,而在 $BC$ 延長線上取 $R$ 點. 求證 $\triangle APQ$、$\triangle BPR$、$\triangle CQR$ 的外接圓三圓共點.

今假設兩圓 $APQ$、$CQR$ 交於 $I$,則 $\angle A = \angle PIQ$(圓中同弧上的圓周角相等),$\angle C = \angle QIR$(圓內接四邊形外角等於內對角),這說明:

$\angle A + \angle C = \angle PIQ + \angle QIR = \angle PIR$.

另一方面,假設 $\triangle PAQ$、$\triangle PBR$ 兩個外接圓如交於 $I'$,則

$\angle B = 180° - \angle PI'R$, $\angle PI'R = 180° - \angle B = \angle A + \angle C = \angle PIR$.

道致 $I$、$I'$ 重合,已證三圓共點於 $I$.

對於 $P$、$R$ 分別在 $AB$、$BC$ 延長線上,或 $P$、$Q$、$R$ 分別在 $AB$、$AC$、$BC$ 延長線上,命題也是眞的.

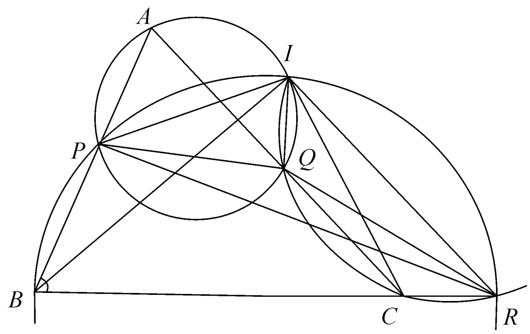


圖1-12

## 二、密克圓定理(五點共圓之典型)的多種证法欣賞

自從濠江中學把濠江中學四位老師對**"五點共圓"**問題的四種不同解法通過澳門中聯辦轉交**前國家主席江澤民**後,便得到**江主席**親切的回信,並寄來參考解法. 之後國內及港澳的學者都對此加以研究,直至 2001 年 6 月(北京學者)周春荔還在北京的《數學通報》中發表研究文章 ——**《從密克圓的證明談起》**.

上海的學者沈康身教授在其巨著**《數學的魅力》(一)(二)**對相關問題作了重要的論述,并介紹了許多與**"五點共圓"**問題相關的豐富內容.

今把**"密克圓"**的**"多種证法"**列舉於下,爲對此有興趣的讀者提供欣賞的資料,並作爲**"密克圓"一題多证的巡禮**!

**命題:任意五角星形的五個三角形的外接圓(除原有交點外)五個交點分別為** $N$、$M$、$K$、$L$、$O$ **五圓.**

〔**证法** 1〕如圖 2－1,命題要證 $N$、$M$、$K$、$L$、$O$ 五點共圓(以下主要用到**"圓周角定理"及其逆,圓內接四邊形的性質定理"圓內接四邊形對角互補"及其逆**).

事實上,① $\angle DCK = 180° - \angle KJF = \angle KJE$(圓內接四邊形對角互補).

② $\angle KJE = \angle KIE$(圓周角定理).

③ $D$、$C$、$K$、$I$ 共圓(由 ①、② 得 $\angle DCK = \angle KIE$,再用"圓內接四邊形對角互補"之逆).

④ 同理 $D$、$C$、$I$、$N$ 共圓,即 $D$、$C$、$K$、$I$、$N$ 五點共圓.

⑤ 由④得 $\angle 1 = \angle 3$(即 $\angle KNI = \angle KCI$),又有 $\angle 3 = \angle 4$,因此 $\angle 1 = \angle 4$(圓周角).

⑥ 與 ①、②、③、④ 同理可證 $A$、$B$、$M$、$J$、$L$ 五點共圓.

⑦ 由⑥得 $\angle 5 = \angle 6$(即 $\angle JBM = \angle JLM$ —— 同爲 $\overset{\frown}{MJ}$ 弧上的圓周角),又有 $\angle 2 = \angle 5$(同弧 $\overset{\frown}{IM}$ 上的圓周角),因此 $\angle 2 = \angle 6$.

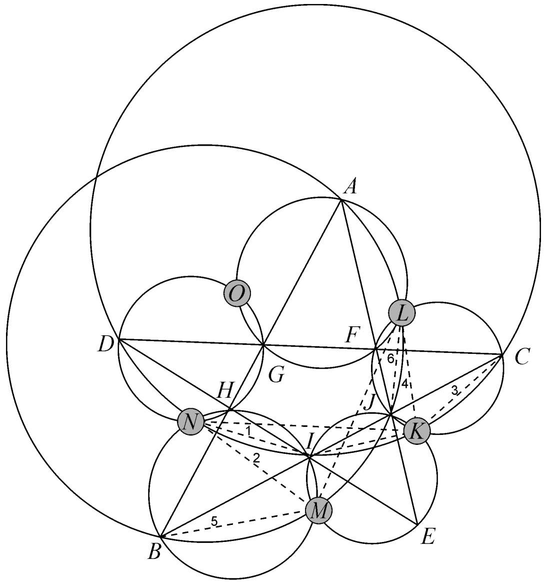



圖2-1

⑧ ⑤ 與 ⑦ 相加:$\angle 1 + \angle 2 = \angle 4 + \angle 6$,即 $\angle KNM = \angle KLM$.

⑨ 由 ⑧ 及圓周角定理之逆知:$N$、$M$、$K$、$L$ 共圓.

⑩ 同理可證:$N$、$M$、$K$、$O$ 共圓,結合 ⑨ 得所要之結論,證畢.

〔**注**〕**前國家主席江澤民在為《院士科普體系》叢書寫序**時看到**"用機器解幾何題"**可證明**"五點共圓"**,運用電腦只用 3.9 秒,即時打電話給身在廣州的中科院院士**張景中教授**,詢問**"五點共圓"**可否有平面幾何證法?上述證法就是張教授關於**"五點共圓"**的參考解法.

〔**证法** 2〕(本證法見澳門濠江中學楊萬忍老師的證法)

〔**命題**〕**任意五角星形的五個三角形的外接圓的五個交點共圓.**

〔**已知**〕如圖,任意五角星形的五個三角形的外接圓分別交於 $A$、$B$、$C$、$D$、$E$ 五點.

〔**求证**〕如圖 2 - 2 所示,$A$、$B$、$C$、$D$、$E$ 五點共圓.

〔**探究**〕若能證其中四點共圓,同理(對稱地)另外也有四點共圓,這兩個四點集有三個點相同(各有一個點不同),則此五點共圓.

連結 $E$、$C$;$E$、$J$,則 $\angle B'BA = \angle JA'A = \angle JEA$.

連結 $G$、$C$,則 $\angle B'BC = \angle B'GC$.

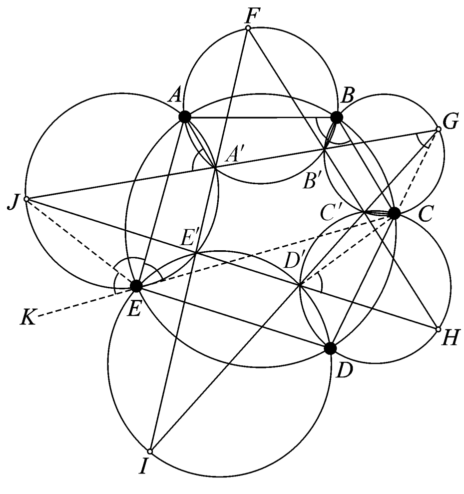



圖2-2

這樣只需證明 $J$、$G$、$C$、$E$ 四點共圓(從而有 $\angle JEK = \angle B'GC = \angle B'BC$,且 $\angle AEC + \angle ABC = \angle AEC + \angle ABB' + \angle B'BC = AEC + \angle AA'J + \angle B'GC = \angle AEC + \angle AEJ + \angle JEK = 180°$,則 $A$、$E$、$C$、$B$ 四點共圓).

連結 $D'$、$C$,則 $\angle B'GC = \angle CC'H = \angle CD'H$.

$\therefore$ $J$、$D'$、$C$、$G$ 四點共圓.

同理(對稱地)$J$、$E$、$D'$、$G$ 四點共圓.

即 $J$、$G$、$C$、$E$ 四點共圓.

綜上所述,命題得證.

〔**點評**〕**“切入點”**—— 證四點共圓.

**“關鍵點”**—— 角的變換.

〔**證明**〕連結 $C$、$E$ 延長至 $K$;連結 $E$、$J$.

$\because$ $A, A', B', B$ 四點共圓,$\therefore$ $\angle B'BA = \angle AA'J$.

又 $\because$ $A, A', E, J$ 四點共圓,$\therefore$ $\angle AA'J = \angle AEJ$.

則 $\angle AEJ = \angle B'BA$.

連結 $C$、$G$;$C$、$D'$,

$\because$ $B', B, G, C$ 四點共圓,$\therefore$ $\angle B'BC = \angle B'GC$.

又 $\because$ $B', G, C, C'$ 四點共圓,$\therefore$ $\angle B'BC = \angle CC'H$.

而 $C, D', D, H$ 四點共圓,$\therefore$ $\angle CC'H = \angle CD'H$.

則 $\angle CD'H = \angle JGC$.

$\therefore$ $J, D', C, G$ 四點共圓.

同理(對稱地)$J, E, D', G$ 四點共圓.

即 $J$、$E$、$C$、$G$ 四點共圓.

從而有 $\angle JEK = \angle B'GC = \angle B'BC$.

又 $\angle JEK + \angle AEJ + \angle AEC = 180°$,$\therefore$ $\angle AEC + \angle ABC = 180°$.

$\therefore$ $A$、$E$、$C$、$B$ 四點共圓.

同理(對稱地)$A, D, C, B$ 四點共圓.

$\therefore$ $A, B, C, D, E$ 五點共圓.

〔**证法 3**〕(本證法見澳門濠江中學鄭志民老師的證法)

〔**命題**〕**任意五角星形的五個(小)三角形的外接圓(在星形外)的五個交點共圓.**

〔**已知**〕如圖 2-3,任意五角星形的五個小三角形的外接圓分別交於星形外的五個點 $M, N, P, Q, R$.

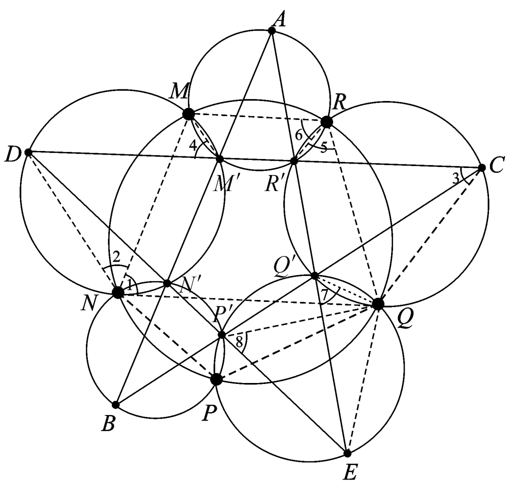


圖2-3

〔**求证**〕$M, N, P, Q, R$ 五點共圓.

〔**證明**〕連結 $MN, NP, PQ, QR, RM$. 又連結 $CQ, QQ', P'Q$.

由 $Q', Q, C, R'$ 四點共圓知:

$\angle 7 = \angle 3(\angle EQ'Q = \angle QCR')$.

再連結 $EQ$,

由 $P', E, Q, Q'$ 四點共圓知:

$\angle 8 = \angle 7(\angle EP'Q = \angle EQ'Q)$,

$\therefore \angle 8 = \angle 3$.

$\therefore D, P', Q, C$ 四點共圓.

同理 $D, N, P', C$ 四點共圓.

$\therefore D, N, Q, C$ 四點共圓(此圓爲 $\triangle DP'C$ 的外接圓).

連結 $DN, NQ$,則

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$.

連結 $RR', MM'$.

由 $M, M', N, D$ 四點共圓及 $M, M', R', R$ 四點共圓知:

$\angle 2 = \angle 4$ 及 $\angle 4 = \angle 6$.

$\therefore \angle 2 = \angle 6(\angle DNM = \angle MRR')$.

由 $Q, C, R, R'$ 四點共圓知:

$\angle 3 = \angle 5(\angle R'CQ = \angle R'RQ)$.

$\therefore \angle 1 + \angle 6 \angle + 5 = 180°$,

即 $\angle MNQ + \angle MRQ = 180°$.

$\therefore M, N, Q, R$ 四點共圓.

同理可證 $M, P, Q, R$ 四點共圓.

$\therefore M, N, P, Q, R$ 五點共圓.

〔**证法** 4〕(本證法見澳門濠江中學劉增榮老師的證法)

**〔命題〕任意五角星形的五個小三角形的外接圓輪迴相交於星形外的五個點,這五個點共圓.**

爲了證明定理,我們需要引用下面兩個引理.

〔**引理** 1〕四條直線交成四個三角形,它們的外接圓共點.

〔**引理** 2〕設定直線上有四點,通過其第一第二兩點,第二第三兩點,第三第四兩點,第四第一兩點各作一圓,輪迴相交,則所得的四個第二交點共圓或共線.

以上兩個引理分別見於樑紹鴻《初等數學復習及研究(平面幾何)》第 198、196 頁(人民教育出版社 1958 年初版).

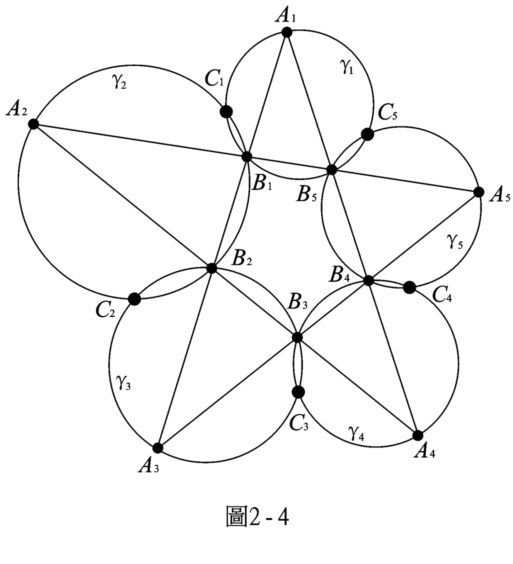



圖2-4

〔**定理的證明**〕如圖 2-4,欲證 $C_1, C_2, C_3$,

$C_4$, $C_5$ 五點共圓,只須證其中任意四點共圓,下面來證 $C_1$, $C_2$, $C_3$, $C_4$ 四點共圓.

記過 $A_k$ 的外接圓爲 $\gamma_k(k = 1,2,3,4,5)$. 應用引理1到四條直線 $A_2A_4$, $A_2A_5$, $A_1A_4$, $A_3A_5$ 交成的四個三角形,知 $C_4$, $B_5$, $A_2$, $A_4$ 四點共圓.

同理 $C_4$, $C_1$, $A_2$, $A_4$ 四點共圓,記此圓爲 $\gamma$.

考察共線的四點 $A_2$, $B_2$, $B_3$, $A_4$. 因爲過 $A_2$、$B_2$ 的圓 $\gamma_2$,過 $B_2$、$B_3$ 的圓 $\gamma_3$,過 $B_3$、$A_4$ 的圓 $\gamma_4$,以及過 $A_4$、$A_2$ 的圓 $\gamma_1$ 這四個圓輪迴相交,由引理2可知,依次得到的四個第二交點 $C_2$, $C_3$, $C_4$, $C_1$ 共圓.

由此可知諸 $C_k$ 中任意四點共圓. 定理證畢.

〔证法5〕(本證法見澳門濠江中學鄭家秀老師的證法)

**〔命題〕任意一個五角星形的五個三角形的外接圓交於星形外的五點,求证這五點共圓.**

**〔已知〕**如圖2-5,$PQRTSP$ 爲任意五角星形,$\odot O_1$、$\odot O_2$、$\odot O_3$、$\odot O_4$、$\odot O_5$ 分別爲其五個三角形 $\triangle PA_1B_1$、$\triangle TB_1C_1$、$\triangle QC_1D_1$、$\triangle SD_1E_1$、$\triangle RE_1A_1$ 的外接圓. 除 $A_1$、$B_1$、$C_1$、$D_1$、$E_1$ 外,它們依次相交於 $A$、$B$、$C$、$D$、$E$ 五點.

**〔求证〕**$A$、$B$、$C$、$D$、$E$ 五點共圓.

**〔思路〕**循環運用圓內接四邊形的充要條件:

(1) 凸的內接四邊形,任一外角等於內對角;

(2) 折(凹)的內接四邊形,"對角相等"—— 即同弧上的圓周角相等,並巧用模擬法.

**〔證明〕**在 $\odot O_1$ 中,$A$、$A_1$、$B_1$、$B$ 四點共圓,於是 $\angle 1 = \angle 2$.

在 $\odot O_2$ 中,$B$、$B_1$、$C$、$T$ 四點共圓,

於是 $\angle 4 = \angle 5$,且 $\angle 2 = \angle 3$,

$\therefore \angle 1 = \angle 3$　　(*)

又 $B$、$B_1$ $C_1$、、$C$ 四點共圓,

$\therefore \angle 6 = \angle 4$(圓內接四邊形的外角等於內對角).

$\therefore \angle 6 = \angle 5$.

在 $\odot O_3$ 中,連結 $CD_1$.

$\because C_1$、$C$、$D_1$、$Q$ 四點共圓,

$\therefore \angle 7 = \angle 6$,則 $\angle 7 = \angle 5$,

從而可知 $T$、$C$、$D_1$、$R$ 四點共圓.

同理可證 $D_1$、$E$、$R$、$T$ 四點共圓.

$\therefore$ $T$、$C$、$D_1$、$E$、$R$ 五點共圓.

於是又可得 $T$、$C$、$E$、$R$ 四點共圓,

則 $\angle\beta = \angle\gamma$(即 $\angle A_1RE = \angle TCS$).

在 $\odot O_5$ 中,$A$、$A_1$、$E$、$R$ 四點共圓,

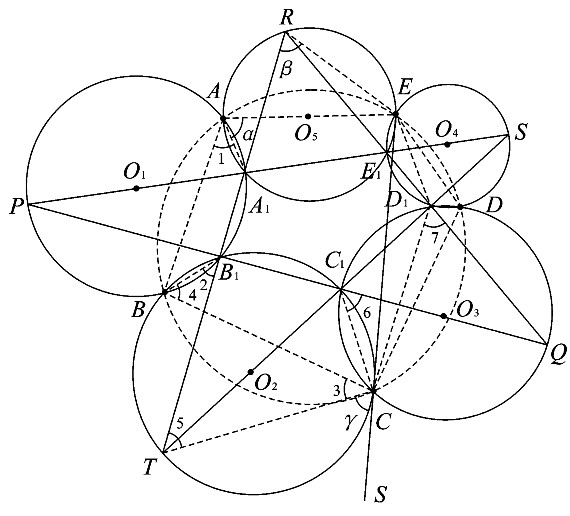


圖2-5

則 $\angle\alpha = \angle\beta$(即 $\angle A_1AE = \angle A_1RE$).

$\therefore\ \angle\alpha = \angle\gamma$(即 $\angle A_1AE = \angle TCS$).　　(＊＊)

由(＊)、(＊＊)可得

$\angle 1 + \angle\alpha = \angle 3 + \angle\gamma$.

即 $\angle BCS = \angle BAE$.

$\therefore$ $A$、$B$、$C$、$E$ 四點共圓.

類似地可證明 $A$、$B$、$C$、$D$ 四點共圓.

$\therefore$ $A$、$B$、$C$、$D$、$E$ 五點共圓.

〔**证法 6**〕〔本證法見陳聖德著之《平面幾何一題多證》〕〔陳聖德(已故)係本文作者的恩師——原福建師範學院(現福建師範大學)數學係的副教授〕

**〔命題〕證明密克(*Miquel*)圓定理:延長五邊形 *ABCDE* 各邊,在外部構成五個三角形. 諸三角形的外接圓的另外五個交點共圓.**

〔**證明**〕如圖 2 - 6 所示,設五邊形爲 $ABCDE$,延長各邊在外部成五個三角形 $\triangle ABG$,$\triangle BCH$,$\triangle CDK$,$\triangle DEL$,$\triangle AEF$,它們的外接圓的另外五個交點爲 $P$、$Q$、$R$、$S$、$T$. 先證其中四點共圓. 同理可證另一點在這圓上.

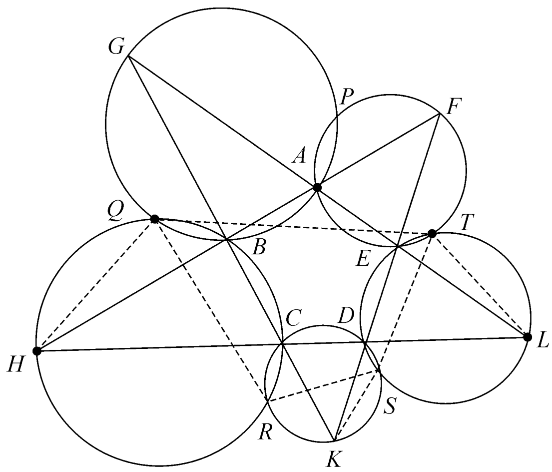



圖2 - 6

據上述的**密克點定理**知,完全四邊形 $LABCGH$ 四個三角形 $\triangle ABG$、$\triangle BCH$、$\triangle AHL$、$\triangle CGL$ 的外接圓交於一點 $Q$. 同樣,三角形 $\triangle AEF$、$\triangle EDL$、$\triangle AHL$、$\triangle DHF$ 的外接圓交於一點 $T$. 故 $H$、$Q$、$A$、$T$、$L$ 五點共圓(其中 $\triangle AHL$ 的三頂點 $A$、$H$、$L$ 配 $Q$ 或 $T$ 共四點都共圓).

$\therefore\ \angle QHC + \angle QTS + \angle STL = \angle QHC + \angle QTL = \angle QHL + \angle QTL = 2Rt\angle$(圓內接四邊形的對角互補).

又 $\angle QHC = \angle QRC$,$\angle STL = \angle SDL = \angle CRS$,

則 $\angle QRC + \angle CRS + \angle QTS = \angle QHL + \angle STL + \angle QTS = \angle QHL + \angle QTL = 2Rt\angle$,

$\therefore\ QRS + \angle QTS = 2Rt\angle$. $\therefore$ $Q$、$R$、$S$、$T$ 共圓.

同理可證 $P$、$Q$、$R$、$T$ 也共圓. 這兩個圓有三個公共點 $Q$、$R$、$T$. 故五點 $P$、$Q$、$R$、$S$、$T$ 共圓.

〔**证法 7**〕(本題出處見〔**证法 6**〕的說明)

**〔命題〕證明密克(*Miquel*)圓定理:延長五邊形 *ABCDE* 各邊,在外部構成五個三角形. 諸三角形的外接圓的另外五個交點共圓.**

〔**證明**〕如圖 2 - 7 所示,根據上述的完全四邊形"**密克點定理**",可知 $\triangle ABF$,$\triangle BCG$ 和

$\triangle FIC$ 的外接圓共點於 $L$,故 $I$、$F$、$L$、$C$ 共圓.

同樣可知三個三角形 $\triangle DCH$、$\triangle DEI$、$\triangle FIC$ 的外接圓共點 $M$.

故 $F$、$C$、$M$、$I$ 共圓.

連結 $KA$,$IM$ 並延長相交於 $N$,

則 $\angle IFL = \angle NML$.

又 $\angle AKL = \angle AFL = \angle IFL$,

$\therefore \angle AKL = \angle NML$.

$\therefore K$、$L$、$N$、$M$ 共圓.

又 $E$、$M$、$K$ 在 $\triangle AIN$(或延長線上)的各邊上,

故 $\triangle KAE$、$\triangle EIM$、$\triangle KMN$ 三外接圓共點 $S$(見二(二)中〔證法3〕之〔注〕).

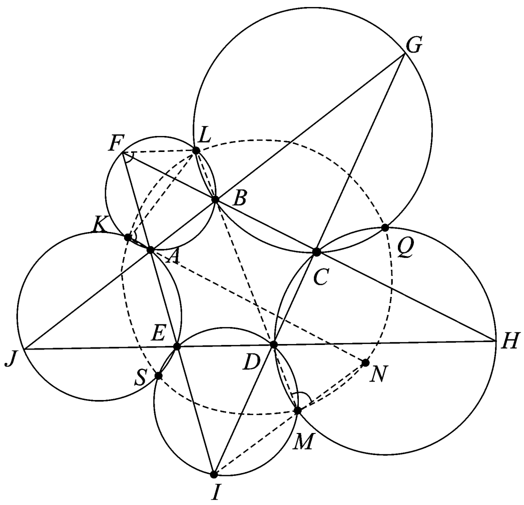


圖2-7

因此,從 $K$、$L$、$N$、$M$ 共圓,得 $K$、$L$、$M$、$S$ 共圓. 同樣 $K$、$L$、$M$、$Q$ 共圓.

故五點 $K$、$L$、$M$、$Q$、$S$ 共圓.

〔证法 8〕(本題出處見〔證法 6〕的說明)

**〔命題〕證明密克(*Miquel*)圓定理:延長五邊形 *ABCDE* 各邊,在外部構成五個三角形.諸三角形的外接圓的另外五個交點共圓.**

〔**證明**〕如圖 2-8 所示,設延長五邊形 $ABCDE$ 各邊在外部成五個三角形 $ABF$、$BCG$、$CDH$、$DEK$、$EAL$. 諸三角表的外接圓再交於五點 $A'$、$B'$、$C'$、$D'$、$E'$. 今要證明這五點共圓,先證明其中四點共圓. 同理可證另一點在這圓上.

作 $\triangle FCK$ 的外接圓,則其必通過 $D'$. 理由如下:

因 $E$、$K$、$D'$、$D$ 共圓,故 $\angle EKD' = \angle HDD'$.　(1)

因 $H$、$C$、$D$、$D'$ 共圓,故 $\angle HDD' = \angle HCD'$.

從而結合(1),可得 $\angle EKD' = \angle HCD'$.

則四邊形 $FKD'C$ 內接於一個圓.

同樣圓 $FCK$ 通過 $B'$.

再證明 $A'$、$B'$、$D'$、$E'$ 共圓.

因 $E$、$E'$、$K$、$D'$ 共圓,故

$\angle EE'D' = \angle EKD'$.　(2)

但上面已證 $F$、$K$、$D'$、$C$、$B'$ 共圓,則

$\angle FKD' = \angle D'B'M$,$M$ 爲 $FB'$ 延線上的點. 從(2)可得

$\angle EE'D' = \angle D'B'M$.　(3)

又 $A$、$E'$、$L$、$A'$ 共圓,

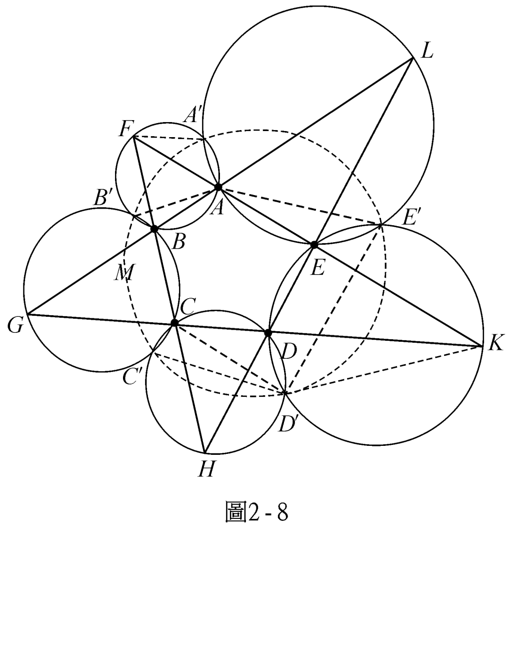


圖2-8

故 $\angle A'E'E = \angle A'AF = A'B'F$.　　(4)

從(3)、(4) 可得 $\angle A'E'D' + A'B'D' = 2Rt\angle$.

$\therefore A'$、$B'$、$D'$、$E'$ 共圓. 同樣 $A'$、$B'$、$C'$、$E'$ 也共圓.

$\therefore$ 五點 $A'$、$B'$、$C'$、$D'$、$E'$ 共圓.

〔**注**〕這五點所共的圓稱爲**"五邊形的密克圓"**.

〔**证法** 9〕(本題證法選自沈康身所著之**《數學的魅力(一)》**)

**〔定理〕五邊形五條邊延長,兩兩相交形成五個三角形. 它們的外接圓兩兩相交. 除了頂點以外有五個交點,此五點共圓(此圓稱為"密克圓").**

〔**證明**〕如圖 2 - 9,注意到在四邊形 $SLGC$ 中,$\angle KCS = \angle KDS = \angle SLE$(即 $\angle SLG$)(圓內接四邊形中外角等於內對角),這道致延長五邊形各邊後的四點 $G$、$C$、$S$、$L$ 共圓. 而由於上述同一理由,在四邊形邊 $QCLG$ 中,也有 $\angle LGQ$(即 $\angle AGQ$) $= \angle QBH = \angle QCH$,

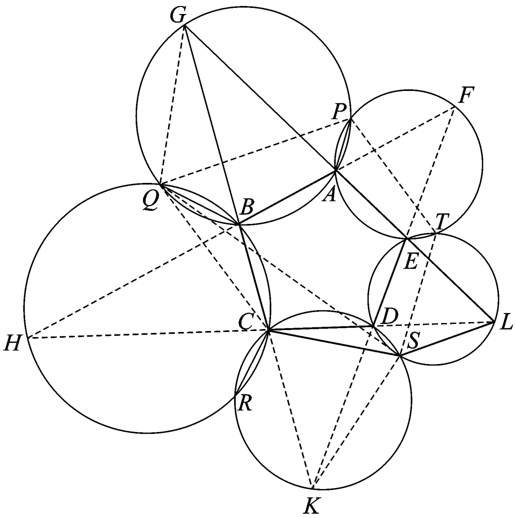



圖2 - 9

這說明 $Q$ 點也在圓 $SLGC$ 上. 於是 $G$、$Q$、$S$、$L$ 四點共圓. 這又道致 $\angle GQS + \angle GLS = 180°$.

再注意到 $\angle GQP + \angle PQS = \angle GQS$,

而 $\angle ETP = \angle PAG$(圓內接四邊形中,外角等於內對角)

$= \angle GQP$(同圓中同弧上所對的圓周角相等).

又 $\angle ETS = \angle ELS = \angle GLS$(同圓中同弧上所對的圓周角相等).

再比較四邊形 $PQST$ 和 $GQSL$. 後者有一組內對角.

即 $\angle GQP + \angle PQS + \angle GLS = 180°$,之和 $\angle GQS + \angle GLS = 180°$,

已證其中 $\angle GQP = \angle ETP$,$\angle GLS = \angle ETS$.

則有 $\angle PTS + \angle PQS = \angle ETP + \angle ETS + \angle PQS = 180°$,

而 $\angle PTS$、$\angle PQS$ 是前者一組內對角,因此四邊形 $PQST$ 內接於一個圓.

同理可證四邊形 $PQRS$ 也內接於一個圓. 由於兩圓有三點 $P$、$Q$、$S$ 是相同點,故而 $P$、$Q$、$R$、$S$、$T$ 五點共圓.

* 沈康身在他的巨著**《數學的魅力(一)》**中指出,已有多種推道方法證明這一命題. 上述的〔**证法** 9〕和下述的〔**证法** 10〕所提供了兩種證法. 〔**证法** 9〕的特點是"視野" 寬廣. 證題視點時而局外一隅,時而跨越數圓. 推道思路一波三折,合後又分,分後又合. 誠是鍛煉思維的幾何題解題典型. 它所依據的理論卻很簡單:一再引用**"同圓內同弧所對圓周角相等","圓內接四邊形的外角等於內對角" 及其逆定理**以及**"圓內接四邊形一組內對角和是 180°" 及其逆定理**而已. 該證明直接就事論事,證明就成爲**"著名難題"**,直到2001 年《數

學通報》還在發表專題文章探討**"密克圓"**的證明.〔**证法9**〕是前國家主席**江澤民**視察澳門濠江中學提出**"五點共圓"**幾何題後,我國學者對命題推道的研究成果(但〔**证法 9**〕並未提及**"密克點"**及**"密克點定理"**).

〔**证法** 10〕如圖 2 - 10,這裏有兩個完全四邊形 $LABCGH$ 和 $HAEDFL$.

在完全四邊形 $LABCGH$ 中,$\triangle ABG$、$\triangle BCH$、$\triangle AHL$ 的三個外接圓共點(**"密克點二"**)於 $Q$. 也就是說 $H$、$Q$、$A$、$L$ 四點共圓.

在完全四邊形 $HAEDFL$ 中 $\triangle AEF$、$\triangle DEL$、$\triangle AHL$ 三個外接圓共點於 $T$. 這又說明 $A$、$H$、$L$、$T$ 四點.

綜合而說,$H$、$Q$、$A$、$T$、$L$ 共圓,則 $Q$、$H$、$L$、$T$ 四點共圓,那麼 $\angle QHC + \angle QTS + \angle STL = \angle QHC + \angle QTL = 180°$,其中 $\angle QHC = \angle QRC$,$\angle STL = \angle SDL = \angle SRC$. 於是 $\angle QRC + \angle SRC + \angle QTS = 180°$,這說明 $Q$、$R$、$S$、$T$ 共圓. 同理可證 $P$、$Q$、$R$、$S$ 共圓. 兩圓中有三點相同,則證得 $P$、$Q$、$R$、$S$、$T$ 五點共圓.

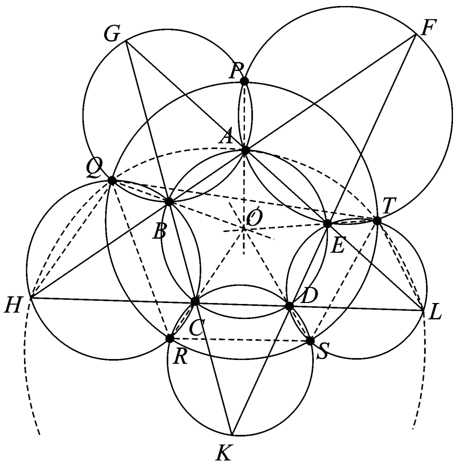


圖2-10

*〔**注**〕此證法從共點圓定理出發論證共圓點問題. 過程簡明可愛,說理也周到.(此證法見沈康身所著之《**數學的魅力(一)**》).

〔**证法** 11〕(本證法見沈康身所著之《**數學的魅力(二)**》,作者引用密克原著《幾何定理》(法文)之文獻)

〔**定理**〕取任一五邊形 $ABCDE$(圖 2 - 11(1)),延長各邊,兩兩分別交於 $I$、$K$、$F$、$G$、$H$,五個三角形 $\triangle IAB$、$\triangle KBC$、… 各自外接圓相鄰二圓交點 $P$、$Q$、$M$、$N$、$R$ 五點共圓.

〔**證明**〕如圖 2 - 11(1) 所示,命題要求點 $N$、$Q$ 在過點 $P$、$M$、$R$ 的圓上. 我們來證 $N$ 在圓 $PMR$ 上. 爲達到要求,我們先作 $\triangle ICG$ 的外接圓. 考慮兩個完全四邊形 $GABCIK$、$ICDEFG$,就可以從密克點二定理判斷:點 $P$、$M$ 在圓 $ICG$ 上.

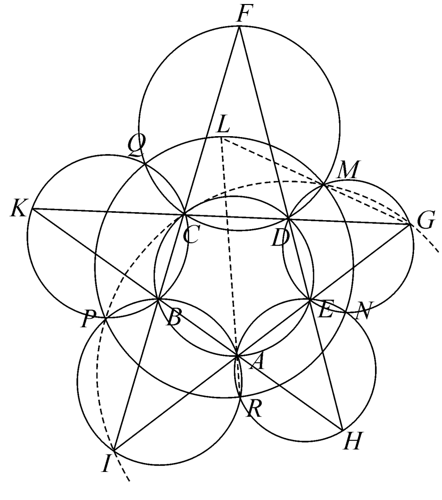


圖2-11(1)

注意到三圓 $PMG$、$PMR$、$PAR$ 共點於 $P$,而直線 $IAG$ 所經三點:$I$ 是圓 $PMG$、$PAR$ 的交點,$A$ 是直線與圓 $PAR$ 的交點,$G$ 是直線與圓 $PMG$ 的交點. 連 $AR$、$GM$,則從(定理 1)之(推論 1)獲知兩直線交點 $L$ 在圓 $PMR$ 上.

最後道致點 $R$、$M$、$E$ 分別在 $\triangle ALG$ 三邊上,那麼又從(定理 1)之(推論 2)獲知三圓 $ARE$、$LRM$、$GME$ 三圓共點(於 $N$). 這就是說,圓 $PMR$ 經過兩圓 $HAE$、$GED$ 的交點 $N$.

我們可以用同樣的步驟證明圓 $PMR$ 經過 $Q$. 這便證明了 $P$、$Q$、$M$、$N$、$R$ 五點共圓.

〔**譯註**〕在推道過程中密氏從(定理2)、(定理1)、(推論1)、(推論2)簡練地證明了命題.

上面提及的(定理1)及(定理2)之(推論1)和(推論2)是指下述的定理和推論:

〔**定理**1〕在三角形三邊上各取一點,那麼頂點與兩相鄰上所取的點,三點所成的三角形分別作外接圓,三圓共點,此點稱爲密克(*A. Miguel*)點一.

〔**定理**2〕完全四邊形中四個三角形的外接圓四圓共點. 此點稱爲密克(*A. Miguel*)點二.

**密克點定理的推論**

**(共圓點)**

〔**推論**1〕在**密克點二定理**中完全四邊形四個三角形外接圓圓心四點共圓.

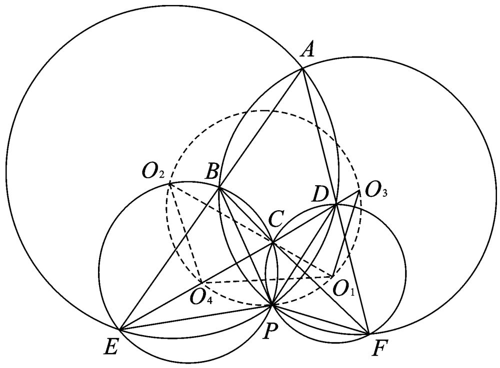


圖2-11(2)

〔**證明**〕在圖2 - 11(2)中,已知完全四邊形 $ABCDEF$ 四個三角形 $\triangle CDF$、$\triangle ADE$、$\triangle ABF$、$\triangle BCE$ 的外接圓圓心依次記爲 $O_1$、$O_2$、$O_3$、$O_4$,我們將證明這四個點共圓.

我們知道,$EP$ 是 $\odot O_2$ 與 $\odot O_4$ 的公共弦,因此有 $EP \perp O_2O_4$,同理也有 $PD \perp O_1O_2$(因爲 $PD$ 是 $\odot O_2$ 與 $\odot O_1$ 的公共弦.

則 $\angle O_4O_2O_1 + \angle EPD = 180°$(兩組對邊分別互相垂直的兩個角互補).

又 $\because \angle A + \angle EPD = 180°$($\odot O_2$ 的內接四邊形 $AEPD$ 的對角互補).

$\therefore \angle O_4O_2O_1 = \angle A$(等量代換).

類似的,$FP$、$PB$ 分別是 $\odot O_1$ 與 $\odot O_3$ 及 $\odot O_3$ 與 $\odot O_4$ 的公共弦,因此有 $O_1O_3 \perp FP$,$O_3O_4 \perp PB$.

則 $\angle O_4O_3O_1 + \angle BPF = 180°$(兩組對邊分別互相垂直的兩個角互補).

又 $\because \angle A + \angle BPF = 180°$($\odot O_1$ 的內接四邊形 $ABPF$ 的對角互補).

$\therefore \angle O_4O_3O_1 = \angle A$(等量代換).

故 $\angle O_4O_3O_1 = \angle O_4O_2O_1$(等量代換).

於是 $O_4$、$O_3$、$O_2$、$O_1$ 四點共圓(**"定理:同圓中同弧上的圓周角相等"之逆定理**).

**(共點圓)**

〔**推論**2〕在本小節共圓點推論(圖2 - 11(2))中,圓 $CDF$、$AED$、$ABF$、$BEC$ 四圓共點,四圓圓心四點共圓,而且此圓($O_1O_2O_3O_4$—— 它經過 $P$ 點)與前四圓五圓共點. 這是我們所知的孤例.

〔**證明**〕在圖2 - 11(2)中,圓 $BEC$、$CDF$ 交於 $C$、$P$,由於 $O_1O_4 \perp CP$,故連線 $O_1O_4$ 等分 $\overset{\frown}{CP}$,於是我們有 $\angle CEP = \angle O_1O_4P$. 且 $\angle CDP = \angle O_4O_1P$,則 $\angle O_4PO_1 = \angle EPD = 180° - \angle A = 180° - \angle O_4O_2O_1$,從而四邊形 $O_4PO_1O_2$ 內接於圓 $O_1O_2O_4$,說明 $P$ 在圓 $O_1O_3O_2O_4$ 上,由推論1的結論知,$O_1$,$O_2$,$O_3$,$O_4$ 四點共圓. 道致五圓共點於 $P$,命題得證.

〔**注**〕〔定理 1〕、〔定理 2〕、〔推論 1〕、〔推論 2〕分别見於沈康身所著之《數學的魅力(一)》之 $P142$(例4)、$P143*1.2$ 四圓共點之例及 $P163*3.7$ 密克點定理的推論(包括共圓點的推論和共點圓的推論).

〔**证法** 12〕(本證法選自日本《幾何學辭典 —— 問題解法》)

〔**定理**〕延長五邊形 $ABCDE$ 的各邊,在其外部得出五個三角形 $FAB$、$GBC$、$HCD$、$KDE$、$LEA$,則這五個三角形的外接圓的五個交點 $A'$、$B'$、$C'$、$D'$、$E'$ 在同一圓周上〔**密克**($A.$ $Miguel$)**圓定理**〕.

〔**證明**〕如圖 2 - 12 所示,首先證明 $\triangle FCK$ 的外接圓經過 $B'$、$D'$.

事實上,$\because$ $E$、$K$、$D'$、$D$ 共圓,

$\therefore \angle EKD' = \angle HDD'$. ——①

但是 $H$、$C$、$D$、$D'$ 是共圓的,若連結 $CD'$,則

$\angle HDD' = \angle HCD'$. ——②

由 ①、② 得,$\angle EKD' = \angle HCD'$.

因此四邊形 $FKD'C$ 是圓內接四邊形.

故 $\triangle FCK$ 的外接圓經過 $D'$.

同理 $\triangle FCK$ 的外接圓也經過點 $B'$.

則 $F$、$B'$、$C$、$D'$、$K$ 五點共圓.

其次,證 $A'$、$B'$、$D'$、$E'$ 共圓.

事實上,因 $E$、$E'$、$K$、$D'$ 共圓,所以

$\angle EE'D' = \angle EKD'$. ——③

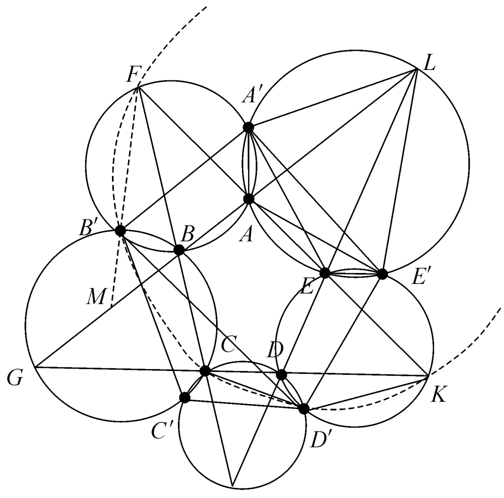



圖2 - 12

但是由於上面證明了 $F$、$B'$、$C$、$D'$、$K$ 共圓,所以若連接 $D'B'$,則可知

$\angle FKD' = \angle D'B'M$. ——④

由 ③、④ 得,

$\angle EE'D' = \angle D'B'M$. ——⑤

又因 $A$、$E'$、$L$、共圓及 $A'$、$A$、$E$、$L$ 四點也共圓,所以

$\angle A'E'E = \angle ALE = \angle A'AF = \angle A'B'F$. ——⑥

由 ⑤、⑥,得

$$\angle A'E'D' + \angle A'B'D' = \angle AE'E + \angle EE'D + \angle A'B'D$$
$$= \angle A'B'F + \angle D'B'M + \angle A'B'D' = 2\angle R,$$

因此 $A'$、$B'$、$D'$、$E'$ 共圓.

同理 $A'$、$B'$、$C'$、$E'$ 也共圓.

故 $A'$、$B'$、$C'$、$D'$、$E'$ 五個點共圓.

〔**证法** 13〕(本證法選自日本《幾何學辭典 —— 問題解法》)

〔**預備定理**〕將五邊形 $ABCDE$ 的各邊長相交,得到星形的頂點如圖 2 - 13 中的 $F$、$G$、$H$、

$I$、$J$,設 $\triangle ABF$ 與 $\triangle AEJ$ 外接圓的交點爲 $K$,$\triangle ABF$ 與 $\triangle GBC$ 外接圓的交點爲 $L$,$\triangle EDI$ 與 $\triangle CDH$ 外接圓的交點爲 $M$,$KA$ 的延長線與 $IM$ 的延長線之交點爲 $N$,則 $K$、$L$、$N$、$M$ 共圓.

〔**證明**〕如圖 2 - 13 在完全四邊形 $AICBFG$ 中,$\triangle ABF$、$\triangle BCG$、$\triangle FIC$ 的外接圓相交於一點 $L$(密克點定理).

因爲 $\triangle ABF$、$\triangle BCG$ 的外接圓相交於 $L$,則 $I$、$F$、$L$、$C$ 共圓.

同理,在完全四邊形 $EFCDIH$ 中,因 $\triangle CDH$、$\triangle DEI$、$\triangle FIC$ 的外接圓相交於一點 $M$,$\triangle DEI$ 與 $\triangle DCH$ 的外接圓相交於 $M$,則 $F$、$C$、$M$、$I$ 共圓(因爲過公共三點 $F$、$C$、$I$ 的圓,所以兩個圓是同一個圓).

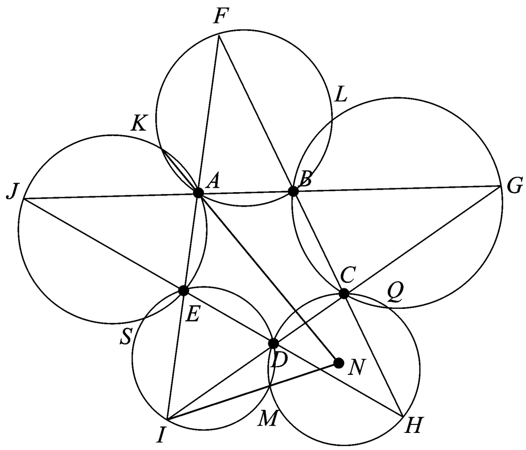


圖2 - 13

故 $I$、$F$、$L$、$C$、$M$ 五點共圓.

$\therefore \angle IFL = 180° - \angle LMI = \angle NML.$ ①

但是 $\angle IFL = \angle AKL = \angle NKL.$ ②

根據 ①、② 得

$\angle NKL = \angle NML$,,

所以 $K$、$L$、$N$、$M$ 共圓.

〔**定理**〕把五邊形 $ABCDE$ 的各邊延長作出五個三角形,則這五個三角形的外接圓的五個新交點是在同一圓周上(密克圓定理).

〔**證明**〕由**預備定理**的證明知,由圖 2 - 14 可看出. 顯然 $K$、$L$、$N$、$M$ 共圓. 又因 $E$、$M$、$K$、在 $\triangle AIN$ 的各邊(或其延長線)上,因此 $\triangle KAE$、$\triangle EIM$、$\triangle KMN$ 的三個外接圓相交於一點. 由於圓 $KAE$ 與圓 $EIM$ 的交點是 $S$. 故知 $\triangle KMN$ 的外接圓過點 $S$. 又因 $K$、$L$、$N$、$M$ 共圓,所以 $K$、$L$、$M$、$S$ 也共圓.

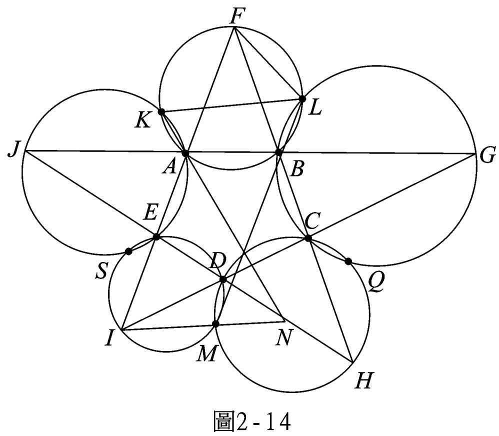


圖2 - 14

同理 $K$、$L$、$M$、$Q$ 共圓.

由此 $K$、$L$、$Q$、$M$、$S$ 也共圓.

〔**证法** 14〕(本證法選自沈文選先生編著的《平面幾何證明方法全書》及《平面幾何證明方法全書習題解答》)

〔**定理**〕五邊形 $FGHIJ$ 的邊延長後得五角星 $ABCDE$,每個"角"(三角形)的外接圓相交,除 $F$,$G$,$H$,$I$,$J$ 外又有五個交點 $F'$,$G'$,$H'$,$I'$,$J'$. 證明:這五點共圓.

〔**證明**〕如圖 2 - 15 所示,由 $\angle CFG' = \angle CGG' = \angle G'AH$(圓周上同弧上的圓周相等)(圓內接四邊形的外角等於內對角)可知,

$A$,$B$,$F$,$G'$ 共圓.("圓內接四邊形的外角等於內對角" 之逆定理).

同理 $A,B,J',F$ 共圓,故 $A,B,J',F,G'$ 五點共圓.

從而 $A,B,J',G'$ 四點共圓.

從而有 $\angle H'G'J + \angle H'I'J' = \angle H'G'J' + \angle II'H' + \angle II'J' = \angle H'G'J' + \angle AHH' + \angle II'J' = \angle H'G'J' + \angle AG'H' + \angle J'BA = 180°$(因爲 $A,B,J',G'$ 四點已被證明共圓).

則 $G',H',I',J'$ 共圓("圓內接四邊形對角互補"之逆定理).

同理 $H',I',J',F'$ 共圓.

從而知,$F',G',H',I',J'$ 五點共圓,故本定理得證.

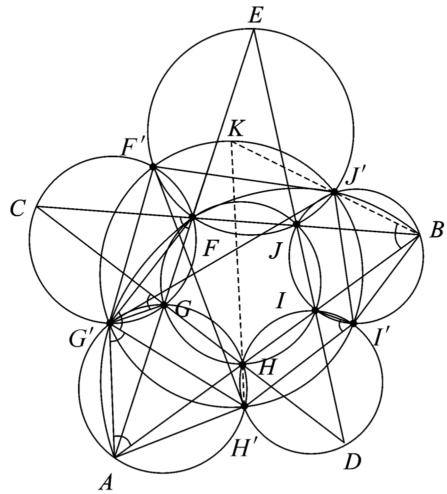


圖2-15

〔**注**〕本證法中使用的共圓定理以及圖 2 -14 的插圖均爲本文作者所補充.

〔**证法**15〕〔本證法選自上海科學技術出版社1964年出版的**《初等幾何教程上冊》**,原版問世於 19 世紀末,以後迭經改版,迄今始終爲初等幾何的重要文獻. 作者爲法國丁. 阿達瑪,**譯者為朱德祥**. 譯者譯自法國數學家(*J. Hadamard*) 著之初等幾何卷一第十一版(1931年) 並參考了俄譯本第三版(1948 年版譯出)〕(本證法的具體證法表述經《"密克圓"… 巡禮》一文的作者作了修正和改動)

〔**命題**〕已知任一五邊形,每連續三邊(或其延長線) 所成的三角形作一外接圓周. 證明每一圓周與其下一圓周相交總共得到的五點(五邊形的頂點不計在內),在同一圓周上.

〔**證明**〕以 $A,B,C,D,E$(見圖 2 -16) 表示已知五邊形的頂點,直線 $EA$ 和 $CB$ 的交點爲 $K$,直線 $AB$ 和 $DC$ 的交點爲 $L$,$BC$ 和 $ED$ 的交點爲 $M$,$CD$ 和 $AE$ 的交點爲 $N$,$DE$ 和 $BA$ 的交點爲 $P$;圓周 $EAP$ 和 $ABK$ 的第二個交點記爲 $A'$,圓周 $ABK$ 和 $BCL$ 的第二個交點記爲 $B'$,圓周 $BCL$ 和 $CDM$ 的第二個交點記爲 $C'$,圓周 $CDM$ 和 $DEN$ 的第二個交點記爲 $D'$,圓周 $DEN$ 和 $EAP$ 的第二個交點記爲 $E'$.

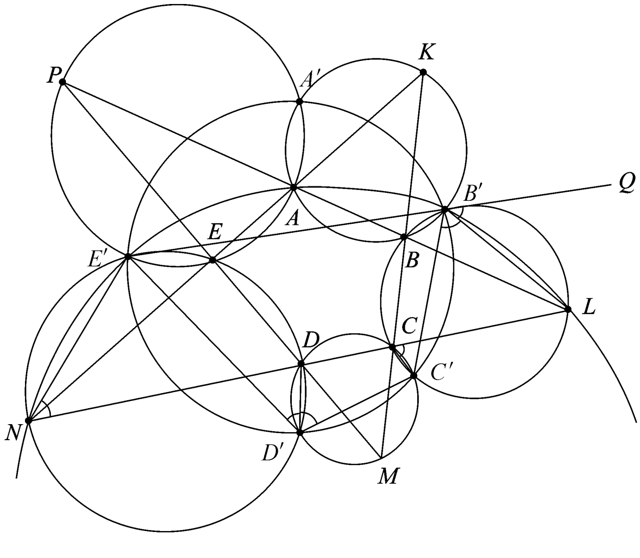


圖2-16

要證明五點 $A',B',C',D',E'$ 在同一圓周上,只要證明其中四點,例如 $B',C',D',E'$ 在同一圓周上. 因爲這個推理也適用於四點 $A',B',C',D'$,於是可以斷定所有五點(即 $A',B',C',D',E'$) 在同一圓周上.

具體證明如下:

首先連接 $CC',DD',C'D',B'C',B'L$ 和 $E'N$,再連接 $EB'$ 並延長至 $Q$ 點.

根據**密克點定理**,可知完全四邊形 $NCBALK$ 中 $\triangle ABK$,$\triangle BCL$,$\triangle NAL$ 及 $\triangle NCK$ 的對應外接圓 $ABK$,$BCL$,$NAL$ 及 $NCK$ 合計四圓共點於 $B'$.

因此,$N$、$E'$、$A$、$B'$、$L$ 共圓,而四邊形 $NE'B'L$ 是這個圓的內接四邊形.

根據**“圓內接四邊形的外角等於內對角”**及**“圓周上同弧上的圓周角相等”**等性質,可知

$\angle DNE' = \angle DD'E'$(同弧$\overset{\frown}{E'D}$上的圓周角相等),

且 $\angle QB'L = \angle E'NL$(圓內接四邊形的外角等於內對角),

而 $\angle E'NL = \angle DNE'$(同一個角的不同表示法),

$\therefore \angle DD'E' = \angle QB'L$(等量代換),

又 $\angle C'B'L = \angle C'CL$(同弧$\overset{\frown}{C'L}$上的圓周角相等),

而 $\angle C'CL = \angle C'D'D$(圓內接四邊形的外角等於內對角),

$\therefore \angle C'B'L = \angle C'D'D$(等量代換),

故 $\angle C'B'L + \angle QB'L = \angle C'D'D + \angle DD'E'$(等量相加,和相等).

即 $\angle C'B'Q = \angle C'D'E'$,

$\therefore B'$、$C'$、$D'$、$E'$ 四點共圓(圓內接四邊形性質定理的逆定理).

同理可證,$A'$、$B'$、$C'$、$D'$ 四點也共圓,而這個圓也即上述的 $B'$、$C'$、$D'$、$E'$ 所共的圓,從而知道,$A'$,$B'$,$C'$,$D'$,$E'$ 共圓.

〔**证法** 16〕(此證法選自首都師範大學數學係周春荔的論文《**從“密克圖問題”的證明談起**》)

〔**定理**〕將任意凸五邊形 $ABCDE$ 的邊延長,交成五角星形 $FGHKL$. 作 $\triangle ABF$,$\triangle BCG$,$\triangle CDH$,$\triangle DEK$,$\triangle EAL$ 的外接圓. 諸圓兩兩相交的第二個交點記爲 $A'$,$B'$,$C'$,$D'$,$E'$. 求證:$A'$,$B'$,$C'$,$D'$,$E'$ 共圓(如下圖 2 - 16 所示).

〔**分析**〕如圖 2 - 17 所示,這是一道有一定難度的幾何題. 我們首先給出證題思路的探索過程.

要證 $A'$,$B'$,$C'$,$D'$,$E'$ 共圓,我們可先證 $D'$,$E'$,$A'$,$B'$ 共圓,再證 $E'$,$A'$,$B'$,$C'$ 共圓. 這只要證明 $D'$,$C'$ 都在不共線的三點 $E'$,$A'$,$B'$ 所確定的圓上,就可得到 $A'$,$B'$,$C'$,$D'$,$E'$ 共圓.

要證 $D'$,$E'$,$A'$,$B'$ 共圓. 只需證 $\angle A'E'D' + \angle A'B'D = 180°$ 即可.

連結 $EE'$,$AA'$,$A'E'$,$FB'$,$KD'$,$E'D'$,$DD'$,$B'D'$.

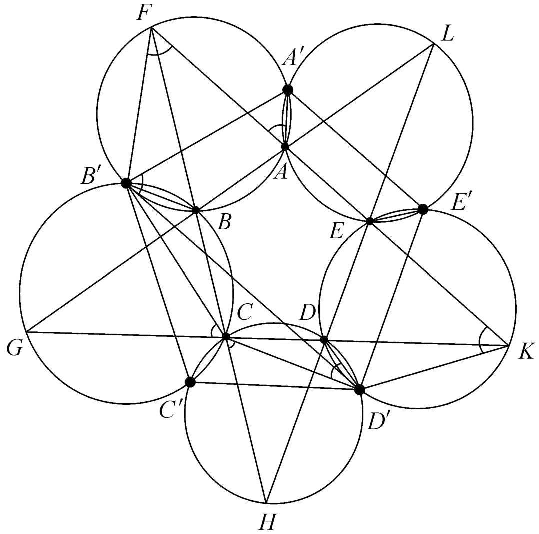


圖2 - 17

顯見 $\angle EE'A' = \angle A'AF = \angle FB'A'$(圓內接四邊形的外角等於內對角)(圓周中同弧 $\overset{\frown}{A'F}$ 上的圓周角相等).

$\angle EE'D' = \angle EKD' = \angle FKD'$(圓周上同弧$\overset{\frown}{ED'}$ 上的圓周角相等)($F,E,K$ 共線).

所以只需證 $\angle FB'D' + \angle FKD' = 180°$ 即可,也就是說,只需證 $F,B',D',K$ 四點共圓即可.

從圖中容易發現:

$\angle HCD' = \angle HDD' = \angle D'KE$($K$、$E$、$F$ 共線) $= \angle D'KF$(圓周上同弧$\overset{\frown}{HD'}$ 上的圓周角相等)(圓內接四邊形外角等於內對角).

所以 $F,K,D',C$ 共圓.

也就是 $D'$ 在 $F,K,C$ 三點確定的圓上.

我們只需證,$B'$ 也在 $\odot(FKC)$ 上即可,而這只需證 $\angle KFB' = \angle B'CG$ 就可以了.

我們注意到,因爲 $\angle KFB' = \angle AFB'$($F$、$E$、$K$ 共線) $= \angle B'BG = \angle B'CG$(圓內接四邊形的外角等於內對角)(圓周上同弧上的圓周相等).

所以 $\angle KFB' = \angle B'CG$ 顯然成立(則 $B',C,K,F$ 四點共圓,也即 $B'$ 在 $\triangle FKC$ 的外接圓上).

至此,思路已經溝通,不難寫出 $D',E',A',B'$ 四點共圓的證明. 同理可證 $C',E',A',B'$ 四點共圓. 因此可得 $A',B',C',D',E'$ 五點共圓.

因此,大家只要略爲加工整理,就不難寫出這道幾何題的綜合證明.

**江主席**給中學老師出的這個問題,是平面幾何中的一個重要命題〔**密克**(*Miguel*) **圓定理**,1938〕(**“延長五邊形 *ABCDE* 各邊在外部成五個三角形,這五個三角形的外接圓的另五個交點共圓”**).

**五邊形的密克圓**問題是一道富有挑戰性的問題. **五角星形是任意的,但五個三角形的外接圓的交點中,異於五邊形頂點的第二個交點,卻有一定的秩序性 —— 這五點共圓**. 這是一道多麼誘人、富有深刻哲理的問題呀!

爲了解決這個問題,只需掌握**圓內接四邊形的性質定理**和**四點共圓的判定定理**. 按照探索法倒推分析,尋求解題思路,達到化繁爲簡、從簡馭繁的目的. 探索法敎的是分析與綜合的程式,**“供那些學過普通幾何原理,渴望獲得求解數學問題能力的人之用”**. 我們在上面已寫出了五邊形密克圓問題的分析思路,目的就在於通過本題領悟探索法的分析程式. 這正是幾何學的素質教育功能. **“學習幾何能鍛煉一個人的思維”**是對幾何學教育價値的深刻揭示. 值得我們在研制中學數學課程標準時認眞思考與落實.

**問題是數學的心臟**,學數學就要解答一定數量的數學題. 其中當然包括一些具有某種挑戰性或有深刻背景的習題. 解數學題的過程,是鍛煉一個人提出問題、分析和解決問題能力的過程,是培養一個人鍥而不捨的鑽研精神與實事求是的科學品質的過程. **“解答數學題,最重要的是培養一個人的鑽研精神”—— 江主席準確地指出了解答數學題在中小學階**

段的教育意義.

〔**证法** 17〕(本證法選自上海《數學題解辭典 —— 平面幾何》)

〔**已知**〕任意五角星形 $ABCDEFGHIJ$ 中,$\triangle JAB$、$\triangle BCD$、$\triangle DEF$、$\triangle FGH$ 和 $\triangle HIJ$ 各自的外接圓順次相交的交點分别爲 $P$、$Q$、$R$、$S$、$T$.

〔**求证**〕這五個交點共圓.

〔**分析**〕如圖 2 - 18 所示,根據密克點定理可知,圓 $BCD$、圓 $DEF$、圓 $BEI$、圓 $CFI$ 共點,這樣便可設法證明 $P$、$Q$、$R$、$S$ 四點及 $Q$、$R$、$S$、$T$ 四點分别共圓而得證.

〔**證明**〕連 $QR$、$RS$、$ST$、$TQ$ 及 $FR$、$HS$,由**密克點定理**知,圓 $BCD$ 與圓 $DEF$、圓 $BEI$ 交於點 $Q$,圓 $BAJ$ 與圓 $JIH$、圓 $BIE$ 交於點 $T$,即 $B$、$Q$、$E$、$I$、$T$ 五點共圓(也即圓 $BEI$).

於是四邊形 $QEIT$ 内接於圓 $BEI$,

$\therefore \angle QEI + \angle QTI = 180°$.

$\because \angle QEI = \angle 1$,

$\angle QTI = \angle QTS + \angle STI = \angle QTS + \angle SHI = \angle QTS + \angle 3 = \angle QTS + \angle 2$.

$\therefore \angle 1 + \angle 2 + \angle QTS = 180°$.

則 $Q$、$R$、$S$、$T$ 四點共圓.

同理可證 $P$、$Q$、$R$、$S$ 四點共圓.

故 $Q$、$R$、$S$、$T$、$P$ 五點共圓.

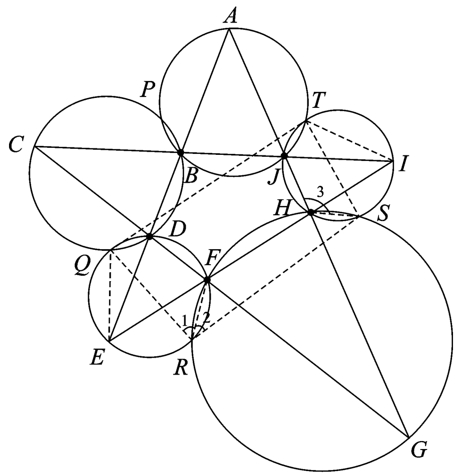



圖2 - 18

## 三、“五點共圓”傳盛事,“老樹開花”展新姿

前國家主席江澤民,2000 年參加澳門回歸祖國一週年慶展期間視察澳門濠江中學時,拋出**“五點共圓”**數學題考考濠江中學的師生,一時成爲盛事.

濠江中學除四位數學老師從不同角度作出解答外,許多師生也都披掛上陣,深入研究.不少師生(特别是清華大學的畢業生,我校年青的數學教師,奧林匹克選手馬俊彬)都發現,在**“五點共圓”**的問題中,除**“五點共圓”**(**“密克圓”**)外,尚有許多**“共點圓”**、**“共圓點”**、**“共點線”**和**“共線點”**;以及**平行線**,**等弧**和**等弦**.

科普作家**沈康身教授**在他的巨著《**數學的魅力**》也指出**“五點共圓”**這個命題還有一系列有趣的問題.

### (一)“五點共圓”命題的相關推論

#### (Ⅰ)共點圓

由圖 3 - 1 所示,在完全四邊形 $ABCDEF$ 中,四個三角形、、和所對應的四個外接圓共點(**“密克點”**).

而在**“五點共圓”** 的命題中,如圖 3 －2 所示,對於**“五邊形** *ABCDE*”所對應的**“五星形”**中有五個頂點,分別爲 *K*、*L*、*F*、*G*、*H*,從五個頂點出發,有五個完全四邊形,它們的四個三角形所對應的四個外接圓都共點(也即五個**“密克點”**).

因此**“五點共圓”** 命題中有五組的“四圓共點”.

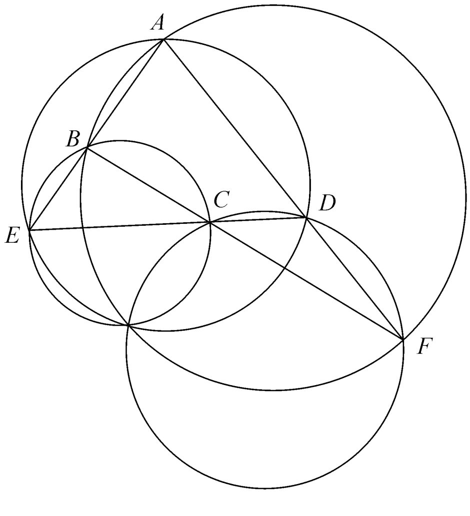



圖3 - 1

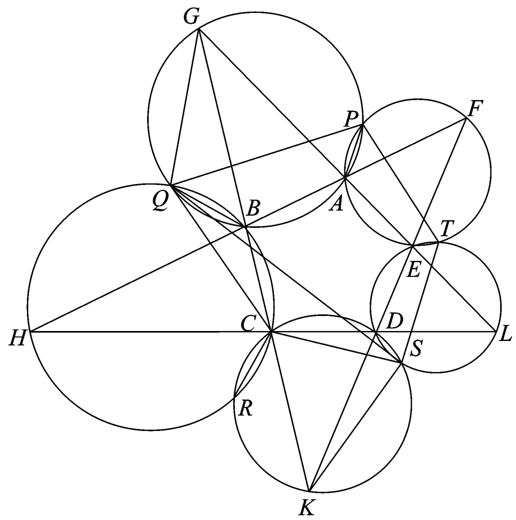
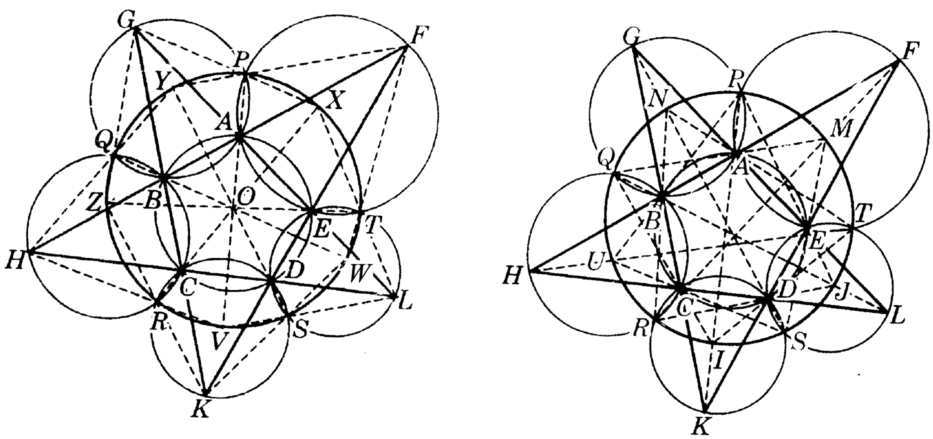



圖3 - 2

**(Ⅱ)共點線**

〔**推論** 1〕在任意內接於圓的歪斜的不規則五角星形外側、五個“角” 的外接圓兩兩相交,相鄰兩圓交點連線,五線共點. 圖 3 －3(1) 中 *PA*、*QB*、*RC*、*SD*、*TE* 共點於 *O*.




(1) (2)

圖3 - 3

〔**推論** 2〕在圖 3 －3(1) 和(2) 中還有兩組三線共點,每組含五個(三線) 共點,它們是 *AP*、*HR*、*LS*;*BQ*、*KS*、*FT*;*CR*、*LT*、*GP*;*DS*、*FP*、*HQ*;*ET*、*GQ*、*KR*;依次共點於 *V*、*W*、*X*、*Y*、*Z*. 又 *PK*、*TD*、*QC*;*QL*、*PE*、*RD*;*RF*、*QA*、*SE*;*SG*、*RB*、*TA*;*TH*、*SC*、*PB* 依次共點於 *I*、*J*、*M*、*N*、*U*.

（Ⅲ）**共線點**

至於**"五點共圓"**命題中的共線點更是淺現可見——**"五星形"**中的五條直線中各有四個點共線，因此有五組共線點.

（Ⅳ）**共圓點**

〔**推論** 1〕在上述共點線推論 2 中兩組五個共圓點 $V$、$W$、$X$、$Y$、$Z$ 和 $I$、$J$、$M$、$N$、$U$ 都在"密克圓"上. 這就是說，連同 $P$、$Q$、$R$、$S$、$T$，十五點共圓.

〔**推論** 2〕在密克圓定理中還有五組共圓點. 圖 3－2 中爲 $S$、$T$、$P$、$G$、$H$；$T$、$P$、$Q$、$H$、$K$；$P$、$Q$、$R$、$K$、$L$；$Q$、$R$、$S$、$L$、$F$；$R$、$S$、$T$、$F$、$G$ 五圓. 圖 3－4 爲歐洲出版物中相應的插圖.

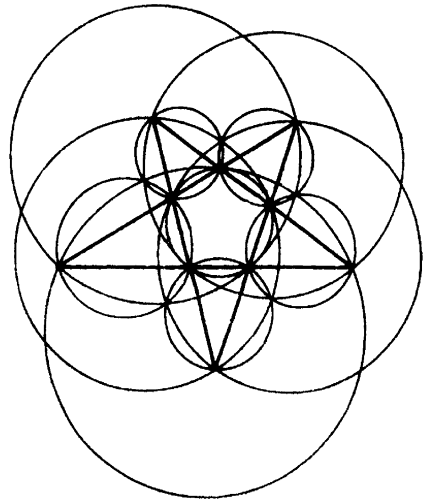


圖3-4

## （二）"五點共圓"命題的拓廣

2006 年 12 月 9 日至 11 日國家數學教育高級研修班"數學教師教育（澳門會議）"在澳門濠江中學氹仔分校舉行. 以數學教育專家**張奠宙教授**爲首的國內頂尖的許多數學教育專家參加了是次會議，並作了許多重要的論文報告.

會議期間北京師大的**教授張英伯女士**認眞地聽取了濠江中學的校長和時任教務主任鄭志民（**"五點共圓"**的解答者之一）關於**前國家主席江澤民**在濠江中學向濠江中學的師生提出**"五點共圓"**的數學問題後，陷入沉思和聯想，深感**"五點共圓"**問題可以加以拓廣——把五邊形的各邊延長後得出的**"五星形"**所對應的五個三角形的外接圓共點的問題，拓廣爲——**"把 $n$ 邊形的各邊延長後得出的'$n$ 星形'"所對應的 $n$ 個三角形的外接圓共點問題.**

**張英伯教授**還興致勃勃地在小組會議中作出**"五點共圓"**命題拓廣的思路講座，一時成爲佳話！

**張英伯教授**回京後還帶領她的研究團隊對**"五點共圓"**命題如何推廣到 $n$ 維作了研究；並以**"五點共圓問題與*clifford*鏈定理"**在寧波教育學院召開的教育部數學教育高級研修班（寧波會議）（2007 年 4 月 13－17 日）發表了演講把**"五點共圓"**的幾何問題用代數的方法（矩陣、行列式和對稱多項式）巧妙地推廣到任意正整數〔推廣的思路和做法來自於 clifford 關於密克點定理（on Miguel′s），以及英國數學會 F. Morley 1900 年在美國數學會（Transaction）上的一篇文章**"*on the melric geornetry of the plaie n －line*"**〕.

**張教授**回京後，以《**五點共圓與 *clifford* 鏈定理**》（張英伯、葉彩娟）爲題發表重要論文於北京《數學通報》（2007 年第 9 期）和華東師範大學《數學教學》（2007 年第 9 期）.

**張教授**在文中還特別提到：

濠江中學的四位數學老師各自獨立地解答了江主席提出的**"五點共圓"**問題. **我很敬佩濠江中學這些老師，他們不愧為優秀的數學教師，他們數學功底可見一斑. 其中劉增榮老**

**師的解答,與我們即將給出的證明思路相同.**

上述所推廣出的結論轟動了中國的數學界,也震動了澳門的教育界.

進而又有**中國科學院院士張景中教授**指出的,交由**張宇、李濤**和**彭翕成**三人以《clifford 鏈定理簡單的幾何證明》爲題發表論文把**“五點共圓”問題推廣到 n 維(任意正整數)**(見北京《數學通報》2013 年第 3 期). **這個推廣采用幾何的方法,表達簡單、易懂.**

參考文獻:


[1] (法國) 丁. 阿達瑪(J. Hadamard) 著:《初等幾何教程上冊(平面幾何)》(1931 年第三版)(朱德祥根據俄澤本 1948 年第三版翻譯),上海科學技術出版社 1964 年版.

[2] (日本) 笹部貞市郎編(高清仁等譯):《幾何學解題辭典 —— 問題解法》,上海教育出版社出版 1984 年版.

[3] 陳聖德著:《平面幾何一題多证》,福建人民教育出版社 1985 年版.

[4] 章景翰等編著:《數學題解辭典(平面幾何)》,上海辭書出版社 1993 年版.

[5] 澳門濠江中學編寫的專刊:《江澤民主席視察澳門濠江中學紀念特刊》,澳門濠江中學 2001 年 1 月版.

[6] 周春勤論文:《從密克圓的證明談起》,北京《數學通報》2001 年第 6 期.

[7] 鄭志民論文:《江澤民主席濠江中學出幾何題親歷記》,華東師範大學《數學教育》編輯部出版 2004 年第 6 期.

[8] 沈康身著:《數學的魅力》(一),上海辭書出版社 2004 年版.

[9] 沈文選、葉中豪、田延彦著:《平面幾何證明方法全書》,哈爾濱工業大學出版社 2005 年 9 月版.

[10] 沈文選編著:《平面幾何證明方法全書習題解答》,哈爾濱工業大學出版社 2005 年 10 月版.

[11] 沈康身著:《數學的魅力》(二),上海辭書出版社 2006 年版.

[12] 張英伯、葉彩娟論文:《五點共圓問題與 clifford 鏈定理》,北京《數學通報》2007 年第 2 期.

[13] 張宇、李濤、彭翕成論文:《clifford 鏈定理簡單的幾何證明》(方法由張景中教授提出),《數學通報》2013 年第 3 期.


[**注** 1] 關於**“五點共圓”**問題,自 19 世紀 30 年代至 20 世紀的今天(時間跨度爲 70 多年),中外學者都有重要的研究和不同的解答方法([法國] 丁. 阿達瑪著的《初等幾何教程》上冊的第十一版是 1931 年所出版的,該著作提到**“五點共圓”**問題)(另有一說是**“密克(Miguel) 圓”**出現於 1938 年);2007 年及 2013 年又出現了用**“代數的方法”**和**“幾何的方法”**,把**“五點共圓”**的問題推廣到 n 維(n 爲正整數) 的情況.

本文所呈現的 17 種证法,無論在解題的切入點,解題方法(包分析法,綜合法或分析與綜合相結合的方法) 和所引用的定理都有很大的不同;但是它們都運用了圓內接四邊形的

性質,包括“圓内接四邊形的外角等於内對角”及其逆定理,“圓周中同弧上的圓周角相等”,“圓内接四邊形對角互補”及其逆定理;也運用了角的分解和合成,促使了“五點共圓”. 這些证法當中要麼是先证四點共圓,再证和上一圓有三個公共點的另外四點共圓,從而证得五點共圓,或者引用“密克點”定理,使證明步驟簡化.

[注2] 本文是作者爲了那些對“五點共圓”有興趣和具研究能力的師生所提供的參考資料;也可以作爲“奧林匹克選手”培訓活動的參考資料.

[注3] 本文中的17種证法中除已註明外,經作者對各種证法的文字表述或論证表達的順序所作的修改,文中不再加以説明.

# 2017"希望杯"全國數學邀請賽（中學第二十八屆）
# 報名人數統計表

| 學校名稱 | 初一 | 初二 | 初三 | 高一 | 高二 | 合計 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 澳門大學附屬應用學校 | 26 | 26 | 24 | 34 | 38 | 148 |
| 培華中學 | 5 | 10 | 10 | 5 | 5 | 35 |
| 聖保祿學校 | 30 | 30 | 30 | 30 | 30 | 150 |
| 粵華中學 | 24 | 24 | 24 | 24 | 24 | 120 |
| 菜農子弟學校 | 60 | 60 | 40 | 40 | 40 | 240 |
| 氹仔坊眾學校（中學部） | 20 | 32 | 16 | 16 | 16 | 100 |
| 鏡平學校＊ | 40 | 50 | 50 | 40 | 40 | 220 |
| 培正中學 | 58 | 52 | 21 | 136 | 161 | 428 |
| 澳門坊眾學校 | 20 | 20 | 20 | 20 | 20 | 100 |
| 陳瑞祺永援中學 | 17 | 14 | 9 | 19 | 8 | 67 |
| 培道中學 | 30 | 30 | 30 | 30 | 30 | 150 |
| 聖公會（澳門）蔡高中學 | 20 | 20 | 20 | 0 | 0 | 60 |
| 教業中學 | 15 | 15 | 10 | 15 | 10 | 65 |
| 濠江中學 | 36 | 40 | 44 | 64 | 64 | 248 |
| 同善堂中學 | 20 | 20 | 20 | 20 | 20 | 100 |
| 勞工子弟學校 | 60 | 60 | 60 | 60 | 60 | 300 |
| 高美士中葡中學 | 13 | 6 | 11 | 13 | 10 | 53 |
| 浸信中學 | 20 | 20 | 20 | 20 | 20 | 100 |
| 廣大中學 | 8 | 4 | 18 | 0 | 0 | 30 |
| 新華學校 | 5 | 3 | 3 | 2 | 2 | 15 |
| 濠江中學附屬英才學校 | 36 | 24 | 24 | 0 | 0 | 84 |
| 東南學校（中學部） | 12 | 6 | 15 | 15 | 21 | 69 |
| 鄭觀應公立學校 | 0 | 4 | 0 | 0 | 0 | 4 |
| 利瑪竇中學 | 2 | 2 | 2 | 2 | 0 | 8 |
| 慈幼中學 | 0 | 1 | 2 | 0 | 0 | 3 |
| 聖羅撒女子中學中文部 | 3 | 0 | 2 | 3 | 4 | 12 |
| 合計 | 580 | 573 | 525 | 608 | 623 | 2909 |

## 2017“希望杯”全國數學邀請賽（小學第十五屆）
## 報名人數統計表

| 學校名稱 | 小四 | 小五 | 小六 | 合計 |
|---|---|---|---|---|
| 濠江中學附屬英才學校 | 60 | 45 | 45 | 150 |
| 培道中學（小學部） | 16 | 16 | 16 | 48 |
| 培道中學氹仔小學分校 | 16 | 16 | 12 | 44 |
| 教業中學分校 | 20 | 20 | 25 | 65 |
| 菜農子弟學校 | 80 | 64 | 48 | 192 |
| 氹仔坊眾學校 | 12 | 16 | 12 | 40 |
| 鏡平學校（小學部） | 40 | 40 | 40 | 120 |
| 培正中學（小學部） | 76 | 87 | 89 | 252 |
| 聖若瑟教區中學第五校 | 32 | 32 | 32 | 96 |
| 澳門坊眾學校（小學部） | 16 | 16 | 16 | 48 |
| 陳瑞祺永援中學 | 15 | 15 | 0 | 30 |
| 慈幼中學 | 12 | 12 | 12 | 36 |
| 濠江中學附屬小學 | 132 | 95 | 101 | 328 |
| 同善堂中學（小學部） | 40 | 20 | 30 | 90 |
| 勞工子弟學校（小學部） | 40 | 40 | 40 | 120 |
| 澳門浸信中學（小學部） | 10 | 11 | 9 | 30 |
| 澳門大學附屬應用學校 | 12 | 9 | 8 | 29 |
| 培華中學附小 | 10 | 10 | 10 | 30 |
| 鄭觀應公立學校 | 2 | 2 | 3 | 7 |
| 婦聯學校 | 4 | 4 | 4 | 12 |
| 聖公會（澳門）蔡高中學 | 20 | 20 | 0 | 40 |
| 東南學校 | 0 | 5 | 6 | 11 |
| 新華學校（小學部） | 4 | 3 | 4 | 11 |
| 合計 | 669 | 598 | 562 | 1829 |

# 澳門數學教育研究學會

聯絡地址:澳門殷皇子大馬路 11 號群發花園第一座 14 樓 A

電話:853 - 28965253,853 - 66878553 傳真:853 - 28788259

E - mail: macaumath@ yahoo. com. hk , inwmacau@ yahoo. com. hk

Website:http://www. mathsmo. com/

## 會務活動紀錄

**2002 年**

6 月 17 日　在氹仔海島公證署辦理本會注冊手續.

**2003 年**

6 月 7 日　舉辦“中國數學教學的雙基原理—2002 年數學教育高級研討班”——會議精神傳達報告會.

12 月 13、14 日　舉行中小學“數學開放題教學”專題研討會及示範課.

12 月　《澳門數學教育》創刊號出版.

**2004 年**

4 月 17 日　舉辦“DM_Lab 和動態數學教學”講座.

9 月 30 日　赴杭州拜訪教育研究中心,訪問海寧市崇文實驗學校及杭州市南宛小學.

10 月 9、10 日　舉行“數學情景與提出問題教學”專題研討會及示範課.

**2005 年**

3 月 24 - 28 日　赴貴陽、興義市參觀和交流,訪問興義八中和延安路小學.

4 月 16 日　與教育出版社合辦“突破兒童數學思維空間”研討會及《新思維數學》教材展覽會.

11 月 26、27 日　舉行“全國小學特級數學男教師教學風采展示”專題研討會及示範課.

12 月 20 - 28 日　前往武漢訪問華中師範大學第一附屬中學、東方紅小學以及育才第二小學.

**2006 年**

3 月 4 日　舉辦“因材施教、拔尖保底——如何幫助數學差生學習”專題研討會.

| | |
|---|---|
| 4 月 14、15 日 | 赴廣東省河原市第二小學和河源市中學觀課. |
| 6 月 25－29 日 | 前往山東濟南參觀濟南第十二中學和解放路第一小學. |
| 12 月 9－10 日 | 舉行“國家數學教育高級研修班‘數學教師教育’澳門會議”. |

## 2007 年

| | |
|---|---|
| 4 月 28、29 日 | 與全國嘗試教學理論研究會合辦“兩岸四地小學數學課堂教學觀摩及說課比賽”. |
| 7 月 4、5 日 | 與澳門大學教育學院合辦“有效的數學教學:一個國際視角”及“有效數學教學實務:美國的經驗”講座. |
| 7 月 30 日至<br>8 月 3 日 | 訪問陝西省西安市吉祥路小學、西安市第一中學、西北工業大學附小. |
| 9 月 1 日 | 舉辦“創造性數學的想法及方法運用”講座. |

## 2008 年

| | |
|---|---|
| 11 月 1 日 | 舉辦“小學數學專家講座”. |
| 11 月 22 日 | 舉辦“中學數學教育改革成功經驗介紹暨課堂教學展示”專題會議. |

## 2009 年

| | |
|---|---|
| 5 月 29 日、30 日 | 前往美國參加第 34 屆美國高中數學競賽(ARML),榮獲國際組第一名. |
| 8 月 15 日~20 日 | 訪問內蒙古包頭市鐵路二中. |
| 11 月 14 日 | 舉辦“數學教學的有效性與開放性”研討大會及示範課. |
| 12 月 5 日、6 日 | 舉辦“第一屆澳門小學數學優質課堂教學”評比大會.<br>(慶祝祖國成立 60 週年,澳門回歸 10 週年,本會成立 5 週年活動) |

## 2010 年

| | |
|---|---|
| 6 月 | 成立“澳門數學奧林匹克學會”,政府憲報刊登該會章程. |
| 11 月 26 日、27 日 | 組織 18 名數學優秀學生前往北京參加首屆世界數學團體錦標賽. |
| 1 月 18 日 | 華東師範大學聘請汪會長擔任華東師範大學國際數學奧林匹克研究中心澳門實驗培訓基地主任. |

## 2011 年

| | |
|---|---|
| 1 月 28 日 | 「美國高中數學競賽」澳門區代表隊榮獲澳門特區政府頒授功績獎狀. |
| 9 月 27 日、28 日 | 與澳門大學教育學院合辦“國際著名教育家蘇霍姆林斯基教育理念介紹會”. |

**2012 年**

6 月 9 日　　舉辦"如何激發學生數學創造力講座暨中學數學課堂教學展示"公開課.

8 月 1 – 6 日　　赴吉林、延邊中、小學進行學術交流.

11 月 3 – 4 日　　舉辦"全國小學數學四大教學流派課堂教學展示課".

11 月 3 日晚上　　舉行慶祝本會成立十週年晚宴,十週年成果展.

**2013 年**

4 月 6 日　　舉辦亞太區小學奧數(澳門區)選拔賽.

4 月 14 日　　進行中學第二十四屆、小學第十一屆"希望杯"澳門地區第二試決賽.

4 月 16 日　　名譽會長陳明金先生宴請本會,表示對本澳數學教育的支持和鼓勵.

5 月 11 日　　舉辦"幼兒教育理論講座與幼兒教學實踐示範課".

6 月 1 日　　赴新加坡參加 2013 亞太小學數學奧林匹克總決賽.

5 月 31、6 月 1 日　前往美國參加第 38 屆美國高中數學競賽(ARML),澳門隊第二.

6 月 15 – 19 日　　舉辦數學實驗——統計與概率工作坊.

7 月 10 日　　澳門基金會爲 ARML 澳門隊凱旋而歸的健兒舉行慶功宴.

7 月 18 日　　舉行希望杯、亞太區小學奧數(新加坡)、數學大王賽頒獎禮暨(ARML)美國高中數學競賽成果滙報會.

8 月 1 – 7 日　　赴哈爾濱、鷄西中、小學進行學術交流.

11 月 16 – 17 日　　與澳門大學教育學院合辦「嘗試教學理論研究華人論壇」和幼兒教育報告會.

12 月 7 – 9 日　　舉辦「中學、小學數學奧林匹克教練員考級證書培訓班」.

12 月　　《澳門數學教育》第十一期出版.

**2014 年**

1 月 11 日　　舉行「幾何王」初中平面幾何學習軟件介紹會.

4 月 3 日　　拜訪澳門基金會.

4 月 13 日　　進行中學第二十五屆、小學第十二屆"希望杯"澳門地區第二試決賽.

4 月 15 日　　拜訪澳門教育暨青年局.

4 月 17 日至 21 日　赴臺灣澎湖、高雄參訪活動.

4 月 26 日　　舉辦"史豐收速算法"介紹會.

5 月 30 – 31 日　　前往美國參加第 39 屆美國高中數學競賽(ARML),澳門隊第二.

6 月 14 日　　舉行「領道數學科組工作經驗介紹會暨瀋陽七中教學展示課」活動.

7 月 11 日　　舉行「幾何王」初中平面幾何學習軟件培訓班.

| | |
|---|---|
| 7 月 12 日 | 舉行希望杯、亞太區小學奧數(新加坡)、數學大王賽、環亞太杯國際數學賽、中小學數學奧林匹克教練員考級證書頒獎禮暨(ARML)美國高中數學競賽成果滙報會. |
| 8 月 10 – 16 日 | 派學生前往四川西昌參加澳門基金會教科文中心航天團. |
| 10 月 18 日 | 舉辦"熟能生巧數學觀點講座暨高中數學教學展示課". |
| 11 月 22 – 23、29 – 30 日 | 舉辦"史豐收速算法"道師培訓班. |
| 12 月 6 日、7 日 | 舉辦"第五屆澳門小學數學優質課堂教學"評比大會暨全國協作區孔子杯小學數學課堂教學大賽(澳門賽區). |
| 12 月 | 《澳門數學教育》第十二期出版. |

## 2015 年

| | |
|---|---|
| 1 月 16 日 | 拜訪澳門基金會。 |
| 1 月 31 日 | 舉行成立 "史豐收速算法" 培訓基地新聞發佈會。 |
| 4 月 12 日 | 進行中學第二十六屆、小學第十三屆"希望杯"澳門地區第二試決賽。 |
| 4 月 19 日 | 拜訪澳門教育暨青年局。 |
| 5 月 10 日 | 汪會長參加上海"小學數學教師教育高級研修班"。 |
| 5 月 23 日 | 舉行「任勇的數學教學主張」講座。 |
| 5 月 28 – 31 日 | 前往新加坡參加第 26 屆亞太區小學數學奧林匹克賽決賽。 |
| 5 月 29 – 30 日 | 前往美國參加第 40 屆美國高中數學競賽(ARML),澳門隊重獲冠軍。 |
| 6 月 13 日 | 舉行希望杯、亞太區小學奧數(新加坡)、數學大王賽、環亞太杯國際數學賽暨(ARML)美國高中數學競賽成果滙報會。 |
| 6 月 3 – 7 日 | 澳門大學教育學院與本會合辦"數學整數教育"專題研討會。 |
| 6 月 6 日 | 邀請意大利幾何學專家和捷克數學家教育專家舉行講座。 |
| 6 月 27 日 | 往港參加史豐收速算兩岸三地比賽。 |
| 7 月 11 日 | 與澳門大學教育學院、香港資優教育學會合辦「環亞太杯國際數學邀請賽總決賽」。 |
| 8 月 | 《兩岸三地昇大數學教程》出版。 |
| 8 月 8 – 12 日 | 澳門隊赴桂林參加 WMI 世界數學邀請賽。 |
| 8 月 15 – 20 日 | 赴陝西省進行學術交流。 |
| 10 月 17 日 | 舉辦"幼兒教育報告會及幼兒史豐收速算法演示課"。 |
| 12 月 5 日、6 日 | 舉辦"第一屆小學新思維數學"澳門杯"課堂教學大賽評比大會"。 |
| 12 月 7 日 | 獲澳門特別行政區授予團隊功績獎狀。 |
| 12 月 | 《澳門數學教育》第十三期出版。 |

**2016 年**

| | |
|---|---|
| 1 月 17 日 | 於培道中學舉辦“兒童資優培育”介紹會,邀請臺灣奧林匹克文教集團池玉玲講師作〈啓發幼兒數學邏輯力〉專題報告。 |
| 3 月 5 日 | 於澳門大學舉辦“希望杯數學競賽試題分析”講座,澳大江春蓮教授主講有關小學、中學數論方面的分析。 |
| 3 月 19 日 | 教育暨青年局與本會合辦“中、小學數學實驗和智力發展”專題講座,方運加教授(首都師範大學數學係)和辰煜高級工程師(首都師範大學科技園)。 |
| 5 月 26 – 29 日 | 前往新加坡參加第 27 屆亞太區小學數學奧林匹克賽決賽,劉明藝老師帶領(濠江)李俊賢和黄欣婷參賽,李俊賢同學獲白金獎,黄欣婷同學獲榮譽獎,爲澳門學界爭光。 |
| 6 月 3 – 4 日 | 組織本澳 21 名數學優秀學生前往美國拉斯維加斯內華達大學拉斯維加斯校區(UNLV)參加第 41 屆美國高中數學競賽(ARML),澳門隊領隊、教練汪甄南、施振雄、鄧海棠、賀彩珍,隊員包括(濠江)洪文浩、談皓、黄俊賢、錢景輝、(教業)鄭啓源、陳漢華、(鏡平)粘智凡、林峻瑋、廖俊龍、黄丞賢、(勞校)蔣岳澎、李家維、林思穎、(培正)唐健維、吳嘉駿、(培道)伍子聰、樑文浩、(氹仔坊眾)黄子健、(培華)李子龍、樑浩文、(澳大附中)馮智聰。比賽完畢後,遊覽胡佛水庫、聖地亞哥航空母艦和環球片場等景點。澳門隊大敗臺灣、力壓韓國、險勝越南、不敵中國而居於國際排名榜亞軍(中國冠軍、澳門亞軍、越南季軍、韓國殿軍,臺灣第五,其他國家和地區排後),爲澳門學界爭光。 |
| 6 月 18 日 | 於濠江中學禮堂舉行希望杯、亞太區小學奧數(新加坡)、數學大王賽、環亞太杯國際數學賽暨(ARML)美國高中數學競賽成果滙報會。教育暨青年局黄健武代副局長爲獲得者及其教練員頒發獎牌和證書。 |
| 10 月 22 日 | 於培道中學舉辦“雲南麗江市教育局講座暨中學示範課”,邀請雲南省麗江市教育局副局長李淑芳介紹當地教育事業的發展和改革情況、麗江市教育局數學教研室侯俊主任講解教育改革,編制數學課程和師資培訓等工作、麗江市第一中學副校長和林功作高中二年級〈極坐標係〉展示課。 |
| 11 月 19 日 | 於高美士中葡中學舉辦“四川省成都市成華小學示範課”,邀請四川省成都市成華區教育局李曉靜科長、成華雙林小學教育集團張家寬老師作〈長方形正方形〉展示課、成華實驗小學教育集團商靖老師作〈長方形周界〉展示課、成華小學教育集團張倩老師作〈正方形面積〉展示課。 |
| 11 月 25 – 29 日 | 澳門隊前往馬來西亞吉隆坡黎明國民型華文小學參加 MIMO 馬來西亞國際奧數競賽。 |

12 月 10－11 日 於高美士中葡中學禮堂舉辦第二屆小學“新思維數學”澳門杯課堂教學比賽。

進入決賽老師：

花地瑪聖母女子學校劉鶴老師，課題：小六〈多邊形面積計算的整治與復習〉

明愛學校連少燕老師，課題：小一輕度班〈加法概念〉

新華學校袁家輝老師，課題：小一〈認識單數雙數〉

培華小學楊美蓮老師，課題：小三〈植樹問題〉

濠江中學附屬小學鄭潔雯老師，課題：小一〈進位加法〉

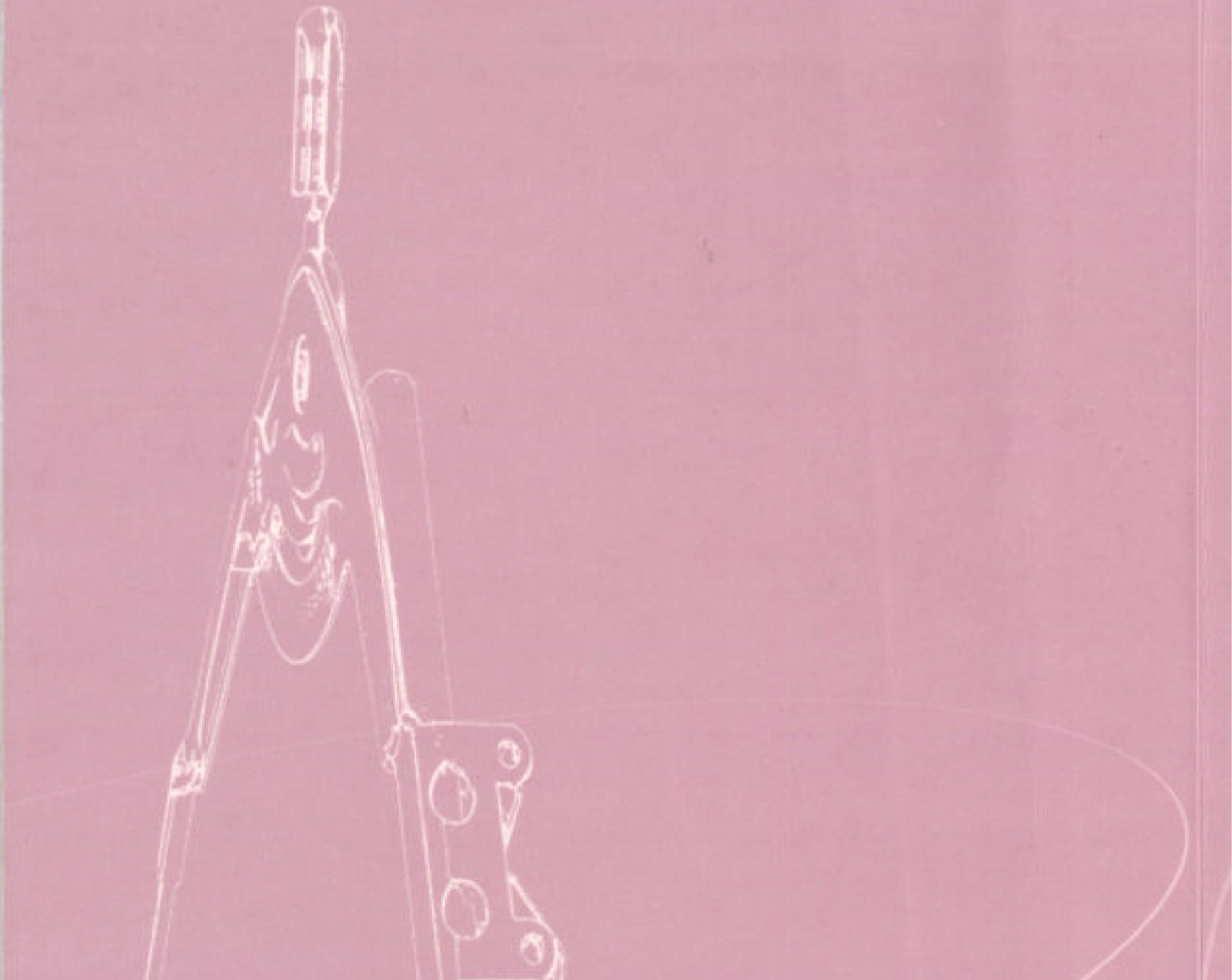
評委：方運加教授（首都師範大學數學係）、邱學華教授（常州大學嘗試教育科學研究院院長）、唐彩彬特級教師（杭州市）、梁子譽先生（香港教育出版社數學總編）、江春蓮教授（澳門大學教育學院助理教授）。

評選結果：

一等獎：楊美蓮老師、鄭潔雯老師

二等獎：劉鶴老師、連少燕老師、袁家輝老師

12 月 《澳門數學教育》第十四期出版。


CM 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14
11 10 9 8 7