第二十三期 No.23
ISSN 1814-2176

Educação Matemática de Macau

澳門数学教育

——张奠宙 题

Mathematics Education in Macau

澳門數學教育研究學會

澳門數學教育研究學會出版
2025年12月
ISSN 1814-2176
9 771814 217007

《大型國際教育比較研究結果的解讀：應用與誤用》講座

（2025 年 4 月 25 日）

梁貫成教授與本會幹事合照

教青局資源廳廳長鄧偉強（右 2）

梁貫成教授講解國際比較研究

梁貫成教授講解「數據解讀」

接待處

《核心素養導向下中學統計與概率內容的教與學》講座

（2025 年 10 月 17 日）

華東師範大學數學科學學院數學教育系
系主任吳穎康教授與出席者合照

鄧海棠博士擔任司儀

《澳門數學教育研究學會暨澳門數學奧林匹克學會》幹事

（2025 年 10 月 11 日理事會議）

《虛擬實境在教育中的理論創新與教育實踐》工作坊

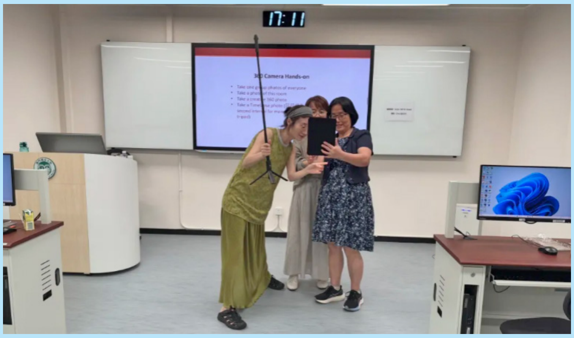
（2025 年 6 月 27 日）

莊紹勇教授與學員合影

香港中文大學課程與教學學系莊紹勇教授主講

城市大學金龍校區舉辦虛擬實境工作坊－莊紹勇團隊

香港中文大學課程與教學學系莊紹勇教授主講



江會長指導學員採用 VR 應用於教育的實踐

學員研究 VR 應用於教育的理論與實踐

2025“金蓮花”暨“數學大王”國際數學精英賽頒獎典禮

（2025 年 8 月 6 日）

《慶回歸 -2025 年度全澳小學數學課堂教學大賽》

（2025 年 11 月 22-23 日）

永遠榮譽會長汪甄南致歡迎辭

澳門大學教育學院院長范良火教授致辭

永遠榮譽會長汪甄南
向中聯辦教育與青年工作部
彭寧靜小姐致送自傳集

永遠榮譽會長汪甄南
向范良火教授
致送自傳集

永遠榮譽會長汪甄南
向邱學華教授
致送自傳集

永遠榮譽會長汪甄南向史豐寶
教授致送自傳集

永遠榮譽會長汪甄南
作活動總結

邵敏博士擔任司儀

江春蓮會長向宋薇特級教師
致送紀念品

伍助志理事長向評委
代毅教授致送紀念品

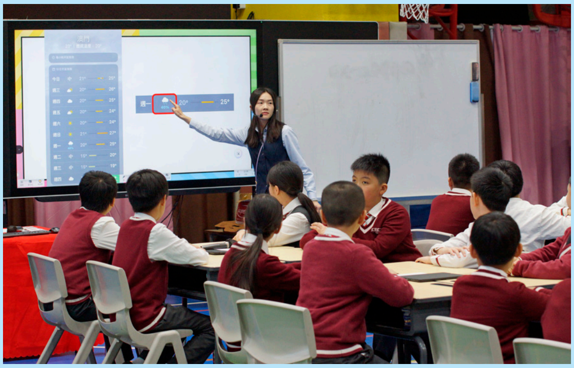
伍助志理事長向評委
鄧海棠博士致送紀念品

濠江中學附屬小學展示課會場

濠江中學附屬小學禮堂

培正中學小學部李凱勤老師

培正中學小學部學生參與展示課



廣大中學小學部李慧娟老師

廣大中學小學部學生參與展示課

化地瑪聖母女子學校洪麗老師

化地瑪聖母女子學校小學部學生參與展示課

嘉諾撒聖心中學王曉雯老師

嘉諾撒聖心中學小學部學生參與展示課

濠江中學附屬小學林煥嫦老師

濠江中學附屬小學學生參與展示課

嘗試教學理論研究會
理事長邱學華教授進行評課

史豐收國際教育總部
主任史豐寶教授進行評課

鄧海棠博士進行評課

貴陽市教育科學研究所
副所長宋薇特級教師進行評課

澳門城市大學教育學院
代毅教授進行評課

永遠榮譽會長汪甄南
向林煥嫦老師頒獎

江春蓮會長
向李慧娟老師頒獎

史豐寶教授
向李凱勤老師頒獎

邱學華教授
向王曉雯老師頒獎

宋薇副所長
向洪麗老師頒獎

參與展示課學生

會場嘉賓

獲獎老師與評委團合照

赴吉林參訪學習、觀光交流

（2025 年 12 月 20-25 日）

東北師範大學附屬中學交流

江春蓮會長與東北師範大學附屬中學校長
邵志豪互贈紀念品

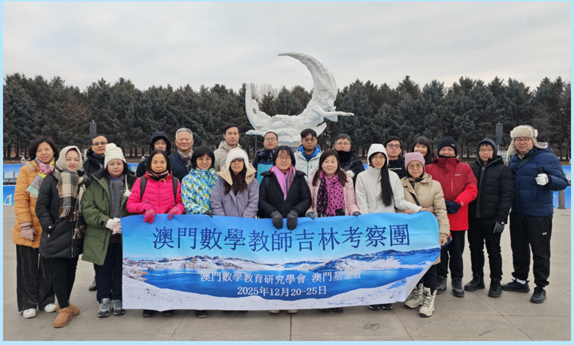
參訪吉林大學

參觀中國第一汽車廠紅旗文化展館

參觀東北淪陷史陳列館

參觀偽滿皇宮博物館

遊覽瀋陽故宮



遊覽淨月潭公園

參觀長春電影製片廠

遊覽長白山

《澳門數學教育研究學會暨澳門數學奧林匹克學會》春茗

（2025 年 2 月 23 日）

澳門數学教育（第二十三期） 2025 年 12 月

目　　錄

澳門數學教育研究學會出版
澳門新聞局編號：2877
地址：澳門南灣街 107 號
刊頭題詞：張奠宙教授
排版：廣源紙業文具行
印刷：新文寶印務有限公司
刊號：ISSN 1814-2176

深入發展　迎接挑戰

澳門數學教育研究學會會長

江春蓮

時間飛逝,2025 年即將過去,在此,我將對本年度的工作進行總結與反思,並在此基礎上對 2026 年要開展的工作做些展望。

首先,我誠懇地感謝永遠榮譽會長汪甄南先生對學會工作一如既往的大力支持,感謝各位會員、理事會和監事會的大力支持,也對新加入的會員表示熱烈的歡迎! 感謝澳門基金會和教青局對本會 2025 年舉辦的各項活動的大力支持! 希望我們可以像過去一樣,攜手前行,一起努力做好學會工作!

工作總結

2025 年,本會做了如下工作:

(1)受澳門基金會資助,在教青局的大力支持下,本會在 2025 年舉辦了四項社區活動和一項交流活動,我們將在後面分別介紹。

(2)出版發行《澳門數學教育》第二十二期。第 22 期共刊發了 9 篇論文,這些文章主要涉及數學教學設計、數學問題解決等。

(3)協助澳門數學奧林匹克學會舉辦“金蓮花”杯、“數學大王”和環亞太杯國際數學邀請賽等。

(4)參與教青局教學設計獎勵計劃之公開課的評審工作。

(5)參加澳門匯業社會文化促進會舉辦的「匯業杯中學生常識問答比賽」的出題和評委工作。

(6)推薦 6 位會員參加中聯辦組織的「澳門教師 STEM 教育浙江學習團」,深入瞭解浙江省在人工智能等領域的發展變化及其在 STEM 方面的最新發展。

社區活動

1. **國際數學測試講解會。** 本會於 4 月 25 日主辦了《大型國際教育比較研究結果的應用與誤用》之專題講座。主講嘉賓梁貫成教授爲北京師範大學教授、前香港大學教育學院

院長、香港特區政府銅紫荊星章獲得者和全球數學教育界最高榮譽費萊登特爾獎得主。講座開幕式上,教青局資源廳廳長鄧偉強致辭時強調, PISA 與 TIMSS 是檢視本地教育質量的重要測試。他指出,教青局持續支持教師專業成長,期望通過是次講座提升教育同仁對國際比較研究的理解,認識澳門數學教育的優勢與不足,進一步開拓創新。講座中,梁教授結合 PISA 與 TIMSS 的設計框架與數據應用案例,剖析國際測試結果在教學實踐中的正向影響與潛在誤區。梁教授指出,我們需辨別「數據解讀」與「盲目套用」的界限,教師需要根據學生特質靈活調整教學策略,方能眞正發揮國際比較研究的價值。講座吸引逾百名教育工作者及澳大教育學院學生參加,共同探討國際數學測試結果對教育教學改革的啟示。

2. **虛擬實境工作坊。**6 月 27 日,本會與澳門城市大學教育學院合作舉辦了「虛擬實境在教育中的理論創新與教育實踐」工作坊。特邀嘉賓莊紹勇教授是香港中文大學教育學院課程與教學系教授、博士生導師、學習科學與科技中心主任。工作坊分為理論學習和實踐操作兩個部分。作爲學習科學與教育科技領域的專家,莊教授從 EduVenture-VR 的理論基礎、設計架構、中小學應用的實際案例,深入淺出地介紹了 VR 應用於教育的理論與實踐。接著莊教授團隊帶領學員學習使用 EduVenture-VR 平臺編輯視頻,並學會使用 360 相機進行實景拍攝。來自澳門各間學校的老師和澳門城市大學教育學院的研究生約 50 人參與了是次培訓。

3. **統計與概率的教與學講座。**10 月 17 日,本會借聖保祿學校禮堂主辦了《核心素養導向下中學統計與概率內容的教與學》之專題講座。主講嘉賓吳穎康教授是華東師範大學數學科學學院數學教育系系主任、第十四屆國際數學教育大會本地組委會秘書長、中國教育學會中學數學教學專業委員會理事和學術委員會成員。吳教授先從數學知識體系的角度對統計與概率內容進行了梳理,接著對新課標中從小學的數據意識、初中的數據觀念到高中的數據分析能力及其相關要求進行了解讀,其次探討了研究發現的學生概念迷思,最後分享了一個教學案例。講座吸引到約 50 位數學教師參加,參加者認爲該講座提升了他們對中學統計與概率教與學的認識。

4. **小學數學課堂教學大賽。**11 月 22–23 日,本會借濠江中學附屬小學禮堂進行了「慶回歸 2025 年度全澳小學數學課堂教學大賽」。爲提升本澳小學數學教學質量,是次大賽特選了 5 節本澳小學數學優質課堂教學案例進行展示,涉及的內容既有傳統的幾何,也有較現代的概率和數學廣角,是次大賽給本澳數學教師提供了一次互動教學研究平臺。通過多位經驗豐富的數學教育專家的點評,提升了教師的教學理論與實踐素養。大賽評委分別是:中國教育學會數學教育研究發展中心嘗試教學理論研究會理事長、華東師範大學教育科學院兼職研究員、南京師範大學兼職教授邱學華先生;貴陽市教育科學研究所副所長、中學正高級教師、特級教師宋薇老師;澳門城市大學教育學院課程主任、助理教授、博士生導師代毅老師;史豐收國際教育總部主任、中國教育學會青少年創新思維教育研究中心理事史豐寶先生和中國奧林匹克數學教練員、本會秘書長、《澳門數學教育》常務編委鄧海棠博士。大賽吸引到約 260 名數學教師參加。

交流活動

本會組織澳門各間學校 20 名數學教師,于 12 月 20–25 日前往瀋陽、長春、吉林交流學習。期間我們拜訪了東北師範大學附屬中學自由校區和吉林大學前衛校區,參觀了吉林省博物院、僞滿皇宮博物院、東北淪陷史陳列館、長春電影製片廠和瀋陽故宮,游覽了長白山景區。團員們既瞭解了日本軍國主義侵略我國令人髮指的罪證,也通過參觀長影瞭解新中國的發展歷程,更是親身體驗北國風光,萬里雪飄的壯麗景觀。

工作展望

2026 年,我們將開展四項活動。一是《AI 賦能數學項目學習設計:案例與實踐》講座,主講嘉賓是德國奧斯納布呂克大學理學博士、華東師範大學數學科學學院教授、博士生導師徐斌艷老師。二是《EduVenture® X 在探索式戶外學習中的創新應用與實踐》工作坊,特邀嘉賓是香港中文大學課程與教學系莊紹勇教授。三是澳門中學數學新課程新教材教學教研系列活動,其中有人民教育出版社章建躍博士的《核心素養導向的中學數學課程教學改革》講座,以及初中和高中的同課异構活動。四是組織澳門高中生參加美國高中數學國際邀請賽,希望得到各位理事的大力支持。

本會將繼續支持澳門特區政府、教青局的工作,在澳門基金會、教青局和中聯辦的大力支持下,組織澳門數學老師積極參與數學教研活動,到內地的參訪活動,爲澳門學生數學素養的提升做出我們應有的貢獻。

最後,藉此機會衷心感謝澳門特區政府、澳門基金會、教青局、中聯辦、澳門各間學校校長、副校長、主任和數學教師,以及來自各地的數學教育同仁一直以來對本會工作的大力支持!

面向新世紀的澳門數學教育

——澳門中小學數學教學中存在的問題與若干探討

澳門大學教育學院

汪甄南

前言

1991-8-29 澳門政府正式頒佈了第一一/九一/M 號《澳門教育制度》法律,這是澳葡政府四百多年來第一次在教育範疇內的立法,《澳門教育制度》法令的頒佈,標誌著澳門的教育改革,開始進入一個全新的歷史時期。

1995 年澳門政府第一次出臺了《澳門數學課程大綱(試用)》,為澳門教育有史以來無大綱劃上了句號。新大綱的制訂,將進一步推動澳門教育改革的深入發展,為培養澳門新世紀建設人才作出貢獻。這是值得每一個澳門教育工作者珍視和高興的。

1999-12-20 澳門回歸祖國,這一偉大的歷史轉變,更給澳門的教育改革賦予了強大的生命力。

研究和探討如何制訂出一個符合新世紀要求的、並在落實數學基礎知識、培養學生基本技能、發展學生思維能力及創新精神,以適應澳門多元化教育體制下的數學教學大綱。這是每一個澳門數學教育工作者所渴望與期待的。

澳門的數學課程改革,不但要汲取國際的、鄰近地區的以及國內先進的教改經驗,同時也必須保留澳門自己的、適合澳門社會的、行之有效的教學精華。

多元化的教育體制

多元化的教育體制,是澳門教育的特色。如何能創辦好在多元化教育體制下的優質教育,如何把澳門現存的多元化教育體制向現代化的多元教育體制轉化,這是擺在澳門每一個教育工作者面前的、必須深思和研究的重大課題。

澳門與外地的多元接軌的教育體系,意味著教師和學生必須面對不同的數學教材和考試要求,本澳的高三同學臨近畢業之際,不但要應付本校的畢業考試,還要千方百計的複習國內、臺灣高考資料,不少高三數學教師都有臺灣歷屆高考數學試題解答和國內的有關資

料,以幫助學生進行輔導。教師和學生都處於一種高度的緊張狀態,即使小學升初中,初中升高中,由於多元化辦學的特點,各校在教科書的選擇、教學內容的確定、教學進度的安排,都不盡相同,對他們來說,升學考試的艱難程度就可想而知了,應試教育在澳門得到最典型的體現。

如何使外地的教材在澳門的課堂教學中與澳門的實際相結合,不僅能夠使參加高考的學生受益,而且可以讓不參加高考的學生也受益,這就須要本澳的廣大學校和教師去精心設計每一堂課的教學內容和方法,使澳門傳統上只是與不同地區升學考試接軌的多元化教育體系,向現代意義上的多元化教育體系轉化,使課程體系選擇的多元化,不僅僅是為了不同的升學需要,而是眞正為了適合澳門多元化社會結構的需要和學生不同的擇業需要。新大綱應為現代多元化的優質教育提供更多的指引。

中小學數學教學中存在的一些弊端

在現行的澳門中小學數學教育現狀來看,傳統的數學知識體系仍然佔著主導地位,例如:運算能力、邏輯推理能力、空間想象能力等,但是,從澳門傳統的數學課程內容來看,卻存在著嚴重的缺陷,例如:

(1)知識面狹窄

從小學到初中,數學內容主要局限於數、式、及其運算與平面幾何等兩個部分,在國際上,同一階段的數學課程,往往同時通過“數學及其應用、實數、圖形與空間、代數與函數、統計與概率及數據處理”等領域來試圖反映數學教學的全貌。

(2)某些知識的教學要求偏高、偏激

這一問題在一些傳統內容上表現得更為突出,例如:小學範圍內大量繁瑣的四則計算、實數範圍內的計算、代數式的恆等變形、歐幾里得幾何的推理證明。有的教師即使是在教“10 以內的加減法”,也能變換出十幾種不同的題型,使得已經學會基本運算的孩子照樣出錯,這些做法已脫離了小一數學課的教學目標,大大超出了培養孩子基本能力的範疇,而演變成純粹的智力訓練,背離了數學的工具性、實用性的本質。

有的教師對學生的數學要求僵化,例如,無論在解題形式上、書寫格式上一定要求學生與教師所教的例題一模一樣,否則全部當錯,也有的教師嚴格要求學生無論在計算直式或橫式的結果上,一定要劃二條橫線,漏劃的也同樣當錯。這種偏激、僵化的教學要求,極大地抑止了學生的學習積極性,造成了學生數學思維的僵化。

(3)不少內容陳舊過時

在現行的中小學數學教材中,大量充斥著繁雜的 +、−、×、÷、乘方、開方運算、分式運算、

代數式恆等變形等。這些在現代數學和現實生活中起著微不足道的作用,卻被視為中小學數學的核心內容,要求學生反覆地學習和練習,特別是平面幾何,也許只有在澳門學生的課本中,仍然保留著如此完整的歐幾里得幾何體系。

“三 S 平面幾何”、“斯蓋尼三氏解析幾何”、“文風代數”這些陳舊教材,目前不少學校仍然作為教科書沿用至今。小學數學教材,絕大部分學校都選用 1985 年香港出版的“現代數學”,在“貨幣的認識”這部分內容中,直至 2000 年 3 月才正式出版了由澳門的盧蘭馨與方燕芬兩位教師編寫的“澳門的貨幣”補充教材,這才改變了澳門學生不學香港貨幣的奇怪現象。(此前只有部分澳門教師自發的改教這部分內容為澳門貨幣)

(4)忽視數學的實際應用

數學教學的重要目的,在於能用數學解決日常生活和工作中的實際問題,但目前的課程,忽視數學的實際應用,不注意培養學生的應用意識和應用能力,偏重於脫離實際的機械式訓練和題型教學,在學生的練習中,充斥著大量人為編造的應用題,這些題目都是可解的,且有唯一正確的答案,條件都是恰好的,沒有多餘的信息,長期大量練習的結果,是導致學生思維的僵化。目前國際上有不少關於“數學開放題”的研究與教學,這是培養學生活用知識、發展思維的良好途徑。

“削枝強幹”,刪繁就簡,減輕學生負擔

為什麼澳門的中小學生普遍存在“驚數”的現象,這與我們數學教學的內容、教學方法與要求有著莫大的關係,學生從小學開始,由於種種原因,就存在“不敢抬起頭來學數”的現象。“背數”的現象更是十分普遍。

大家知道,數學知識呈現著強烈的系統性、邏輯性,在數學教學的過程中,特別要求教師注意基礎知識的教學,應該面向全班,面向大眾,讓學生掌握最基本的數學要求,這是我們數學教學的基本方針,同時,我們的教學還必須重視反映概念的形成過程,結論的推導過程和解題的思維過程,以利學生對知識的再發現,培養學生主動探索的精神。使學生所學的數學知識,由知識點延伸成知識鏈,使之構成縱橫交錯的知識網。

新大綱提出了受到廣泛教師認同的教育目標,隨之而來的是對教學內容的安排與處理,除了在教學內容處理上必須刪繁就簡,“削枝強幹”之外,在教師的教學自主與進度調節等方面,也必須有一個彈性的框架,以利於適應學生個體的差異和因材施教。

所謂“削枝強幹”,就是要讓學生從現實生活中學習數學、發展數學,刪除一些與社會需要脫節的、與數學發展相背離的、與現實有效的智力活動相沖突而恰恰是導致大批數學差生的內容,例如枯燥的四則混合運算、繁難的算術應用題、複雜的多項式恆等變形以及純歐幾里得體系的推理幾何等。

在課程安排上,也應符合“削枝強幹”的精神,除了必修課之外,增潤課、活動課也應加

以緊密配合，使數學教學盡可能做到“操作活動數學化（如通過分物活動，講清除法的初步認識等），抽象概念具體化（如通過模型，認識異面直線的基本概念，學生自己動手制作立體幾何的教具和學具等），靜止概念動態化（如橢圓、雙曲線標準方程的推導，可通過教具的演示來建立等）”。

新大綱在緊密聯繫生活的原則下應增加估算、統計、抽樣、數據分析、線性規劃、圖論以及空間與圖形等知識，使學生在全面認識數學的同時，獲得學好數學的自信。

“讓孩子有一個愉快的童年”，這是國內近年來在教育改革中提出對學生要“減輕負擔”的一項明確的要求。第二次國際教育評價表明：國內 13 歲學生週數學課堂學習時間最長，約 307 分鐘（一般在 108–230 之間）。國內用於數學課堂的時間每週要高出 80 分鐘以上，每週數學的課外作業時間，37% 的學生回答多於 4 小時，而大多數國家的多數學生的回答是每週 1 小時或少於 1 小時。

澳門的中一數學教學中存在的情況又怎樣呢？

澳門官校：中一週數學課堂學習時間 240 分鐘。

澳門私校：中一週數學課堂學習時間一般為 240–320 分鐘（其中不計練習課與督課時間），而數學家課時間則要超過每週 4 小時。

為什麼澳門不少學生，比其它地區的學生在數學學習時間更長、家課負擔更重、留級制度更嚴格的情況下，而數學的整體學業成績仍然很不理想呢？要改變這一情況，我們必須從數學的課程設置、內容安排、教學要求、乃至多元化教育體制的整合上，加以認眞的探索和研究。

中小學數學課程的銜接問題

中小數學課程的銜接，在澳門歷來是一個比較突出的問題，由於中一學生絕大部分來自本澳不同的小學，長期以來，他們在自己學校的數學學習環境中，形成了不同的學習定勢，當他們進入中學之後，無論在學校環境，課程設置，教學要求乃至老師的教學風格，都有一個適應過程，問題是適應期的長短和教學效果。如何做好中小學數學課程的銜接？

（1）做好教學要求的順應與學生學習定勢的轉變

從小學升到中學，對學生來說，他們必須面對新的學校、新的教師、新的同學，對他們來說都是一種極大的挑戰，除了覺得“自豪與好奇”之外也會給他們帶來不少的“困惑”。

其次，小學階段的數學學習，雖然他們學過一些代數幾何的初步知識，但還是以四則運算為主，而中學開始，就要系統學習代數和幾何，從知識層面的要求來說，已與小學迥然不同，教師對他們的教學要求也應有一個順應過程，在教學過程中，不過分拘泥數學形式的嚴謹，而是從學生的認知特點出發，注重數學思想和方法的傳授，並且文字表達要生動活潑，貼近學生生活，富有趣味性。例如，在講述有理數的運算時，關於減法法則的引入，可先給

出一組如下的算式：

$$3-0=3$$
$$3-1=2$$
$$3-2=1$$
$$3-3=0$$
$$3-4=?$$

然後，讓學生自己進行觀察、分析、猜測，進而找出結論。

關於乘法法則的引入，則是分別先給出如下兩組算式：

$$\begin{array}{ll} 3\times3=9 & -3\times3=-9 \\ 3\times2=6 & -3\times2=-6 \\ 3\times1=3 & -3\times1=-3 \\ 3\times0=0 & -3\times0=0 \\ 3\times(-1)=? & -3\times(-1)=? \end{array}$$

讓學生先由左邊一組算式找出異號相乘的法則，再由右邊一組算式找出負負相乘的法則。

這樣處理，盡管從科學上說並不十分嚴謹，但是學生很容易從中體會到法則的合理性，並且，由於學生的直接參與，學生對數學法則的得出有了一定的瞭解，如果從掌握數學思想方法的角度考慮，對學生的影響就更為深遠了。

（2）重覆不等於銜接，銜接需要適度的重覆

所謂“引入”、“覆習舊知識”、“以舊帶新”，其目的在於一個“新”字，也就是如何能更有效地向學生做好對舊知識的過渡與新知識的傳授，過多覆習小學數學知識或不考慮學生原有的數學基礎的教法，都會極大地挫傷學生學習數學的積極性，不利於中小學數學知識的銜接。新大綱對中小學數學內容有較好的安排，如小五、小六學生學過與中學有關的內容有：正負數、簡易方程、比與比例、面積（平行四邊形、梯形、三角形、多邊形）、體積（正方體、長方體、不規則立體）、對稱、圓等。而至中一相關的內容只有有理數、角和平行線、面積，中二有比和比例、圓和立體圖形。其它內容一般不單獨出現，大綱這樣的安排，體現了中小學數學知識銜接的需要，體現了數學知識適度重覆，也符合知識遷移的需要。

（3）溝通、瞭解是做好中小學數學課程銜接的保證

面對來自不同學校的中一新生，教師應主動、熱情地做好溝通、瞭解工作，這是任何其它工作所不能替代的。這一溝通、瞭解，應貫穿在教學工作的全過程，對中一數學教師來說，應該清晰掌握學生原有的數學基礎知識，應該知道他們原校數學課的教學要求是什麼？家課量有多少？他們數學語言的表達能力如何等。除了教師的瞭解之外，也應創造條件，讓學生提出一些他們想知道的問題，只有通過教師、學生的互動，才能營造出一個和諧的教學環境，才能建立起真正的教學民主。

"溝通"是建立互信,"瞭解"是保證教學,要做好中小數學課程的銜接,做好這兩點,才能達到基本的保證。

數學教學中的『創新』問題

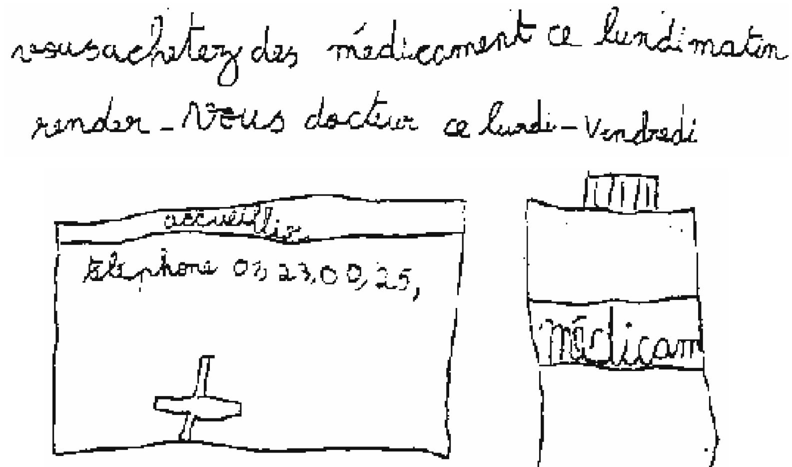
華東師範大學張奠宙教授曾經提出:"基礎+創造=優質教育",這是數學教改的方向,也是數學課堂教學要極力實現的目標。

近年來在數學課堂教學中,許多專家強調"以學生為主體",注重"學法"的探討,要求教師在教學過程中應留給學生有較大的發展空間,這是培養學生具有創造意識的做法,應該引起廣大中小學數學教師注意和探索。

事實上,對學生來說,不同的學生具有不同的數學觀,有的學生認為數學是神秘的,高不可攀、不可理解的;有的學生認為數學是學習一些符號體系,是枯燥無味的;也有的學生認為數學是充滿智慧的,思考數學是很有樂趣的。學生不同的數學觀,會導致不同的數學學習方法和學習態度。如果一個學生產生了數學艱深難懂、枯燥無味、高不可攀的念頭,其結果必然會導致回避數學課、回避數學教師、不願意接觸數學讀物的自閉行為。有的學校甚至出現學生抵制數學教師上課的現象。

如果一個數學教師認為教數學就是教一些數學公式、法則、記憶和練習,那麼,他的課堂教學行為必然是滿堂灌、注入式的。這與培養學生創新精神是背道而馳的。蘇聯數學教育家斯托利亞爾認為,數學教學是數學活動的教學,他說:"在教學中,在某種程度上要反映出數學的創造過程,不僅教學生證明,而且要教學生猜想",這就是說,要培養學生的創造性思維能力,必須要改革教材與教學思想的傳統模式,使之既要體現邏輯演繹的特徵,又要展示數學發現的過程。這樣,便於學生聯想、發現與創建"新知識"。

下面是筆者最近對法國巴黎 94 區 BARBUS (B)小學一年班學生 OSCAR 的一次了解,筆者問他,你們學校老師是怎樣教你們學數的? OSCAR 就拿了一張紙寫出了下面的一些內容:



OSCAR 所寫的中文意思是:你要買藥的時間是星期一早上,約見醫生的時間是星期一至星期五。接下來他畫了一張卡,這是法國每個市民看醫生必須要有的醫生約見卡,上面有約見醫生的電話號碼,下面他再畫了一瓶藥,上面寫了不完整的藥名,OSCAR 還特別強調,藥瓶後面還有字,因為前面看不見。

結合生活學習數學,這是一個值得參考的例子,星期、數字以及如何應用,通過活生生的看醫生的例子被小朋友接受了,而且還給學生留有較大的思維空間進行聯想——藥瓶上的名字沒有寫完,後面還有。

新大綱在培養學生創新意識方面尚待進一步改進與加強。筆者認為,可從以下幾個方面加以考慮:

(1) 在教材的選擇和教學內容的安排上,以反映新世紀對市民所必須的數學思想方法為主線加以選擇。

(2) 以與學生年齡特徵相適應的大眾化、生活化的方式呈現數學內容。

(3) 使學生在活動中,在現實生活中學習數學、發展數學。

"為創造性而教"已成為目前國際教育界喊得最響的口號,在步入新世紀之際,我們更應該把"創新"作為一種教學理念,貫穿於教學的每一個層面,並最終落實於學生的培養上。

數學教學改革的關鍵是教師

中小學階段的數學教學,應該讓學生體會到數學是從普通的人類實踐中發展起來的,我們每個人的生活中都能遇到許多產生這種發展的自然機會,數學教師必須抓住這些機會,並努力去培養和促進這種發展。

從澳門特定的歷史背景和社會條件來看,要有效的促進數學教育的改革,除了要有符合新世紀要求精神的新的數學教學大綱為指引之外,教師的角色,起著無可比擬的作用。一個教師能否在課堂教學中對新的教材駕馭自如,恰當地發揮自身的創造性,必須堅持做好以下幾點:

(1) 對教師來說,特別要瞭解一些電腦對現代數學發展的影響,更新本身的數學觀,使課堂教學變得充滿智慧,貼近生活,富有生命力。

(2) 教師還應充分認識到,教學工作是一種創造性的勞動,面對不同的學生,不同的教學內容,其課堂教學應該是多姿多彩的。

(3) 教師還應竭力擺脫目前考試制度下形成的一系列僵化的教條,努力以自己生動活潑的課堂教學,去探索教學規律,去激勵學生學習數學的興趣,盡可能地減少學生的"抄數"、"背數"的現象,這對澳門學生來說,至為重要。

(4) 教師本身的數學基本功要扎實,由於澳門特定的教學環境,不少學校教師的薪酬與任教堂數掛鉤,所以"多頭"教學的現象比較普遍,不少教師除了任教數學課之外,還要任教其它課程,因此要求教師在上數學堂時,無論在概念、運算、思維、操

作、應變等各方面要有扎實的基礎,使課堂教學不犯科學性錯誤。帶領學生走上正確的數學學習道路。

(5) 教師應重視和發揮自己的經驗,因為教學經驗是教師多年來從事教學實踐的結果,是教師對自己教學活動成敗進止的體驗,它對課程改革的策略具有指導作用。

澳門的不少學校存在著嚴格的升留級制度,但是,在步入新世紀的學校教育,再不要把"數學"作為一個"篩子"來淘汰人,而應該把 "數學"作為一個"泵" 來發展人,否則,其結果必然導致不少學生在 "數學"面前自信心受到極大的傷害,以一種被淘汰者的心態"留級",或從一間學校轉向另一間學校、從學校走向社會。

思考題

(1) 在澳門中小學數學教學中,目前你認為存在的最大的問題是什麼?

(2) 在澳門現行的中小學數學教材中,你覺得是否需要改革? 如何改革?

(3) 如何解決教研、備課、工作量(堂數)之間的矛盾? 你希望政府、學校對教師的教學作出哪些支援?

(4) 在學校、教師、學生、教材、教法諸因素中,哪些因素對提高數學教學質量的影響最大? 為什麼?

(5) 一個優秀的數學教師應具備哪些質素?

(6) 如何做好面向大多數學生進行數學教學?

(7) 你對澳門新的數學教學大綱有哪些期望與要求?

參考文獻

[1] 澳門教育暨青年局. 數學大綱.

[2] 顧泠沅. 要重視數學策略的研究.

[3] 劉兼. 面向 21 世紀的數學課程改革的思路.

[4] 王而治. 跨世紀的一步.

[5] 薛凌. 關於讓學生主動參與課堂教學活動的若干思考.

[6] 徐澤洲. 試論中小學數學教學的新思路.

[7] 張奠宙. 數學素質教育教案精編.

[8] 弗賴登塔爾. 作為教育任務的數學教學.

註:本文系澳門課程改革(第二階段)數學科小組簡報於 2000 年澳門課程改革研討會論文集中的文章。

事實與假設

首都師範大學數學科學學院

方運加

當下的中小學數學教研,言必“問題解決”,卻不知爲何少有人議論“問題意識”;大夥口不離“思維”二字,卻隻字不提“思維是對現實的間接的、概括的認識過程”. 思維絕不止步于感性或感知水平的認識(只須檢索“數感”、“量感”等詞匯的通常含義,不難瞭解這兩個名詞表達的是對數或量的感覺水平的認識,不大可能是數學思維能力的培養目標. 據說,“量感”對于畫家或書法家的筆觸布局確實不可或缺);思維可以使人認識沒有直接觀察或接觸過的事物;思維能使我們預見事物的進程以及思想行爲的後果;此外,應該特別指出:數學中的“假設”是數學思維須臾不離的思想形式,可以說:無假設,不數學. 可惜! 所有這些事關數學思維內涵的常識,卻少有人以鮮明的方式在日常數學教學中強調並落實. 前述所議,是數學教學的百年傳統,應該時時想、常常做. 如若數學教學只是“天天讀”般的強調學習“有用的數學”,言必“思維”二字,卻忽視對于思維(思考)方法的揭示,這樣的數學教學不會令人滿意.

數學的思考方法主要包括比較、分析與綜合、抽象與概括、“假設爲眞”. 這些思考或思想方法對數學教學來說不可或缺,每節數學課都可以通過習題的示例教學滲透給學生. 教師應該預設有針對性的典型例題使學生逐步認識到,面對所研究的對象,應該根據同樣的屬性,在同一種關係上來比較、區別、歸納出相關結論,從而避免“風馬牛不相及”的空洞說教. 比較的目的是去除無關的對象或要素,集中于可比較的研究對象. 每堂課的數學思維培養應該具體化爲對數學思想及問題的“分析、綜合”、“抽象、概括”. 數學教學應該自覺遵循邏輯思考的基本規律,注重示範″充足理由律″,且必須以學生的認知水平及已知、已會爲前提;所涉知識的概念、名詞應該是必不可缺,且越精越少越好,勿使浮萍無根的時髦話彌漫數學課堂空間. 數學教育要研理論學、究理育人.

文章《活用數 0 和“已學(會)”解讀新教材》中提出:$a - 0 = a$ 這個“基本事實”中的“負數減零”的教學可以從引導學生觀察溫度計情景開始. 比如 $-2℃$ 在 $0℃$ 下方 2 個單位,即 -2 比 0 小 2(記爲 -2),故有 $-2-0=-2$,從而由“正數減零、零減零、負數減零”抽象出:$a - 0 = a$ 這個“基本事實”. 這有必要嗎?

暫不提“基本事實”究竟是什麼東東! 由“0℃”引出“負數”這個新知曾是多年常見的有理數教學的情景創設,似乎很自然,但實際上,無論攝氏度還是華氏度、開氏度,被創設的

思想源頭本身就得益于數學知識的先備性,體現了數學知識的簡約以及易學易用的特點.

1592 年,伽利略發明了測量溫度的器具. 1612 年,賽托若(1561 – 1636) 在伽利略發明的基礎上,用一個封閉的器具測量了人體的溫度,被公認是第一個體溫表. 1713 年,丹尼爾・法瑞黑特(1686 – 1736) 在溫度計上設置了刻度,首次把冰融化的溫度和健康人體的溫度用兩個刻痕標上,當他覺察到冰融化的溫度是確定的,但水結冰的溫度則是變化的,就將冰,水和鹽混和起來,把這時的溫度記作 0 度,再將冰融化的溫度確定爲 32 度,人體的溫度則是 96 度. 1835 年,人們發現人體的正常溫度是 98. 6 度(攝氏 37 度).

丹尼爾・法瑞黑特最終選擇了水銀. 據此,溫度計的上限水沸騰點確定爲 212 度,這是華氏度. 1742 年,瑞典科學家安德司・塞勒雖斯(1701 – 1744) 把水結冰的點定爲 100 度,水沸騰的點定爲 0 度. 之後,卡若盧斯・林紐斯(1707 – 1778) 把這個順序倒了過來,成爲現今廣泛使用的攝氏度.

華氏度與攝氏度的轉換公式:

$$F = \frac{9}{5}C + 32, \ C = \frac{5}{9}(F - 32).$$

1848 年,開爾文(1824 – 1907) 引入了絕對零度的概念,相當于攝氏零下 273. 15 度,攝氏 0 度就是 273. 15K,100 攝氏度就是 373. 15K(讀作"開氏 373. 15 度").

正負數的概念及區分是劉徽首先貢獻的.《九章算術》(成書于公元一世紀) 最早給出了正負數加減法法則:"同名相除,异名相益";"正無入正之,負無入負之". 這裏,"名" 是"號","除" 是減,"相益"、"相除" 分别是兩數的絕對值"相加"、"相减","無" 是"零".

16、17 世紀,歐洲數學家普遍不承認負數是數,直到 18 世紀,零及負數才得到普遍認可. 19 世紀,整數理論建立起來後,負數在理論上得到了邏輯確認. 我們有理由猜想,僅因地理、交流、文化等方面的因素,劉徽的首創未能及時對接歐洲中世紀及之後的數學,否則,數學近現代史一定會被改寫.

前述正負數與零在溫度計量方法中的歷史作用很容易讓學生自主檢索到,若借助 *DeepSeek*,可能會有更多的收穫. 數學教師應該對此發揮主動引導作用,幫助學生瞭解、分析上述過程. 計量溫度的歷史是典型的數學應用實例,應該使學生瞭解到,當人們有了需要,數學可以立等提供計量的思想與方法,今天所學包括 0、負數、正數的有理數集合,體現了數學學科具有實際應用上的先備性. 應該讓學生充分理解數學的這一鮮明特點,有需要有難處,最好找數學.

0、負數、正數可以從自然數集合中通過算術運算獲得. 不妨直白疑問:爲什麼數學教學不可以由數學已知導出數學新知,然後再舉例應用新知? 運用數學的邏輯便利來獲取數學新知,這樣的學習效率會更高,這是數學學科教育的優勢,先根據已知獲取新知,再設法綜合應用舊知與新知來鞏固新知. 培養數學應用能力不必從"盤古開天地" 開始,而應該充分發揮數學知識系統的固有特點,用已知、提假設、尋因果、獲新知,說理求證握新知. 由淺入深,由已知獲未知,充分運用邏輯便利導出新知識. 效率更高、效果更好!

文章中提到“$a-0=a$ 是基本事實”,這話相當于什麼都沒說. 這個式子是整數集合的重要性質之一“$a+0=a$”的變式. 從代數角度看,整數關于加法構成了交換群,式中的0是單位元. 從集合角度看,零可以定義爲空集合,即 $0:=\varnothing$;自然數1可以定義爲 $1:=\{\varnothing\}=0\cup\{0\}$. 這些內容反映出用集合理論可以研究數的集合,便于討論整數的整體性質. 可惜,小學數學課堂雖然早早引入了集合這個名詞,但卻未發揮任何有當下價值的作用. 因爲小學階段並不從數的整體角度進行相關的研究或學習,而是分步、分塊的學習整數或分數的一些初步知識,不可能達到本質性認識. 在這種情況下引進“集合”這個名詞,徒增負擔,沒有意義.

數學講究以假設爲思想的出發點. 例如,“點”作爲數學研究的對象,其存在性是人爲假設的,以假設爲眞. 1 阿秒爲一百億億分之一秒(10^{-18}秒),光在 1 阿秒內傳播0.3納米的距離,即便如此,仍有時長和距離,二者皆非“點”.“點”無大小是人們的思想共識. 初中階段學幾何、學推理,這個思想是不能打馬虎眼的. 起碼,初中數學教師對此應該心知肚明.

數學中的距離概念是從事實中抽象出來的,但並非基本事實. 例如,北京到上海的距離可以是高鐵的運行距離,也可以是汽車的交通距離,還可以是兩市地界的最近距離,也不妨是地球儀上兩點(兩市)的球面距離;還可以拋弃一切無關因素只論這兩點在所處時空中的距離,或者引入引力因素只討論二者在引力空間中的引力距離. 上述這些距離都不是純數學(具體說,都不是平面幾何意義上的距離)意義上的距離. 應該說,數學概念中的距離在平面幾何中的表達是綫段的生成及長短,屬於思想上的事物,不是客觀存在,是地道的數學假設. 這個假設因擺脫了實際的或各種實用的觀點的束縛而具有普適性. 在數學中,點、直綫、平面都是假設性存在,並非“基本實事”這個詞組所能概括的! 數學中的“公理”是凌駕于一切事實之上的毫無偏見 的思想上的規定(可以用來認識或描述所有那些基本或不基本的“fact”),學生應該從初中階段開始,明確掌握這個思想——axiom,又稱“自明之理”或“不證自明之理”,也可以稱爲“公認的假設”,即“思想上的約定”——“共識”.

(本文系《中小學數學》(初中版)2025 年第 3 期編者語)

三角形全等的條件:初二學生的測試結果

澳門大學教育學院　江春蓮

深圳市龍崗區深圳中學龍崗學校　柳　芳

深圳市龍華區外國語學校教育集團(觀湖校區)　馬清源

摘要: 本文呈現的是在兩個三角形中增加一條中線、一條高線或一條角平分線三種情況下,初二學生提出的用來判斷兩個三角形全等條件的結果分析。

一、問題提出

2012 年,在第一屆澳門中學數學優質課堂教學評比大會中,來自澳門培道中學的劉勁峰老師講授的初二年級《三角形全等條件的進一步探究》一課獲得了一等獎。在這節課裏,學生探究了增加一條中線,或一條高線,或一條角平分線的六種組合能否成爲判定定理的問題(江春蓮,2012)。後來,江春蓮(2013)將該問題拓展到了 27 種不同情況,並對它們進行了完整的討論,得出其中只有 19 種情況可以成爲判定定理。

二、方法

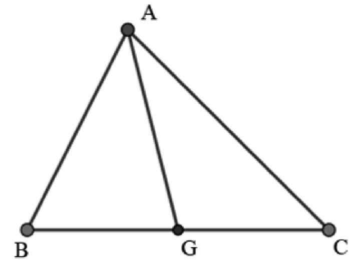
2024 年秋,我們將該問題進行了改編,成了圖 1 所示的問題,對來自深圳某中學初二年級某班的 43 名同學(其中男生 25 名,占 58%;女生 18 名,占 42%)進行了測試。該校使用的教科書是北京師範大學出版社出版的《義務教育教科書・數學》(北京師範大學出版集團,2023),在該系列的教材中,三角形全等的內容被安排在七年級下冊第四章。該章共有四節,依次是認識三角形、圖形的全等、探索三角形全等的條件、用尺規作三角形、利用三角形全等測距離等。因此,參與本研究的學生已經學習過三角形全等的概念、判定等相關知識,具備進一步探究的基礎。

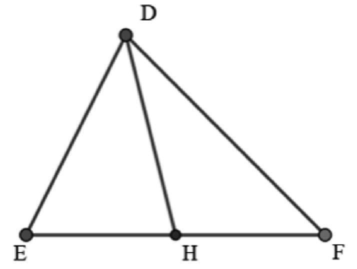
本研究是在 2 個課時 80 分鐘的時間內進行的。在學生開始作答前,老師先複習了三角形全等的概念及性質(對應邊相等,對應角相等),接著與學生一起探討它們對應的中線、高線和角平分線之間的相等關係。進而提出要探討的問題,並以中線情況下一個小三角形三條對應邊分別相等爲例,說明其可以成爲兩個大三角形全等的判定定理。接著是 50 分鐘的學生作答時間。學生需要對圖 1 所示的三種問題分別提出三個問題,並對提出的三個

問題進行證明，檢驗其是否能成爲三角形全等的判定條件。像情況 1 一樣，在測試卷中情況 2 和情況 3 下也給學生留出了足夠的空間作答。在最後的 15 分鐘，學生完成後面一道開放題的回答，這部分內容不在此文中介紹。

圖 1. 數學問題提出能力測試卷

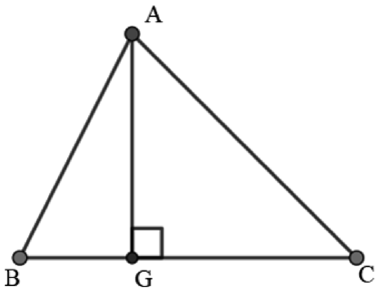
情況 1：在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 中，AG 和 DH 分別是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的中線。

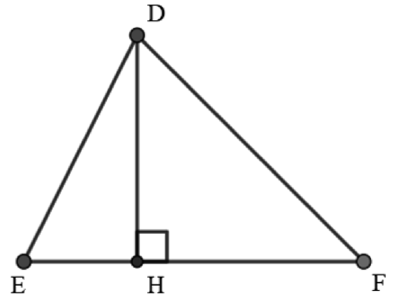




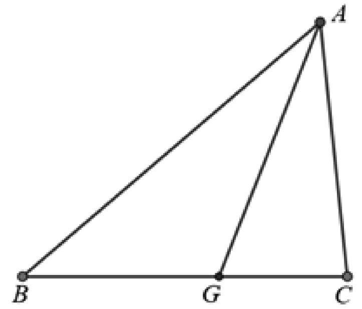
問題 1：
證明：
問題 2：
證明：
問題 3：
證明：

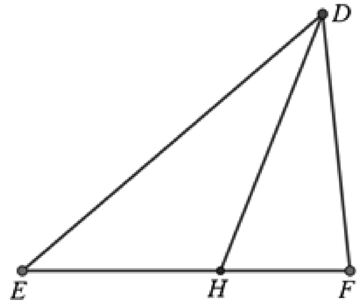
情況 2：在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 中，AG 和 DH 分別是邊 BC 和 EF 的高線。





情況 3：在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 中，AG 和 DH 分別是 $\angle BAC$ 和 $\angle EDF$ 的角平分線。





從數學結構來看,情況一和情況三比較類似,因為如果由中線或角平分線分割而形成的小三角形全等,我們就能得到兩個大三角形全等,但情況二卻不是。因此,可以將判定三角形全等的 SSS,SAS,ASA,和 AAS 定理套到小三角形中,這樣就可得到很多不同的判定定理。當然,情況二中也有直角的條件,於是 HL 就可發揮作用,高線又是兩個小三角形的公共邊,所以檢驗起來應該比另外兩種情況更容易。

三、結果

下面我們將按照問題的順序,依次呈現學生提出問題中的給定條件。這些條件涉及兩個三角形的對應邊,爲節省篇幅,下面僅對 $\triangle ABC$ 中的邊和角的標示進行說明。當中線、高線或角平分線加進來時,角 $\angle BAC$ 和邊 BC 將被分成兩部分。為此,我們將使用以下編碼(圖 2):用 $S(side)$ 表示 AB 和 AC 邊,S_B 表示底邊 BC,S_1 表示 BG, S_2 表示 GC;$A(angle)$ 表示角 $\angle B$ 和 $\angle C$,A_a 表示 $\angle BAC$,A_1 表示 $\angle BAG$,A_2 表示 $\angle GAC$,A_3 表示 $\angle BGA$,A_4 表示 $\angle AGC$;S_M 表示中线,S_H 表示高线,而 S_A 表示角平分线。另外,當學生給定的條件涉及到一個小三角形時,我們將按照習慣的方式(如 SSS、SAS 等形式)進行編碼。若給定的條件涉及兩個或三個三角形,我們則在中間加“-”進行表示。如果給定的條件中不含中線、高線或角平分線時,我們將在標示後面分別添加 1,2,3 以示區分。

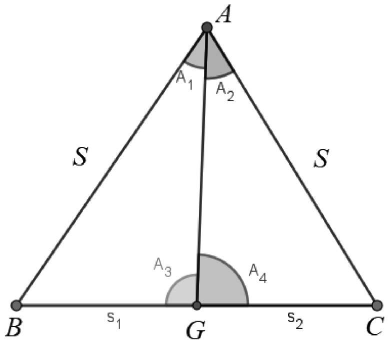


圖 2. 標示說明

情況 1:當加入中線時

第 1 - 1 類:SS_MS_2

回答樣例:在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 中,線段 AG 和線段 DH 分別是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的中線,已知 $AC = DF$,$GC = HF$,$AG = DH$,證明:$\triangle ABC \cong \triangle DEF$($S1 - C1 - Q2$)。

描述:這個例子是課堂上老師給出例子的等價模型,由其給定的條件可以證明 $\triangle AGC \cong \triangle DHF$,由它不難證明 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$。其等價的類型是 SS_MS_1。

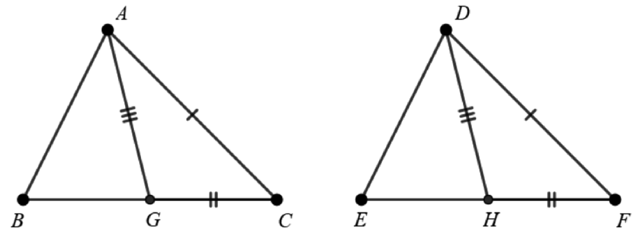


圖 1-1　SS_MS_2

第 1 － 2 類:$S_MA_3S_1$

回答樣例:在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 中,線段 AG 和線段 DH 分別是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的中線,已知 $BG = EH$, $\angle AGB = \angle DHE$, $AG = DH$ 時,證明:$\triangle ABC \cong \triangle DEF$($S33 - C1 - Q1$)。

描述:這裡給的條件是小三角形的 SAS,由其可得到 $\triangle ABG \cong \triangle DEH$。其等價的類型是 $S_MA_4S_2$。

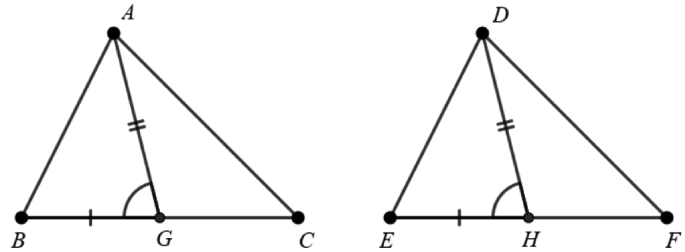


圖 1-2　$S_MA_3S_1$

第 1 － 3 類:$A_aA - S_M$

回答樣例:在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 中,線段 AG 和線段 DH 分別是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的中線,已知 $\angle BAC = \angle EDF$, $\angle C = \angle F$, $AG = DH$ 時,證明:$\triangle ABC \cong \triangle DEF$($S20 - C1 - Q3$)。

描述:這裡給定的兩角是大三角形的兩角,由它可得到 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ 和 $\triangle ABG \sim \triangle DEH$;又由 $AG = DH$,我們可以得到 $\triangle ABG \cong \triangle DEH$,所以可證明 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$。

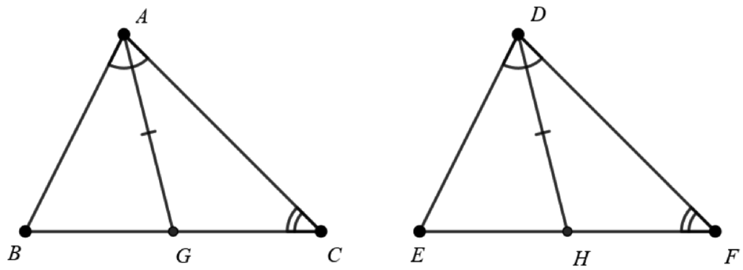


圖 1-3　A_aA-S_M

第 1 － 4 類:$AA - S_M$

回答樣例:在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 中,線段 AG 和線段 DH 分別是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的中線,已知 $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$, $AG = DH$ 時,證明:$\triangle ABC \cong \triangle DEF$($S10 - C1 - Q1$)。

描述:仿上一類,我們可以證明此類條件可證明 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$。

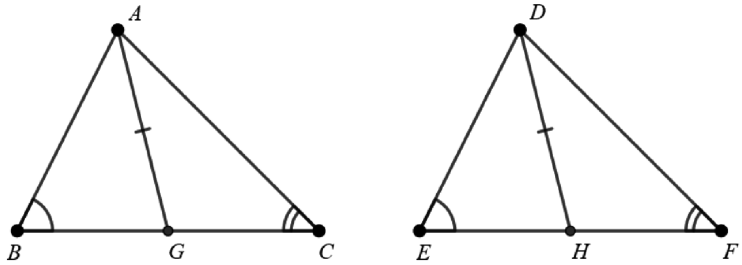


圖 1-4　AA-S_M

第 1 － 5 類:$SS_B - S_M$

回答樣例:在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 中,線段 AG 和線段 DH 分別是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的中線,已知 $AC = DF$,$BC = EF$,$AG = DH$ 時,證明:$\triangle ABC \cong \triangle DEF$($S27 - C1 - Q2$)。

描述:由中線的性質和 $BC = EF$,我們可以得到第 1 － 1 類中的條件 $GC = HF$,所以這裏給定的條件也是合適的。

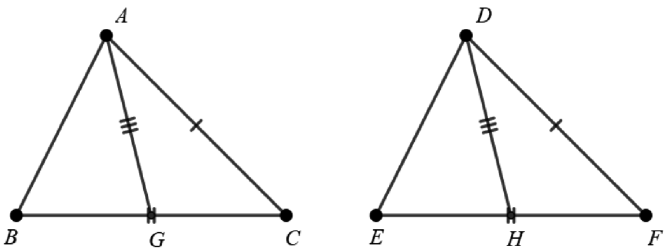


圖 1-5 SS_B-S_M

第 1 － 6 類:$U - SS_MS$

回答樣例:在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 中,線段 AG 和線段 DH 分別是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的中線,已知 $AB = DE$,$AC = DF$,$AG = DH$ 時,證明:$\triangle ABC \cong \triangle DEF$($S15 - C1 - Q1$)。

描述:這裏給出條件中的三條邊在單個三角形中形成“傘狀”的結構,所以我們在前面加上傘($Umbrella$)的英文第一個字母。這也是一個合適的條件,簡單證明如下(圖 1 － 6 右邊):將 AG 延長一倍至 M(類似地延長 DH 一倍至 N),連線段 BM 和 EN,則 $\triangle AGC \cong \triangle MGB$,於是 $BM = CA$,$\triangle ABM \cong \triangle DEN$($SSS$),由此可得 $\angle BAG = \angle EDH$,所以 $\triangle BAG = \triangle EDH$,由此可得 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$。

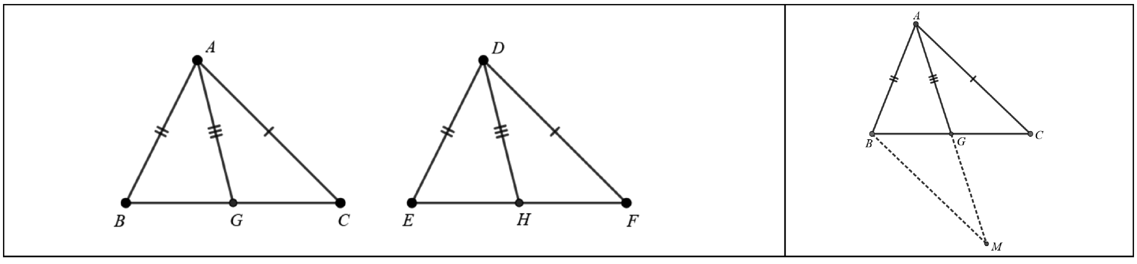


圖 1-6　U-SS_MS

第 1－7 類:$SA_a - S_M$

回答樣例:在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 中,線段 AG 和線段 DH 分別是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的中線,已知 $AC = DF$, $\angle BAC = \angle EDF$, $AG = DH$ 時,證明:$\triangle ABC \cong \triangle DEF$($S28 - C1 - Q3$)。

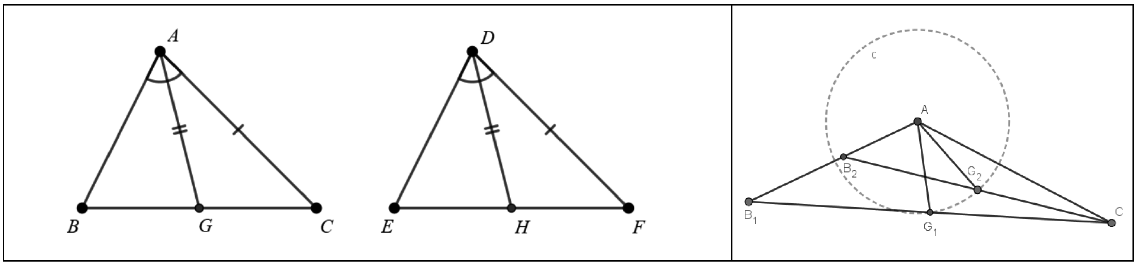


圖 1–7 SA_a-S_M

描述:這裏給出的條件是大三角形的一個角和小三角形的兩條邊。我們可以舉出反例(見圖 1－7 右邊)說明該條件不適合證明兩個大三角形全等。圖中 $\triangle AB_1C$ 和 $\triangle AB_2C$ 滿足樣例的條件,但它們不全等。

第 1－8 類:$A_1S_M - S_B$

回答樣例:在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 中,線段 AG 和線段 DH 分別是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的中線,已知 $\angle BAG = \angle EDH$, $BC = EF$, $AG = DH$ 時,證明:$\triangle ABC \cong \triangle DEF$($S36 - C1 - Q1$)。

描述:這裏給出的條件是小三角形的一角及其一夾邊,和大三角形的"底邊"。其等價的類型是"$A_2S_M - S_B$"。我們可以舉出反例(見圖 1－8 右邊)說明該條件不適合證明兩個大三角形全等。圖中 $\triangle A_1BC$ 和 $\triangle A_2BC$ 是滿足滿足樣例的條件,但它們不全等。

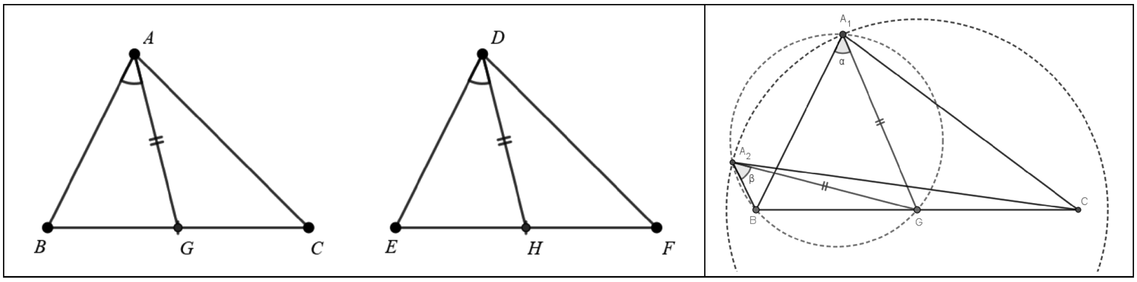


圖 1-8 A_1S_M-S_B

第 1－9 類:$SS - A_1 - 1$

回答樣例:在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 中,線段 AG 和線段 DH 分別是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的中線,已知 $\angle BAG = \angle EDH$, $AB = DE$, $AC = DF$ 時,證明:$\triangle ABC \cong \triangle DEF$($S17 - C1 - Q1$)。

描述:這裏給出的條件是大三角形的兩邊和一小角。其等價的類型是"$SS - A_2 - 1$"。我們可以舉出反例(見圖 1－9 右邊)說明該條件不適合證明兩個大三角形全等。圖中 $\triangle ABC_1$ 和 $\triangle ABC_2$ 是滿足樣例的條件,但它們不全等。

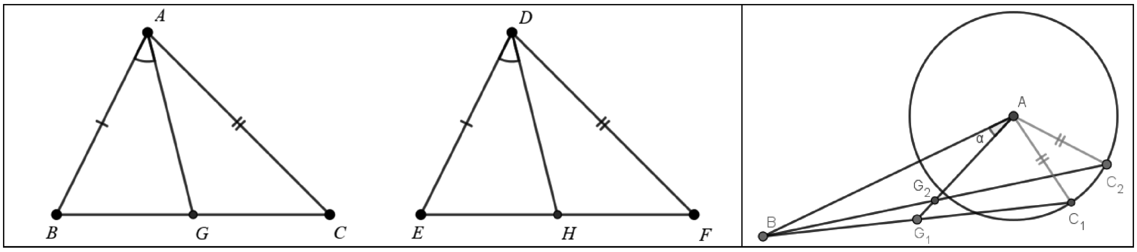


圖 1-9 SS-A_1-1

第 1 － 10 類:$A_1S_M - S$

回答樣例:在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 中,線段 AG 和線段 DH 分別是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的中線,已知 $\angle BAG = \angle EDH, AC = DF, AG = DH$ 時,能否證明 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$($S19 - C1 - Q2$)。

描述:這裏給出的條件是中線,左邊小三角形的一個小角和右邊小三角形的“腰”。其等價的類型是“$A_2S_M - S$”。我們可以舉出反例(見1 － 10圖右邊)說明該條件不適合證明兩各大三角形全等。圖中 $\triangle AB_1C_1$ 和 $\triangle AB_2C_2$ 是滿足樣例的條件,但它們不全等。

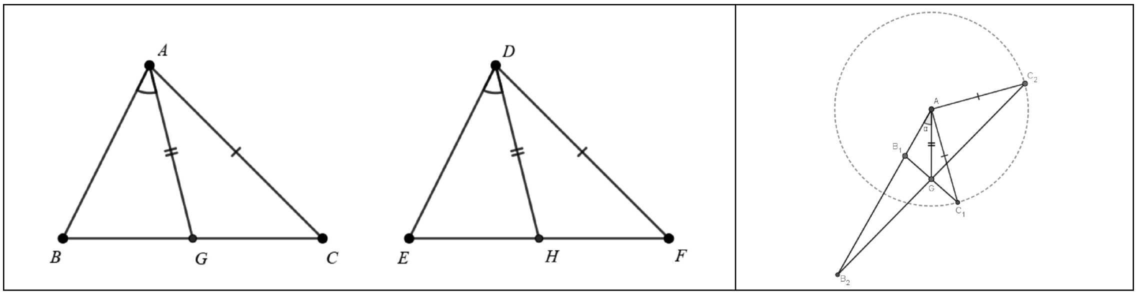


圖 1-10 A_1S_M-S

情況 2:当加入高線时

第 2 － 1 類:$U - SS_HS$

回答樣例:在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 中,線段 AG 和線段 DH 分別是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的高線,已知 $AC = DF, AB = DE, AG = DH$ 時,證明:$\triangle ABC \cong \triangle DEF$($S25 - C2 - Q1$)。

描述:這裡給出三條邊是由 $\triangle ABC$ 的“頂點”A 和從 $\triangle DEF$ 的“頂點”D 發出的三條邊(含高線),與情況一的第1 － 6類類似,我們把它記為“$U - SS_HS$”型。由 HL,我們可以得到 $\triangle ABG \cong \triangle DEH$ 和 $\triangle AGC \cong \triangle DHF$,所以 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$。

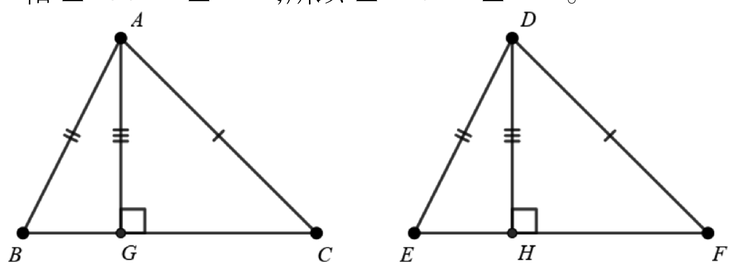


圖 2-1 U-SS_HS

第 2 - 2 類:$T - S_1S_HS_2$

回答樣例:在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 中,線段 AG 和線段 DH 分別是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的高線,已知 $BG = EH, GC = HF, AG = DH$ 時,證明:$\triangle ABC \cong \triangle DEF$($S21 - C2 - Q1$)。

描述:這裏給出三條對應邊在各自三角形的垂足處形成"T" 字形,所以我們將其記為"$T - S_1S_HS_2$" 型。由 SAS,我們可以得到 $\triangle ABG \cong \triangle DEH$ 和 $\triangle AGC \cong \triangle DHF$,所以 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$。

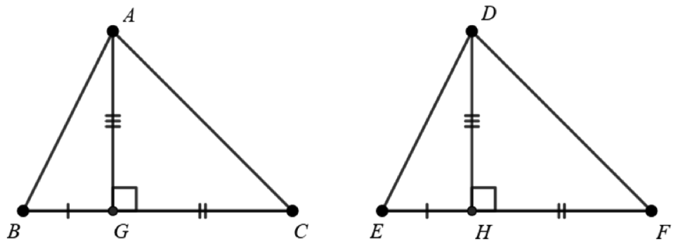


圖 2-2　T-$S_1S_HS_2$

第 2 - 3 類:$AA - S_H$

回答樣例:在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 中,線段 AG 和線段 DH 分別是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的高線,已知 $\angle B = \angle E, \angle C = \angle F, AG = DH$ 時,證明:$\triangle ABC \cong \triangle DEF$($S5 - C2 - Q2$)。

描述:這裏給出的條件涉及兩個大三角形的角,由此可以得到 $\triangle ABG \sim \triangle DEH$ 和 $\triangle AGC \sim \triangle DHF$,再由 $AG = DH$,我們又可以得到它們分別全等,所以 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$。當然,我們也可以由 AAS 得到小三角形分別對應全等證得。

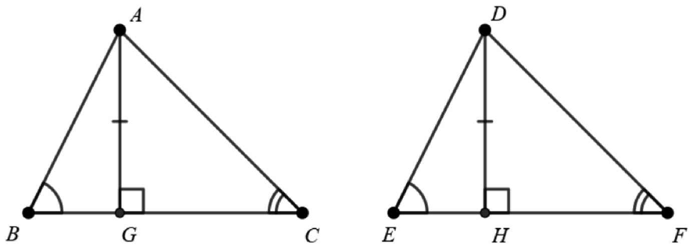


圖 2-3　AA-S_H

第 2 - 4 類:$A_1S_H - S$

回答樣例:在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 中,線段 AG 和線段 DH 分別是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的高線,已知 $\angle BAG = \angle EDH, AC = DF, AG = DH$ 時,能否證明 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$($S7 - C2 - Q3$)。

描述:這裏給出的是高、一小三角形中的一小角和另一小三角形中的一邊。其等價的類型是 $A_2S_H - S$。我們可以由 ASA 得到 $\triangle ABG \cong \triangle DEH$,再由 HL 得到 $\triangle AGC \cong \triangle DHF$,所以 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$。

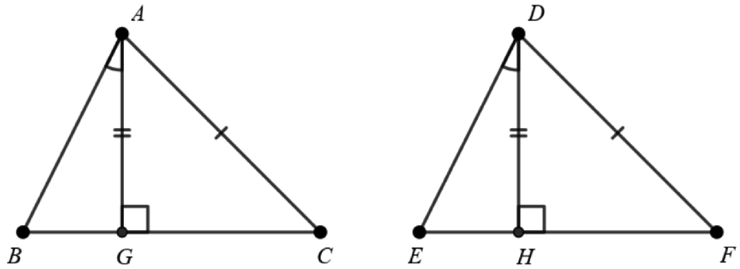


圖 2-4 A_1S_H-S

第 2 - 5 類:$SS_B - S_H$

回答樣例:在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 中,線段 AG 和線段 DH 分別是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的高線,已知 $AC = DF$,$BC = EF$,$AG = DH$ 時,證明:$\triangle ABC \cong \triangle DEF$($S22 - C2 - Q1$)。

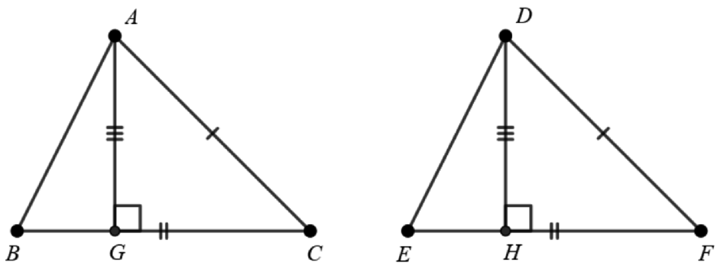


圖 2-5 SS_B-S_H

描述:這裏給出的條件是大三角形中的兩條邊和高線。由 HL,我們可以得到 $\triangle AGC \cong \triangle DHF$,所以有 $GC = HF$,再由 $BC = EF$,可得到 $BG = EH$,所以由 SAS 可得 $\triangle ABG \cong \triangle DEH$,所以 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$。

第 2 - 6 類:$SA_a - S_H$

回答樣例:在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 中,線段 AG 和線段 DH 分別是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的高線,已知 $AC = DF$,$\angle BAC = \angle EDF$,$AG = DH$ 時,證明:$\triangle ABC \cong \triangle DEF$($S4 - C2 - Q3$)。

描述:這裏給出的是大三角形的一“腰”、“頂角”及高。由 HL,我們可以得到 $\triangle AGC \cong \triangle DHF$,所以有 $\angle GAC = \angle HDF$,再由 $\angle BAC = \angle EDF$ 可得 $\angle BAG = \angle EDH$,所以可由 ASA 得到 $\triangle ABG \cong \triangle DEH$,所以 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$。

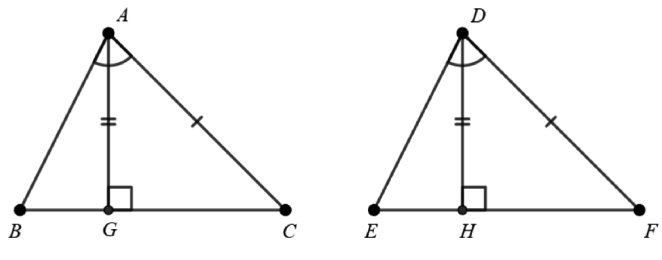


圖 2-6 SA_a-S_H

第 2 - 7 類:$AA_a - S_H$

回答樣例:在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 中,線段 AG 和線段 DH 分別是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的高線,已知 $\angle BAC = \angle EDF$, $\angle C = \angle F$, $AG = DH$ 時,證明:$\triangle ABC \cong \triangle DEF$($S6 - C2 - Q1$)。

描述:這裏給出的是大三角形中的兩角及高線。仿第 2 - 3 類,我們可以證明 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$。

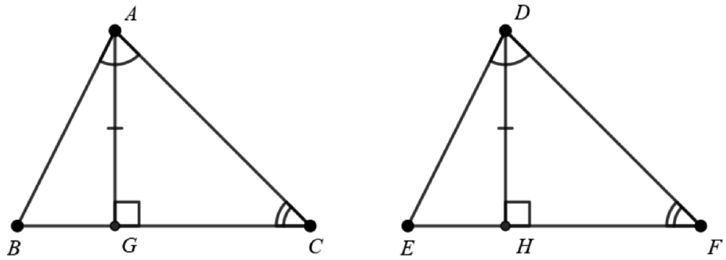


圖 2-7 AA_a-S_H

第 2 - 8 類:SS_HS_2

回答樣例:在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 中,線段 AG 和線段 DH 分別是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的高線,已知 $AC = DF$, $GC = HF$, $AG = DH$ 時,證明:$\triangle ABC \cong \triangle DEF$($S10 - C2 - Q1$)。

描述:這裡給的是小三角形的 SSS,所以我們只能得到 $\triangle AGC \cong \triangle DHF$,但不能得到 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$。其等價的類型是 SS_HS_1。

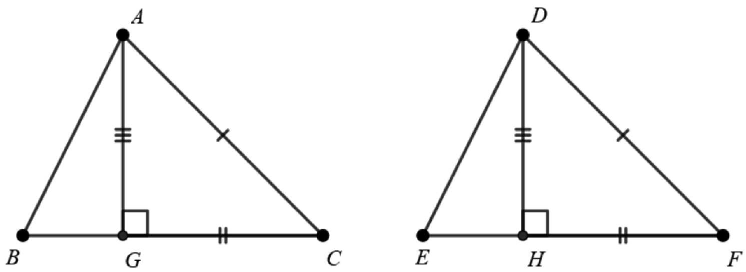


圖 2-8 SS_HS_2

第 2 - 9 類:ASS_H

回答樣例:在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 中,線段 AG 和線段 DH 分別是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的高線,已知 $\angle C = \angle F$, $AC = DF$, $AG = DH$ 時,能否證明 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$($S7 - C2 - Q2$)。

描述:這裡給出的條件是小三角形中的 ASS,但因為是直角三角形,我們能由 HL 得到 $\triangle AGC \cong \triangle DHF$,但不能得到 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$。

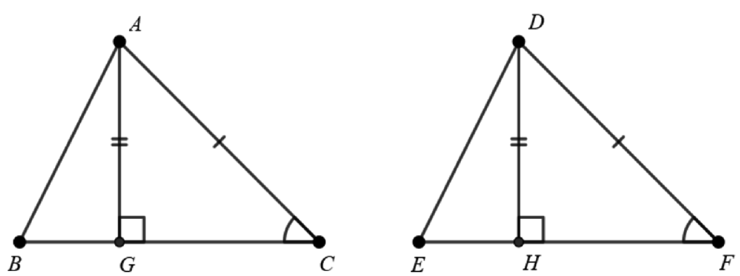


圖 2-9 ASS_H

情况 3:當加入角平分線時

第 3 - 1 類:SS_AS_2

回答樣例:在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 中,線段 AG 和線段 DH 分別是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的角平分線,已知 $AC = DF$,$GC = HF$,$AG = DH$ 時,證明:$\triangle ABC \cong \triangle DEF$($S27 - C3 - Q1$)。

描述:這裏給出的是小三角形中的 SSS,我們能得到 $\triangle AGC \cong \triangle DHF$ 及 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$。其等價的形式是 SS_AS_1。

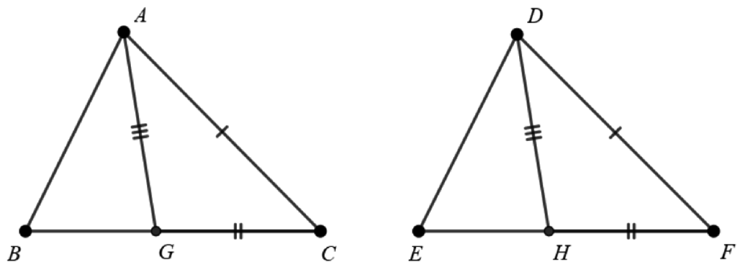


圖 3-1 SS_AS_2

第 3 - 2 類:SA_1S_A

回答樣例:在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 中,線段 AG 和線段 DH 分別是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的角平分線,已知 $AB = DE$,$\angle BAG = \angle EDH$,$AG = DH$ 時,證明:$\triangle ABC \cong \triangle DEF$($S10 - C3 - Q1$)。

描述:這裏給出的是小三角形中的 SAS,我們能得到 $\triangle AGC \cong \triangle DHF$ 及 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$。其等價的形式是 SA_2S_A。

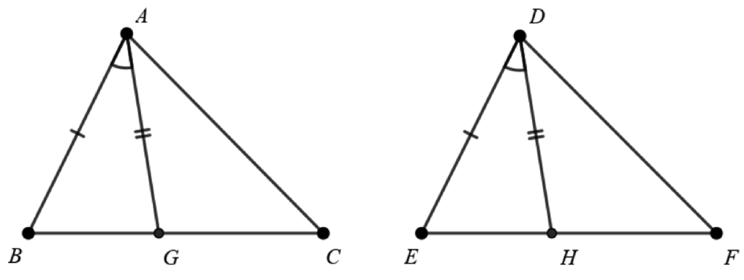


圖 3-2 SA_1S_A

第 3 - 3 類:$SA_a - S_A$

回答樣例:在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 中,線段 AG 和線段 DH 分別是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的角平分線,已知 $AB = DE$,$\angle BAC = EDF$,$AG = DH$ 時,證明:$\triangle ABC \cong \triangle DEF$($S16 - C3 - Q2$)。

描述:這裏給出的條件涉及一"腰"、"頂角"和高線。由 $\angle BAC = \angle EDF$ 及角平分線的性質可得 $\angle BAG = \angle EDH$,所以在左邊小三角形中有 SAS,由此可得 $\triangle ABG \cong \triangle DEH$ 及 $\triangle AGC \cong \triangle DHF$,所以有 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$。

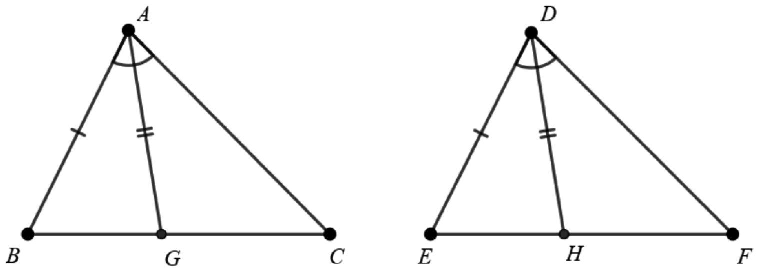


圖 3-3 SA_a-S_A

第 3 - 4 類:$A_1S_A - S$

回答樣例:在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 中,線段 AG 和線段 DH 分別是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的角平分線,已知 $\angle BAG = \angle EDH, AC = DF, AG = DH$ 時,能否證明 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$($S20 - C3 - Q1$)。

描述:這裏給出的是小三角形中的 S“A”S,其中的 A 被嵌在另一小三角形中。如前所述,我們能得到 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$。其等價的形式是 $A_2S_A - S$。

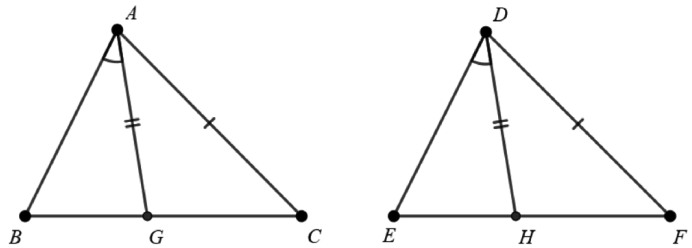


圖 3-4 A_1S_A-S

第 3 - 5 類:$SS - A_1 - 3$

回答樣例:在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 中,線段 AG 和線段 DH 分別是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的角平分線,已知 $\angle BAG = \angle EDH, AB = DE, AC = DF$ 時,證明:$\triangle ABC \cong \triangle DEF$($S20 - C3 - Q1$)。

描述:這裏給出的是大三角形的兩“腰” 和“頂角” 的一半分別對應相等。由角平分線的性質可得 $\angle BAC = \angle EDF$,再由 SAS 可得 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$。其等價的類型是 $SS - A_2 - 3$。

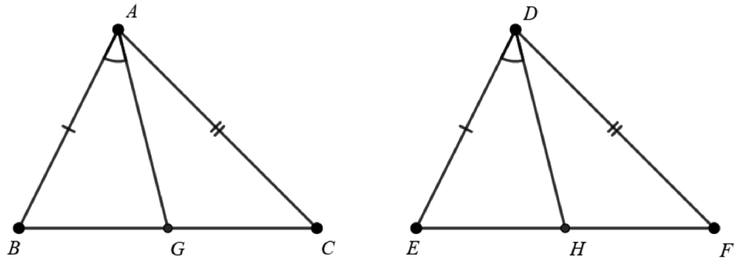


圖 3-5 SS-A_1-3

第 3 - 6 類:$A_aS_B - A_3 - 3$

回答樣例:在$\triangle ABC$與$\triangle DEF$中,線段AG和線段DH分別是$\triangle ABC$和$\triangle DEF$的角平分線,已知$\angle BAC = \angle EDF$,$\angle AGB = \angle DHF$,$BC = EF$時,證明:$\triangle ABC \cong \triangle DEF$($S7 - C3 - Q1$)。

描述:這裏給出的條件比較分散,頂角、“底邊”及“T”字形邊的小角。由$\angle BAC = \angle EDF$及角平分線的性質可得:$\angle BAG = \angle EDH = \angle GAC = \angle HDF$,又由$\angle AGB = \angle DHE$及三角形外角的性質可得$\angle C = \angle F$,這樣就可得到$\triangle ABC \sim \triangle DEF$,最後由$BC = EF$可得$\triangle ABC \cong \triangle DEF$。其等價形式是$A_aS_B - A_4 - 3$。

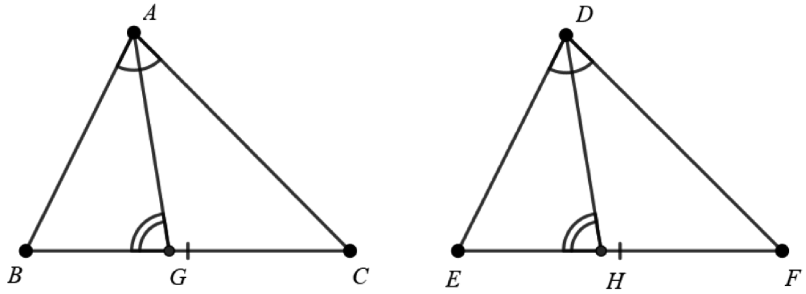


圖 3-6 A_aS_B-A_3-3

第 3 - 7 類:$U - SS_AS$

回答樣例:在$\triangle ABC$與$\triangle DEF$中,線段AG和線段DH分別是$\triangle ABC$和$\triangle DEF$的角平分線,已知$AC = DF$,$AB = DE$,$AG = DH$時,證明:$\triangle ABC \cong \triangle DEF$($S23 - C3 - Q1$)。

描述:與第 1 - 6 類和第 2 - 1 類似,我們把它記為“$U - SS_AS$”型。其證明過程如下:過點C作$CM \parallel AB$交AG的延長線於點M,類似地,我們可以作出點N。

在$\triangle ABC$中,不難得到$CM = AC$,又由$\triangle ABG \sim \triangle MCG$可得$\dfrac{AB}{MC} = \dfrac{AG}{GM}$,$GM = \dfrac{bt}{c}$。在$\triangle DEF$中,我們可以得到$HN = \dfrac{bt}{c}$,所以$\triangle AMC \cong \triangle DNF$,由此可得$\angle GAC = \angle HDF$,所以$\angle BAC = \angle EDF$,由此可得$\triangle ABC \cong \triangle DEF$($SAS$).

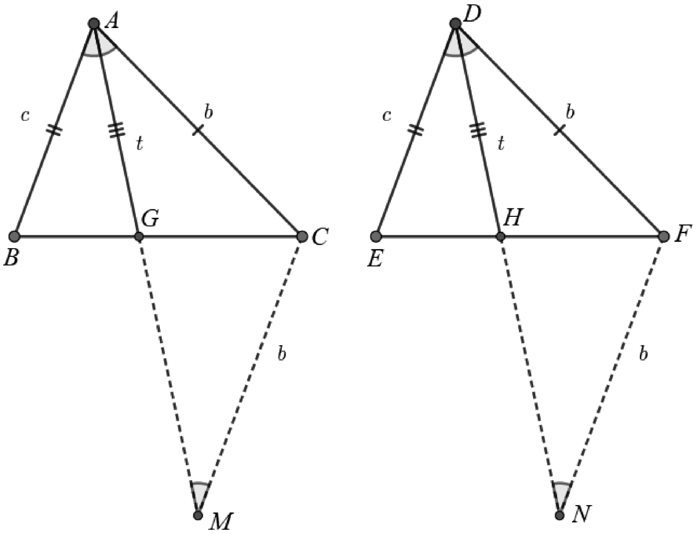


圖 3-7 U-SS_AS

第 3 － 8 類:$SS_B - S_A$

回答樣例:在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 中,線段 AG 和線段 DH 分別是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的角平分線,已知 $AC = DF, BC = EF, AG = DH$ 時,證明:$\triangle ABC \cong \triangle DEF$($S16 - C3 - Q1$)。

描述:這裏給出的條件是大三角形的一"腰" 和"底" 邊及角平分線。筆者先試圖去證明,各種方法試了也很難證明出來;于是試圖找出反例,嘗試了也無果;最後只能求助于動態幾何軟體的幫忙。作圖過程如下:(a) 作定長線段 BC 及定長為 AC 的半圓;(b) 作變數尺 t,使其範圍在$[0,\pi]$,接著將點 B 繞點 C 旋轉 t 弧度到點 B',連射線 CB' 交半圓於 A 點,使其由參數 t 驅動;(c) 作 $\angle BAC$ 的角平分線,交 BC 邊於點 G,測量線段 AG 的長度,作點 $E(t, AG)$ 及其軌跡,不難發現,其為單調遞增的函數。也就是說,對固定長度的角平分線,如果有就僅有一個三角形滿足條件。

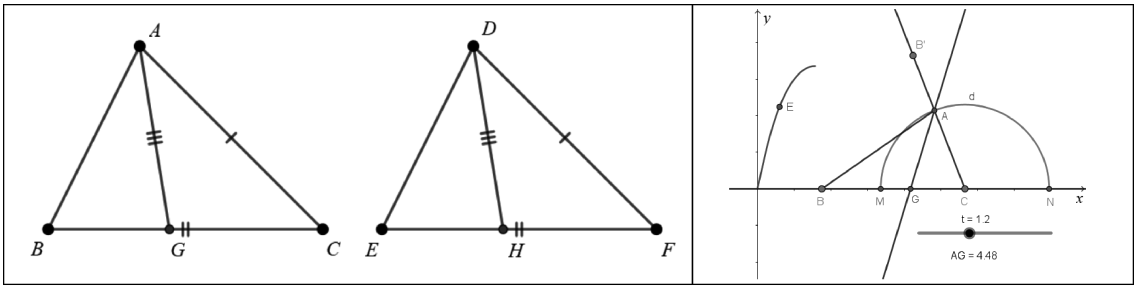


圖 3-8 SS_B-S_A

第 3 － 9 類:$SS - A_3 - 3$

回答樣例:在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 中,線段 AG 和線段 DH 分別是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的角平分線,已知 $\angle AGB = \angle DHE, AB = DE, AC = DF$ 時,證明:$\triangle ABC \cong \triangle DEF$($S11 - C3 - Q1$)。

描述:這裏給出的是大三角形的兩邊和一小角分別對應相等,其等價的形式是 $SS - A_4 - 3$。

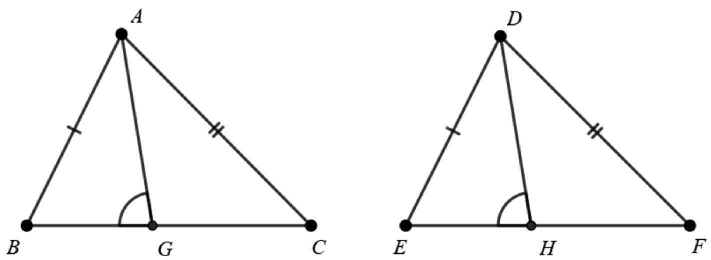


圖 3-9(a) SS-A_3-3

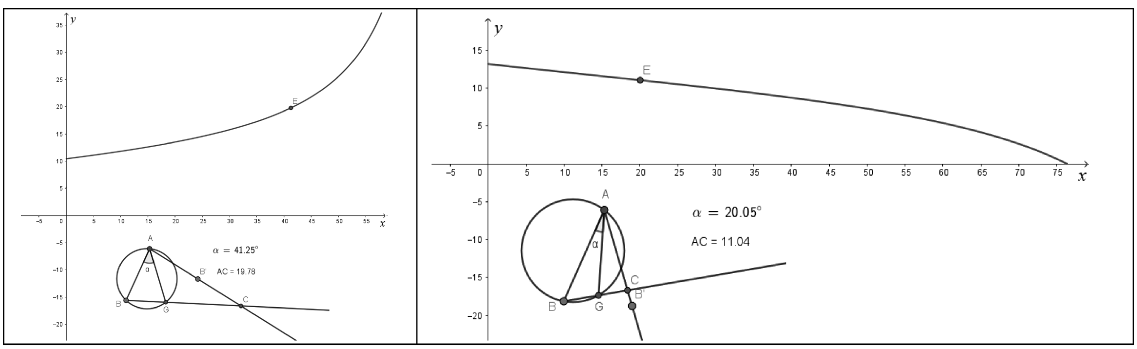


圖 3-9(b) 問題探究:SS-A_3-3

描述:這裏我們也借助于動態幾何軟體作圖,探究對給定的邊 AB 和給定的角 $\angle AGB$,當 $\angle BAG$ 增大時,邊長 AC 的變化。作圖過程如下:(a) 作定長線段 AB 及定角為 $\angle AGB$ 的圓弧;(b) 作變數尺 α,作角 $\angle BAG = \alpha$,使得 AG 邊交圓弧於點 G;(c) 作點 B 關於 AG 的對稱點 B',連射線 AB' 交 BG 的延長線於點 C;(d) 測量線段 AC 的長度,作點 $E(\alpha,AC)$ 及其軌跡。不難發現,當 $\angle AGB$ 為銳角時,其軌跡為單調遞增函數;當 $\angle AGB$ 為鈍角時,其軌跡為單調遞減函數。也就是說,無論哪種情況,對固定長度的 AC,如果有,就僅有一個三角形滿足條件。

第 3 - 10 類:$A1S_A - S_B$

回答樣例:在 ABC 與 $\triangle DEF$ 中,線段 AG 和線段 DH 分別是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的角平分線,已知 $\angle BAG = \angle EDH, BC = EF, AG = DH$ 時,證明:$\triangle ABC \cong \triangle DEF$($S36 - C3 - Q1$)。

描述:這裏給出的條件是小三角形的頂角,角平分線及大三角形的“底邊”。我們不難構造出反例(見圖 3 - 10 右邊的圖形)。儘管 $\triangle A_1BC$ 與 $\triangle A_2BC$ 不全等,但有 $\triangle A_1BC \cong \triangle A_2CB$。

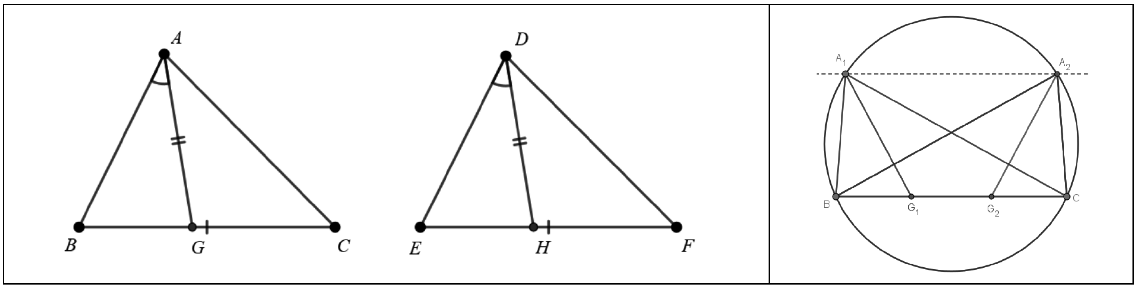


圖 3-10　A_1S_A-S_B

第 3 - 11 類:S_ASA

回答樣例:在 ABC 與 $\triangle DEF$ 中,線段 AG 和線段 DH 分別是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的角平分線,已知 $AC = DF, \angle C = \angle F, AG = DH$ 時,證明:$\triangle ABC \cong \triangle DEF$($S28 - C3 - Q2$)。

描述:這裏給出的條件是右邊小三角形的兩邊及角平分線的對角。我們可以舉出反例(見圖3 - 11右邊)說明該條件不適合證明兩個大三角形全等。圖中 $\triangle AB_1C_1$ 和 $\triangle AB_2C_2$ 是滿足樣例的條件,但它們不全等。

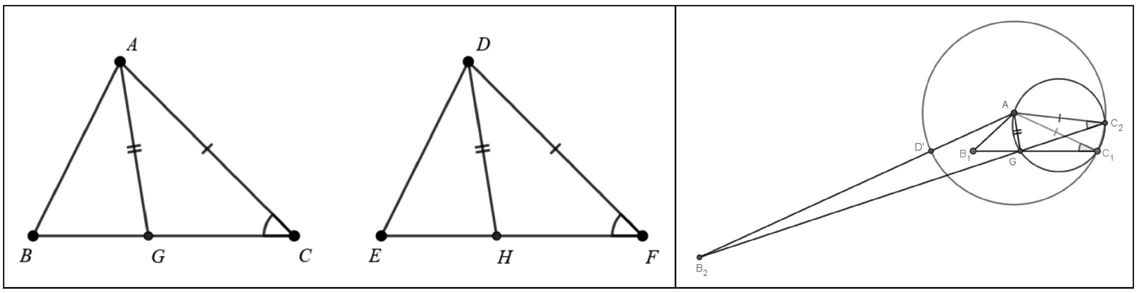


圖 3-11　SS_AA

第 31 類：$S_M S_H S_A$

回答樣例：在 ABC 與 $\triangle DEF$ 中，線段 AG 和線段 DH 分別是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的中線，線段 AI 和線段 DJ 分別是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的高線，線段 AK 和線段 DL 分別是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的角平分線，已知 $AG = DH, AI = DJ, AK = DL$ 時，證明：$\triangle ABC \cong \triangle DEF$。（$S39 - C1 - Q1$）

描述：這裏給出的條件是兩個三角形一對應邊上的中線、高線和角平分線分別對應相等，由其可證明 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$。

證明過程如下：以垂心 I 為座標原點，BC 邊為 x 軸，建立直角坐標系，設 $A(0,a)$，$G(g,0)$，$K(k,0)$，又設 $B(b,0)$，$C(c,0)$。則由 G 為中點可得：$b + c = 2g$（1）。邊 AB, AK, AC 的斜率依次為：$k_{AB} = -\dfrac{a}{b}, k_{AK} = -\dfrac{a}{k}, k_{AC} = -\dfrac{a}{c}$。由 AK 為角平分線可得：$\dfrac{-\dfrac{a}{k} + \dfrac{a}{b}}{1 + \dfrac{a^2}{kb}} = \dfrac{-\dfrac{a}{c} + \dfrac{a}{k}}{1 + \dfrac{a^2}{ck}}$，化簡得：$bc = \dfrac{a^2k + gk^2 - ga^2}{k}$（2）。所以 b 和 c 為方程 $t^2 - 2gt + \dfrac{a^2k + gk^2 - ga^2}{k} = 0$ 的兩根，小的在左，大的在右，被唯一確定。

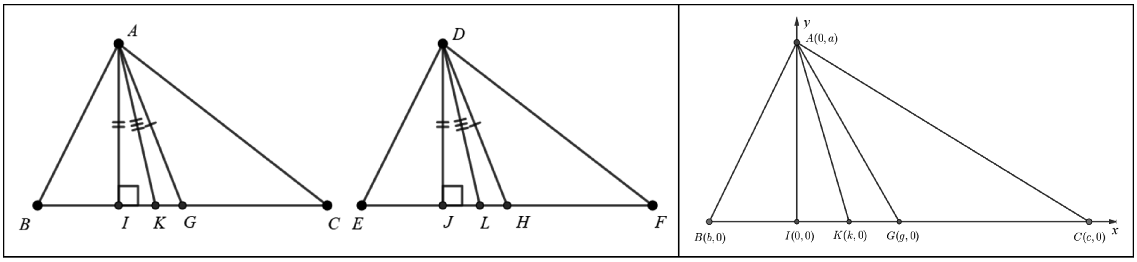


圖 31 $S_M S_H S_A$

由此，我們可以看出，在增加了中線、高線和角平分線三種情況下，學生依次提出了 10 類、9 類、11 類和一個綜合性比較強的第 31 類。我們將從流暢性、靈活性和原創性等維度對學生提出的問題進行更深入的分析（李欣蓮和蔡金法，2020）。

參考文獻

[1] 江春蓮(2012). 三角形全等條件的進一步探究：第一屆澳門中學數學優質課堂教學評比大會一等獎之教學設計及評析. 澳門數學教育，10，94–98.

[2] 江春蓮(2013). 三角形全等條件的進一步探究(二). 澳門數學教育，11，13–20.

[3] 北京師範大學出版集團(2023). 義務教育教科書・數學七年級下冊. 北京：北京師範大學出版社.

[4] 李欣蓮、蔡金法(2020). 數學課堂中學生問題提出的評估. 小學教學(數學版)，(06)，22–26。doi：CNKI：SUN：XQJB. 0. 2020–06–012.

數據賦能的“3+x”作業設計

——以“等腰三角形的性質與判定”為例

上海市青浦區豫才中學　王龍(18930898097)
上海市青浦區實驗中學　柳雪(18930892672)

摘要：為了落實“雙減”與“雙新”政策要求,破解當前初中數學作業量重、內容重複、難度不適配等問題,實現作業設計的精準化,促進學生數學素養培育,以滬教版七年級“等腰三角形的性質與判定”單元為例,開展“3+x”作業體系的設計與實踐研究。作業體系包含知識建構型、基礎過關型、能力提升型三類核心作業與 x 型拓展作業,分別承擔知識體系建構、基礎鞏固、能力培養與素養提升功能。研究依智能平臺的學情數據,精準定位學生的困惑,結合單元整體教學目標,采用數據賦能、分層設計、系統化策略,完成了四類作業的具體編制。實踐表明,該作業設計既實現了作業內容與學情的精準適配,有效減輕了學生作業負擔,又通過遞進式、多樣化的作業訓練,強化了學生知識體系的建構與邏輯推理、問題解決等核心能力的培養。

“雙減”和“雙新”政策的實施意在優化教育環境,提升教育質量,促進學生全面優質均衡發展。作業減負是實現“雙減”目標的核心環節,這使得體系化地設計作業尤為重要。作業作為連接課堂教學與學生自主學習的重要橋梁,其設計和管理的質量直接影響學生的學習效果和課後學習體驗。當前,多數學校在作業設計方面仍面臨各種挑戰。普遍存在的問題包括作業量過重、內容重複性高、難度不適宜等,這些問題嚴重制約了作業在教學過程中的積極作用。如何精準、體系化地設計作業,激發學生的學習興趣,減輕學生負擔,提升作業質量,已經成為教育研究者關注的焦點。筆者以滬教版七年級第二學期數學教材第十四章“等腰三角形”單元為例,基於前期數據,利用“3+x”作業體系設計課後作業,提升作業的精準性和效率,促進養成核心素養。

1　“3+x”作業體系概述

精準教學視域下的“3+x”作業體系是一個結合數據分析和差異化教學理論,針對學生不同學情,精準設計作業的方法。它至少由三類作業組成,“3”代表三種類型的作業,即知識建構型作業、基礎過關型作業和能力提升型作業,可以達到建構知識體系、鞏固基礎知識、培養思維能力的目的;“x”代表探究、拓展或不確定類型作業,具有一定的挑戰性,能夠

達到激發興趣、提升綜合素養的效果[1]。運用這種分類方法,精選作業內容,系統性地選編、改編、創編單元作業,體系化地設計出優質作業。對作業的設計劃分標準如下表 1:

表 1 作業設計劃分標准

"3+x"作業分類	指標描述與劃分標準	目的	作業類型
知識建構型作業(必做題)	以學習中的定義、定理、算律等知識為主,將這些概念與規律以思維導圖展示在作業中,並以填空的形式呈現	回顧定義、定理,梳理知識結構,建構知識體系	思維導圖、填空
基礎過關型作業(必做題)	以選擇、填空或簡答等多樣化的題目形式出現,針對教學目標覆蓋知識點,考查單個知識點	適合實際的學情,鞏固四基	選擇、填空、簡答等
能力提升型作業(建議做)	以解答、應用題、綜合題的形式出現,綜合至少 2 個關聯知識點,解決辦法要用到新授課中所學方法	培養學生的綜合運用知識的能力	解答、應用、綜合
"x 型"作業(選做題)	x 代表探究型、開放型、抽象拓展型、活動型作業,以綜合題形式出現,可以項目式、長作業或跨學科方式完成	培養興趣,提升素養	可靈活調整,不確定類型作業

2 作業設計策略

2.1 內容分析

本章內容分為 3 節,前兩節學習了三角形的相關概念和全等三角形,其中第三節"等腰三角形"包含三個課時:14.5 等腰三角形的性質、14.6 等腰三角形的判定、14.7 等邊三角形。本設計將 14.5 和 14.6 兩課時規劃為一個教學單元。前一課時教授了等腰三角形的性質與判定,從智學網平臺的數據(表 2)可知最後兩題得分率較低,作業第 9 題用到知識點有:等腰三角形的性質與判定等,解題方法需要倍長中線,解題過程涉及分類討論,在隨後第二課時教學中,對性質與判定進行了深入應用,融入相關知識,本課時作業設計以這 2 節課的知識為主要內容而設計。

表 2 第一課時部分作業數據

題號	題型	分值	平均分	區分度	得分率	答對人數	正確率	答錯人數	錯選率
9|主	能力提升型	10	5.2	0.75	52.2%	11	23.9%	[0,5]:31 (5,10]:15	86.1% 13.9%
10|主	探究型	10	4.4	0.89	43.5%	6	13.0%	[0,5]:26 (5,10]:20	76.5% 23.5%

2.2 設計策略與學情分析

在精準教學視域下,“3+x”作業體系作為教學整體框架的關鍵環節,不僅關注作業內容的編制,更強調與課堂教學的緊密結合。作業設計需通過以下策略進行優化:首先,通過數據分析精準掌握真實的學情。智學網顯示上一課時的學習困惑如表 3 所示,結合新授課反映出學生在運用等腰三角形的判定與性質解決問題方面表現欠佳,具體表現在倍長中線、截長補短的添加輔助線方法、對分類討論思想解題比較陌生。其次,結合課程標準確定作業目標。依據課程標準中等腰三角形的判定與性質相關知識點,確立作業目標,確保作業能夠幫助學生在“四基”和“四能”方面取得進步,提升數學素養。第三、結合“3+x”作業體系對作業題進行分類匯編,根據學生的學習需求,設計不同難度級別的題目、應用分類討論思想解決的問題,形成單元作業。

表 3　學習困惑點

知識點	班級掌握率	年級掌握率	班未掌握人數	本班	考頻年級	區域	操作
等腰三角形的判定運用;添輔助線法:倍長中線、截長補短	43.49%	40.4%	26	46	1	高	查看詳情
等腰三角形的性質運用、分類討論的數學思想	40.1%	39.6%	28	46	1	中	查看詳情

2.3 作業目標

(1) 通過練習,鞏固等腰三角形的性質與判定,能用性質與判定解決有關問題,體會分類討論的思想在數學中的運用;

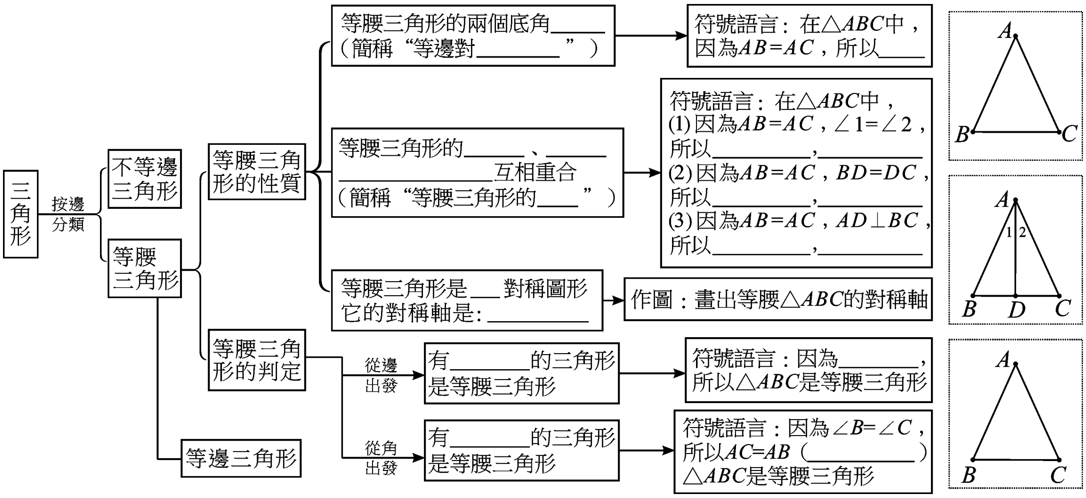
(2) 通過多樣化的單元作業訓練,學會嚴謹地思考問題,發展理性思維和邏輯推理及問題解決能力;

(3) 運用等腰三角形的性質與判定,自主學習不同難度、類型的題目,在解決問題過程中應用分類討論的思想、常見添加輔助線的方法,發展數學思維和創新能力。

3 作業設計

3.1 知識建構型作業

題 1　完成下面的知識結構圖:



設計意圖:從知識結構圖不僅可以幫助學生鞏固等腰三角形的性質與判定,還可以看出三角形的分類、等腰三角形與等邊三角形的關系、以及前後課時之間的關聯與次序,從而促進學生建立結構優良的知識體系。

3.2 基礎過關型作業

題 2 等腰三角形一邊的長為 6,它的周長為 16,則它的腰長為( )

A. 5; *B*. 6; *C*. 5 或 6; *D*. 6 或 6

設計意圖:本題需要分類討論的意圖比較明顯,了解等腰三角形的概念,便知要分兩種情況討論。從基礎過關題目開始,滲透分類討論的思想。

題 3 在 $\triangle ABC$ 中,$AB = AC$,邊上的高與 AC 的夾角為 $40°$,則 $\angle B$ 為( )

A. $65°$ *B*. $65°$ 或 $25°$ *C*. $50°$ *D*. $50°$ 或 $25°$

設計意圖:從等腰三角形“角”的角度出發,進行分類討論,讓學生深刻體會分類討論的數學思想。

題 4 等腰三角形一腰上的中線把這個三角形的周長分成了 $12cm$ 和 $21cm$ 兩部分,則這個等腰三角形的底邊長是 ________。

設計意圖:本題從等腰三角形的邊的角度出發進行討論,計算出等腰三角形的各邊長後,還要驗證結果的正確性,考查學生的邏輯思維和嚴密性思維。

題 5 在 $\triangle ABC$ 中,$\angle A = 80°$,那麼當 $\angle B =$ ______ °時,這個 $\triangle ABC$ 是等腰三角形。

設計意圖:本題主要考查學生思維的嚴謹性,與前面的分兩種情況討論不同,本題應該分為三種情況進行討論。

題 6 已知:如圖 1,$AB = AC$,$DB = DC$. 求證:$\angle B = \angle C$.

設計意圖:本題考查學生思維的靈活性與嚴謹性,可以連接 AD,用全等三角形證明;也可以連接 BC,用等邊對等角證明。建議學生用等腰

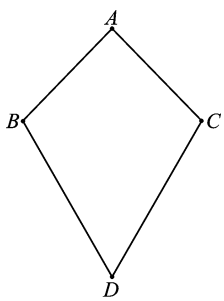


圖1

三角形的性質解題。

3.3　能力提升型作業

題 7　如圖 2，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle CDE$ 中，點 A 在線段 CE 上，B、C、D 三點共線，$BC = CD$，$AB = ED$，求證：$\angle BAC = \angle CED$.

設計意圖：本題考查學生思維的靈活性，可以倍長 AC，也可以倍長 EC 利用全等三角形和等腰三角形的判定與性質解決問題。本題也是做變式訓練的好素材，三個元素：$BC = CD$，$AB = ED$，$\angle BAC = \angle CED$ 中，可知二求一。提高學生一題多變、一題多解的能力。

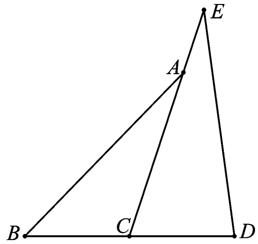


圖2

題 8　已知：如圖 3，在 $\triangle ABC$ 中，CD 是 $\triangle ABC$ 的角平分線，$\angle A = 2\angle B$.

求證：$BC = AC + AD$.

設計意圖：通過不同類型的問題繼續深入考查學生思維的靈活性，可以“截長”，在 CB 上截取 $CE = CA$，連接 DE；也可以“補短”，延長 CA 至 F，連接 DF。既有助於學生掌握常用的添加輔助線的方法，又發展了學生的邏輯思維能力與推理論證能力。

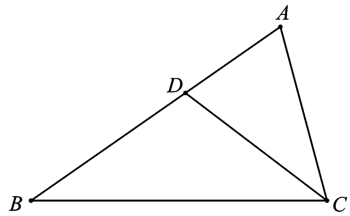


圖3

題 9　如圖 4，已知 $AB \parallel CD$，$\angle ACD$ 的平分線 CE 交 AB 於點 F，$\angle AFE$ 的平分線交 CA 的延長線於點 G.

（1）說明 $\triangle ACF$ 是等腰三角形的理由；

（2）當 $\angle FCD$ 等於多少度時，$\triangle AFG$ 是等腰三角形？

設計意圖：本題第 1）問是常見模型，提升學生的參與度；第 2）問對於 $\triangle AFG$ 是等腰三角形要分三種情況討論，考查學生用方程的思想解決問題，進一步促進嚴謹性思維，培養高階思維能力。

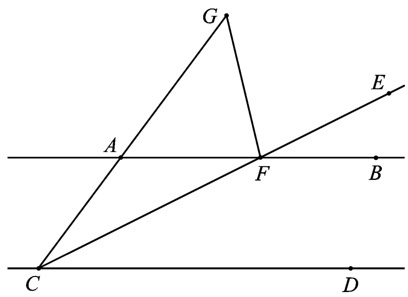
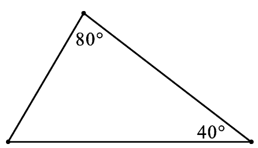


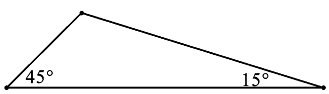
圖4

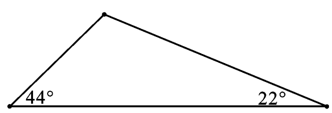
3.4　“X 型”作業

題 10　小傑和小麗在看完書上本章的探究活動二之後，對分割等腰三角形產生了濃厚的興趣，他們首先收集了一些分割等腰三角形的題目，一起和他們嘗試一下吧。

（1）分別過下面三個三角形的一個頂點畫一條直線，把這些三角形各自分割成兩個等腰三角形。







（2）做完這第（1）問後，小傑猜測：如果一個三角形的兩個內角，其中一個內角是另一個內角的兩倍或三倍，那麼這個三角形可以被分割成兩個等腰三角形。請和小高一起說明

理由吧。

① 如圖 5, $\angle C = 2\angle B$.

解:設 $\angle B$ 的度數為 α, $\angle C$ 的度數為 2α,

作 $\angle BAD = \angle B$,交 BC 於點 D,

即 $\angle BAD = \angle B = \alpha$.

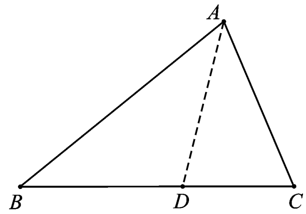


圖5

所以 ________ = ________(　　　　),

即 $\triangle ABD$ 是等腰三角形。

因為 $\angle ADC = \angle$ ________ + $\angle$ ________ = ________(　　　　).

且 $\angle C = 2\alpha$,

所以 $\angle C = \angle$ ________(　　　　).

所以 ________ = ________(　　　　),

即 $\triangle ABD$ 是等腰三角形。

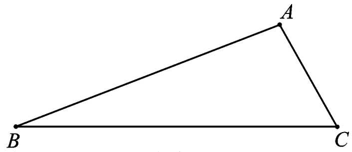
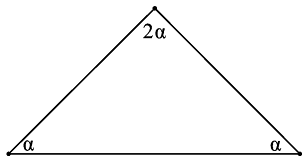


圖6

② 如圖 6, $\angle C = 3\angle B$.(請完成說理過程)

(3)小麗看了小傑的說理之後,自己畫了一個內角為 30°、50° 和 100° 的三角形嘗試分割,請問這個三角形能分割成兩個等腰三角形嗎? 如果可以,請畫出三角形並分割;如果不能,請說明理由。

(4)經過上述的探究,小麗和小傑想找到怎樣的等腰三角形可以分割成兩個等腰三角形,他們把情況分類成 4 種,請完成下列表格。

(1)頂角是底角的兩倍	(2)頂角是底角的三倍
	
α = ________ 三個內角度數 ________、________、________.	α = ________ 三個內角度數 ________、________、________.
(3)底角是頂角的兩倍	(4)底角是頂角的三倍
α = ________ 三個內角度數 ________、________、________.	α = ________ 三個內角度數 ________、________、________.

設計意圖:本題預設為跨課時作業,計劃用 2 課時完成,通過對部分特定三角形的分割,深度掌握等腰三角形的性質。用 4 個系列問題確保問題的深度與廣度,展示演變過程,

引導學生學會提出、分析並解決問題,加深學生對知識本質的理解,培養結構化思維。

4　設計說明

4.1　數據賦能作業設計更精准

通過信息技術收集學生學習數據,為教師洞察學生學習狀態提供了新途徑。技術平臺可以通過數據分類、數據監測、數據畫像等方式,識別學生的學習模式和需求,為後續教學和作業設計提供依據,也為調整教學策略提供方向,實現作業設計的精準化。如本單元教學通過第一課時,學習了等腰三角形的性質和判定,作業反應出學生對性質和判定的應用還不熟練,能用性質簡單解決的問題卻繞道用全等三角形證明。在單元教學第二節,不僅深入應用了等腰三角形的性質和判定,還對截長補短、倍長中線、分類討論的思想方法進行學習。結合上一課時作業反饋和新授課的課堂表現,針對性設計作業,實現個性化和差異化教學,確保作業內容與學生的實際需求和學習目標緊密匹配。這種設計方法能優化教學資源分配,及時調整作業難度,評估作業效果,從而提高教學質量和學生學習成效。形成了一個動態優化的循環體系,利用數據分類,精準設計作業內容;通過數據監測,精準管理作業;根據數據畫像,精準評價作業。這種基於數據的作業設計不僅能夠減輕學生作業負擔,還能提高學生學習效率,實現"減負增效" 的教育教學目標。

4.2　分層設計作業更有針對性

由"3+x 作業體系"設計出的單元作業是一種分層作業,同一單元的不同課時之間強調的重點有所不同,單元作業第二課時比第一課時難度要求、綜合性、應用性各方面都有所加深。不僅要推進知識與技能的達成度,還要推進更深層次的能力發展。單元作業第一課時鞏固了等腰三角形的性質與判定,第二課時在強化性質與判定的基礎上,解題思想方法滲透了分類討論思想與方程思想;添加輔助線的方法應用了倍長中線、截長補短;綜合運用了等腰三角形、平行線、全等三角形的判定與性質。通過不同類型和難度的作業,確保每個學生都能在自己的水平上獲得適當的挑戰和支持,從而提高學習參與度和成就感。所有學生都能通過閱讀教材與課堂學習,完成知識建構型作業和過關型作業,實現夯實基礎、建構知識體系的目標;大多數學生能夠通過能力提升型問題促進數學思維能力的提升;學有餘力的學生能通過"x 型作業"培養創新思維和解決問題的能力。這樣的分層作業有助於激發學生的學習動機,避免難度不當而產生挫敗感,鼓勵學生自我挑戰,發展批判性思維和創造性思維,實現個性化教學和教育公平。

4.3　整體設計作業更具系統性

以單元為整體進行作業設計,能厘清課程知識的內在邏輯,對強化知識的理解、內化數學能力有促進作用。在設計本單元作業時,首先參照課程標準設定多維度學習目標以確保作業設計的科學有效,通過一致性的單元作業目標,確保每一項作業都是圍繞等腰三角形

的性質與判定而設計,有助於學生達到預期的學習成果;其次通過完整的單元知識結構圖涵蓋知識要點,確保學生能夠全面掌握所需知識的概念、原理和技能,形成完整的知識結構;再采用"3+x 作業體系"從整體上系統地設計作業,確保作業內容在知識體系中具有邏輯性和連貫性,促進學生遞進認知,單元作業的前、後課時整合了初中數學中與等腰三角形相關的知識及數學思想方法,組成一個相對獨立的學習整體,作業內容前後連貫、學生的認知過程逐次遞進,圍繞著等腰三角形這個主題進行深入探究,從掌握性質判定到運用數學思想與方法解決問題,體現了能力培養的系統性。整體的作業規劃和目標的逐層分解,使作業設計超越了簡單的知識累積,實現了質的飛躍,從而有效地促進了學生數學能力的全面提升。

作業設計必須緊密契合學生的學習需求,遵循系統化的設計方法。基於數據分析,采用"3+x"體系化地設計作業,有效提升了作業的精準性和效率,創新了作業形式、優化了作業內容,能顯著增強作業的實際效果,充分發揮作業的育人功能。然而,學生的實際學情不盡相同,應用"3+x 作業體系"設計作業時,基礎型與能力型作業的數量搭配及難度層級需要根據各自學校的實際學情而定。作業也不應一成不變,應根據學生完成的情況進行評估與分析,持續改進並完善。只有重視作業價值,研究學生的學習需求,才能系統地設計出高品質的作業,促進學生的核心素養全面提升。

參考文獻

[1]王龍.精准教學視域下"3+x 作業體系"設計示例[J].中學數學教學參考,2024,(03):50-52.

澳門四校聯考攻略 —— 考綱 6 之題析

澳門聖若瑟教區中學第六校

鄧海棠

澳門四高校聯合入學考試(數學科)考試大綱 6 考查的內容要求是:指數及根式;指數定律;根式的簡化與運算。

自 2016 年到 2022 年相關知識點的考試題型題目序號分佈如下:

	選擇題題目題號及考查知識點	解答題題目題號	附加卷題目題號
2016 年模擬卷	7. 平方和/差公式。		
2017 年正卷眞題	6. 指數冪運算法則。		
2018 年正卷眞題	4. 指數冪運算法則。		
2019 年正卷眞題	6. 化簡二次根式與絕對值的運算。		
2020 年正卷眞題	4. 比較無理數(根數)的大小。		
2021 年正卷眞題	7. 求解指數方程。 14. 根式要數的化簡計算。		
2022 年正卷眞題	4. 二重根式的化簡求值。		

從上表中可見,考試大綱 6 考查的內容都以選擇題的形式進行。

相對應的知・識・點、習題・鞏固・評估、習題・鞏固・評估・解答、四校・眞題・解答分別如下。

一、知・識・點

1. 指數定律

常用的指數冪運算法則有:

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, a^m \div a^n = a^{m-n}$,

$(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m, (ab)^n = a^n b^n$,

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}, a^0 = 1(a \neq 0)$;

2. 根式的簡化與運算

把根式和指數式進行相互轉化，

常用的方法是把不同的底數化為相同的底數，

或者把不同的次數化為相同的次數，

指數式和對數式相互轉化。

二、習題・鞏固・評估

1. 計算：$\dfrac{\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[10]{a^7}}{\left(a^2\cdot\sqrt[5]{a^3}\right)^{\frac{1}{3}}}$（用正指數冪作答）。

2. 計算：$\dfrac{\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[8]{a^5}}{\left(a^2\cdot\sqrt[4]{a^3}\right)^{\frac{1}{3}}}$（用正指數冪作答）。

3. 設 $5^a=7^b=A$，且 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{2}$，求 A 的值。

4. 計算：求 $9^{\log_3\sqrt{2}-1}$ 的值。

5. 已知 a、b 是實數，且 $(2a+1)^2+|3b+2|=0$，求 a^4+b^3 的值。

6. 化簡求值：$\dfrac{2+\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$；

7. 化簡求值：$\sqrt{35-8\sqrt{6}}$；

8. 計算：$(-1.8)^0+(1.5)^{-2}\left(3\dfrac{3}{8}\right)^{\frac{2}{3}}-(0.01)^{-\frac{1}{2}}$；

9. 化簡求值：（以正指數冪作答）。

（1）$\left(\dfrac{\sqrt[3]{a^3b^2}}{\sqrt[4]{a^6b^3}}\right)^{-1}$，$(a,b>0)$；　　（2）$\left(8y^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{x^{-\frac{1}{3}}y\cdot\sqrt[4]{x^{\frac{4}{3}}}}\right)^{\frac{1}{3}}$；

（3）$\dfrac{\sqrt{x}\cdot x^{-\frac{2}{3}}}{\sqrt[6]{x^5}}+\dfrac{x^{-\frac{5}{6}}}{\sqrt[3]{x^2}\cdot x^{\frac{1}{2}}}$；　　（4）$\dfrac{x-1}{x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}+1}+\dfrac{x+1}{x^{\frac{1}{3}}+1}-\dfrac{x-x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}-1}$.

三、習題・鞏固・評估・解答

1. 計算:$\dfrac{\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[10]{a^7}}{\left(a^2\cdot\sqrt[5]{a^3}\right)^{\frac{1}{3}}}$(用正指數冪作答)。

解:原式 $=\dfrac{a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{7}{10}}}{\left(a^2\cdot a^{\frac{3}{5}}\right)^{\frac{1}{3}}}=\dfrac{a^{\frac{1}{3}+\frac{7}{10}}}{\left(a^{2+\frac{3}{5}}\right)^{\frac{1}{3}}}=\dfrac{a^{\frac{31}{30}}}{a^{\frac{13}{5}\cdot\frac{1}{3}}}=a^{\frac{31}{30}-\frac{26}{30}}=a^{\frac{5}{30}}=a^{\frac{1}{6}}.$

2. 計算:$\dfrac{\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[8]{a^5}}{\left(a^2\cdot\sqrt[4]{a^3}\right)^{\frac{1}{3}}}$(用正指數冪作答)。

解:原式 $=\dfrac{a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{5}{8}}}{\left(a^2\cdot a^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}}=\dfrac{a^{\frac{1}{3}+\frac{5}{8}}}{\left(a^{2+\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}}=\dfrac{a^{\frac{23}{24}}}{a^{\frac{11}{4}\cdot\frac{1}{3}}}=a^{\frac{23}{24}-\frac{22}{24}}=a^{\frac{1}{24}}.$

3. 設 $5^a=7^b=\mathrm{A}$,且 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{2}$,求 A 的值。

解:由 $5^a=A$,寫成對數式得 $a=\log_5=\dfrac{\lg\mathrm{A}}{\lg 5}$,同理得 $b=\log_7\mathrm{A}=\dfrac{\lg\mathrm{A}}{\lg 7}$,

從而 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{\frac{\lg\mathrm{A}}{\lg 5}}+\dfrac{1}{\frac{\lg\mathrm{A}}{\lg 7}}=\dfrac{\lg 5}{\lg\mathrm{A}}+\dfrac{\lg 7}{\lg\mathrm{A}}=\dfrac{\lg 35}{\lg\mathrm{A}}=\dfrac{1}{2}$,

得 $\lg\mathrm{A}=2\lg 35=\lg 35^2=\lg 1225$,故 $\mathrm{A}=1225$.

4. 計算:求 $9^{\log_3\sqrt{2}-1}$ 的值。

解:原式 $=(3^2)^{\log_3\sqrt{2}-1}=3^{2(\log_3\sqrt{2}-1)}=3^{\log_3(\sqrt{2})^2-2}=3^{\log_3 2}\div 3^2=2\div 9=\dfrac{2}{9}$.

5. 已知 a、b 是實數,且 $(2a+1)^2+|3b+2|=0$,求 a^4+b^3 的值。

解:由題設得 $\begin{cases}2a+1=0\\3b+2=0\end{cases}$,解得 $\begin{cases}a=-\dfrac{1}{2}\\[2ex]b=-\dfrac{2}{3}\end{cases}$,

得 $a^4+b^3=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^4+\left(-\dfrac{2}{3}\right)^3=\dfrac{1}{16}-\dfrac{8}{27}=-\dfrac{101}{432}$.

6. 化簡求值:$\dfrac{2+\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$;

解:原式 $=\dfrac{(\sqrt{2}-1)(2+\sqrt{2})}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\sqrt{6}-2$.

7. 化簡求值:$\sqrt{35-8\sqrt{6}}$;

解法一(待定係數法):設 $\sqrt{35-8\sqrt{6}}=\sqrt{x}-\sqrt{y},(x>y)$,

得 $35-8\sqrt{6}=x+y-2\sqrt{xy}$,

得 $\begin{cases}x+y=35\\2\sqrt{xy}=8\sqrt{6}\end{cases}$,解得 $\begin{cases}x=32\\y=3\end{cases}$,得原式 $=\sqrt{32}-\sqrt{3}=4\sqrt{2}-\sqrt{3}$.

解法二(配方法):

$$\sqrt{35-8\sqrt{6}}=\sqrt{32-8\sqrt{6}+3}$$

$$=\sqrt{(4\sqrt{2})^2-2\times4\sqrt{2}\times\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{(4\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}=4\sqrt{2}-\sqrt{3}.$$

8. 計算:$(-1.8)^0+(1.5)^{-2}\left(3\dfrac{3}{8}\right)^{\frac{2}{3}}-(0.01)^{-\frac{1}{2}}$;

解:原式 $=1+\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-2}\left(\dfrac{27}{8}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(\dfrac{1}{100}\right)^{-\frac{1}{2}}=1+\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{3\times\frac{2}{3}}-\left(\dfrac{100}{1}\right)^{\frac{1}{2}}$

$=1+\left(\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{2}\right)^{2}-10=-8$.

9. 化簡求值:(以正指數冪作答)。

(1) $\left(\dfrac{\sqrt[3]{a^3b^2}}{\sqrt[4]{a^6b^3}}\right)^{-1},(a,b>0)$;　(2) $\left(8y^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{x^{-\frac{1}{3}}y\cdot\sqrt[4]{x^{\frac{4}{3}}}}\right)^{\frac{1}{3}}$;

(3) $\dfrac{\sqrt{x}\cdot x^{-\frac{2}{3}}}{\sqrt[6]{x^5}}+\dfrac{x^{-\frac{5}{6}}}{\sqrt[3]{x^2}\cdot x^{\frac{1}{2}}}$;　(4) $\dfrac{x-1}{x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}+1}+\dfrac{x+1}{x^{\frac{1}{3}}+1}-\dfrac{x-x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}-1}$.

解:(1) $\left(\dfrac{\sqrt[3]{a^3b^2}}{\sqrt[4]{a^6b^3}}\right)^{-1}=\dfrac{\sqrt[4]{a^6b^3}}{\sqrt[3]{a^3b^2}}=\dfrac{a^{\frac{6}{4}}b^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{3}{3}}b^{\frac{2}{3}}}=a^{\frac{6}{4}-\frac{3}{3}}b^{\frac{3}{4}-\frac{2}{3}}=a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{12}}$;

(2) $\left(8y^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{x^{-\frac{1}{3}}y\cdot\sqrt[4]{x^{\frac{4}{3}}}}\right)^{\frac{1}{3}}=\{8y^{\frac{1}{3}}\cdot[x^{-\frac{1}{3}}y\cdot(x^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{4}}]^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{3}}=\{8y^{\frac{1}{3}}\cdot[x^{-\frac{1}{3}}y\cdot x^{\frac{1}{3}}]^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{3}}$

$=\{8y^{\frac{1}{3}}\cdot[x^{-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}y]^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{3}}=\{8y^{\frac{1}{3}}\cdot[x^0y]^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{3}}=\{8y^{\frac{1}{3}}\cdot y^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{3}}=\{8y^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{3}}$

$=\{2^3y^{\frac{5}{6}}\}^{\frac{1}{3}}=2^{3\cdot\frac{1}{3}}y^{\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{3}}=2y^{\frac{5}{18}}$;

（3）原式$=\dfrac{x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{-\frac{2}{3}}}{x^{\frac{5}{6}}}+\dfrac{x^{-\frac{5}{6}}}{x^{\frac{2}{3}}\cdot x^{-\frac{1}{2}}}=x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{-\frac{2}{3}}\cdot x^{-\frac{5}{6}}+x^{-\frac{5}{6}}\cdot x^{-\frac{2}{3}}\cdot x^{\frac{1}{2}}=2x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{-\frac{2}{3}}\cdot x^{-\frac{5}{6}}$

$=2x^{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}-\frac{5}{6}}=2x^{-1}=\dfrac{2}{x}$;

（4）原式$=\dfrac{(x^{\frac{1}{3}})^{3}-1^{3}}{(x^{\frac{1}{3}})^{2}+x^{\frac{1}{3}}+1}+\dfrac{(x^{\frac{1}{3}})^{3}+1^{3}}{x^{\frac{1}{3}}+1}-\dfrac{(x^{\frac{1}{3}})^{3}-x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}-1}$

$=\dfrac{(x^{\frac{1}{3}}-1)[(x^{\frac{1}{3}})^{2}+x^{\frac{1}{3}}+1]}{(x^{\frac{1}{3}})^{2}+x^{\frac{1}{3}}+1}+\dfrac{(x^{\frac{1}{3}}+1)[(x^{\frac{1}{3}})^{2}-x^{\frac{1}{3}}+1]}{x^{\frac{1}{3}}+1}-\dfrac{x^{\frac{1}{3}}[(x^{\frac{1}{3}})^{2}-1]}{x^{\frac{1}{3}}-1}$

$=(x^{\frac{1}{3}}-1)+[(x^{\frac{1}{3}})^{2}-x^{\frac{1}{3}}+1]-\dfrac{x^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{3}}+1)(x^{\frac{1}{3}}-1)}{x^{\frac{1}{3}}-1}$

$=(x^{\frac{1}{3}})^{2}-x^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{3}}+1)=x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}=-x^{\frac{1}{3}}$.

四、四校・真題・解答

1.（2017 四校一 6）$\left(\dfrac{2\log_{10}2+\log_{10}6}{-\log_{10}3-3\log_{10}2}\right)^{5}-9^{5}\times3^{-11}=$

A. $\dfrac{3}{2}$　　*B.* $-\dfrac{3}{4}$　　*C.* $\dfrac{2}{3}$　　*D.* $-\dfrac{4}{3}$　　*E.* 0

解:原式 $=\left(-\dfrac{\log_{10}2^{2}+\log_{10}6}{\log_{10}3+3\log_{10}2}\right)^{5}-(3^{2})^{5}\times3^{-11}=\left(-\dfrac{\log_{10}(2^{2}\times6)}{\log_{10}(3\times2^{3})}\right)^{5}-3^{10}\times3^{-11}$

$=\left(-\dfrac{\log_{10}24}{\log_{10}24}\right)^{5}-3^{10-11}=(-1)^{5}-3^{-1}=-1-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{4}{3}$，選 *D*。

2.（2018 四校一 4）$\dfrac{a^{3}b^{-2}c^{2}}{(2a^{-1}b^{2}c)^{3}}=$

A. $\dfrac{1}{8b^{4}c}$　　*B.* $\dfrac{a}{8b^{4}c}$　　*C.* $\dfrac{a^{6}}{8b^{8}c}$　　*D.* $\dfrac{a^{4}}{8b^{4}c}$　　*E.* $\dfrac{a^{6}b^{3}}{8c}$

解法 1:$\dfrac{a^{3}b^{-2}c^{2}}{(2a^{-1}b^{2}c)^{3}}=\dfrac{a^{3}b^{-2}c^{2}}{2^{3}a^{-3}b^{6}c^{3}}=\dfrac{1}{8}a^{3-(-3)}b^{-2-6}c^{2-3}=\dfrac{1}{8}a^{6}b^{-8}c^{-1}=\dfrac{a^{6}}{8b^{8}c}$. 選 *C*。

解法 2:$\dfrac{a^{3}b^{-2}c^{2}}{(2a^{-1}b^{2}c)^{3}}=\dfrac{a^{3}b^{-2}c^{2}}{2^{3}a^{-3}b^{6}c^{3}}=\dfrac{a^{3+3}c^{2}}{2^{3}b^{6+2}c^{3}}=\dfrac{a^{6}}{8b^{8}c}$. 選 *C*。

解法 3:可以考慮對 a,b,c 取各不相同的數值進行賦值排除，不妨取 $a=2,b=3,c=4$，

則$\dfrac{a^3b^{-2}c^2}{(2a^{-1}b^2c)^3}=\dfrac{2^6}{8\times 3^8\times 4}$,

而A 中$\dfrac{1}{8b^4c}=\dfrac{1}{8\times 3^4\times 4}=\dfrac{3^4}{8\times 3^8\times 4}\neq\dfrac{2^6}{8\times 3^8\times 4}$,

B 中$\dfrac{a}{8b^4c}=\dfrac{2}{8\times 3^4\times 4}=\dfrac{2\times 3^4}{8\times 3^8\times 4}\neq\dfrac{2^6}{8\times 3^8\times 4}$,

C 中$\dfrac{a^6}{8b^8c}=\dfrac{2^6}{8\times 3^8\times 4}$,

D 中$\dfrac{a^4}{8b^4c}=\dfrac{2^4}{8\times 3^4\times 4}=\dfrac{2^4\times 3^4}{8\times 3^8\times 4}\neq\dfrac{2^6}{8\times 3^8\times 4}$,

E 中$\dfrac{a^6b^3}{8c}=\dfrac{2^6\times 3^3}{8\times 4}=\dfrac{2^6\times 3^{11}}{8\times 3^8\times 4}\neq\dfrac{2^6}{8\times 3^8\times 4}$;因為$A$、$B$、$D$、$E$都不合,故選$C$。

註:一般而論,賦值排除法基本上都是必要非充分條件的運用,甚至有時會是非必要條件。

3. (2019 四校一 4) 求$(6-\sqrt{35})^{100}(6+\sqrt{35})^{99}$之值。

A. $99(6+\sqrt{35})$　　*B*. $99(6-\sqrt{35})$　　*C*. $6+\sqrt{35}$

D. $6-\sqrt{35}$　　*E*. 以上皆非

解法 1:互為倒數平方差

$\because (6-\sqrt{35})(6+\sqrt{35})=36-35=1$,　$\therefore 6+\sqrt{35}=\dfrac{1}{6-\sqrt{35}}$,

原式$=(6-\sqrt{35})^{100}\left(\dfrac{1}{6-\sqrt{35}}\right)^{99}=(6-\sqrt{35})^{100}\cdot\dfrac{1}{(6-\sqrt{35})^{99}}=6-\sqrt{35}$,選$D$。

解法 2:平方差且積為 1

原式$=(6-\sqrt{35})(6-\sqrt{35})^{99}(6+\sqrt{35})^{99}$

$=(6-\sqrt{35})[(6-\sqrt{35})(6+\sqrt{35})]^{99}=(6-\sqrt{35})\times 1^{99}=6-\sqrt{35}$,

選D。

4. (2020 四校一 4) 若$\sqrt[n]{x}$ 表示 x 的 n 次根,下列哪一個正確?

A. $\sqrt[4]{17}<\sqrt{4.1}<\sqrt[3]{7.2}$　　*B*. $\sqrt[3]{7.2}<\sqrt{4.1}<\sqrt[4]{17}$　　*C*. $\sqrt[3]{7.2}<\sqrt[4]{17}<\sqrt{4.1}$

D. $\sqrt[4]{17}<\sqrt[3]{7.2}<\sqrt{4.1}$　　*E*. 以上皆非

解法 1:(化同根指數法)

由 2,3,4 次方根的最小公倍數為 12,把要比較的三個數化為相同的根指數,比較被開方數。

得$\sqrt[4]{17}=\sqrt[12]{17^3}=\sqrt[12]{4913}$；$\sqrt{4.1}=\sqrt[12]{4.1^6}=\sqrt[12]{4750}$；$\sqrt[3]{7.2}=\sqrt[12]{7.2^4}=\sqrt[12]{2687}$；

因為 $2687<4750<4913$，所以$\sqrt[3]{7.2}<\sqrt{4.1}<\sqrt[4]{17}$，

選 B。

解法 2：(分析法)

若$\sqrt[4]{17}<\sqrt{4.1}$，則兩邊取四次方，得 $17<4.1^2=16.81$，不合！

故$\sqrt[4]{17}<\sqrt{4.1}$ 不成立，排除 A、D、C，從而$\sqrt{4.1}<\sqrt[4]{17}$；

又若$\sqrt{4.1}<\sqrt[3]{7.2}$，則兩邊取六次方，得 $4.1^3<7.2^2$，即 $68.921<51.84$，不合！

故$\sqrt{4.1}<\sqrt[3]{7.2}$ 不成立，從而$\sqrt[3]{7.2}<\sqrt{4.1}$；故$\sqrt[3]{7.2}<\sqrt{4.1}<\sqrt[4]{17}$，

選 B。

5. (2021 四校一 14) $\dfrac{\sqrt{140}-\sqrt{132}}{\sqrt{35}+\sqrt{33}}=$

$A.\ 68-2\sqrt{1155}$ $B.\ 68-\sqrt{1155}$ $C.\ (34-\sqrt{1155})/2$

$D.\ 34-\sqrt{1155}$ $E.\ 68+2\sqrt{1155}$

答案：A。

解析：$\dfrac{\sqrt{140}-\sqrt{132}}{\sqrt{35}+\sqrt{33}}=2\cdot\dfrac{\sqrt{35}-\sqrt{33}}{\sqrt{35}+\sqrt{33}}=2\cdot\dfrac{(\sqrt{35}+\sqrt{33})^2}{(\sqrt{35})^2-(\sqrt{33})^2}$

$$=2\cdot\frac{35+33+\sqrt{35}\cdot\sqrt{33}}{35-33}=68-2\sqrt{1155}.$$

6. (2022 四校一 4) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}=$

$A.\ \sqrt{3}-\sqrt{2}$ $B.\ 2-\sqrt{3}$ $C.\ \sqrt{3}-2$ $D.\ 2-\sqrt{6}$ $E.\ 2-2\sqrt{3}$

解：$\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{2^2-2\cdot2\cdot\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}=|2-\sqrt{3}|=2-\sqrt{3}$，

選 B。

參考資料：

1. https://www.gaes.gov.mo/admission/unification 澳門高等教育輔助辦公室"四校聯考"專頁.

2.《澳門數學教育》2019 年第 17 期.

"四校聯考(2016 年)數學正卷選擇題深度剖析、多元解答"，鄧海棠.

3.《澳門教育》2019 年第 2 期(總第 260 期).

"四校聯考(2017 年)數學正卷選擇題深度剖析、多元解答(上)"，鄧海棠.

4.《澳門教育》2019 年第 3 期(總第 261 期).
“四校聯考(2017 年)數學正卷選擇題深度剖析、多元解答(下)”,鄧海棠.
5.《澳門數學教育》2020 年第 18 期.
“四校聯考(2018 年)數學正卷選擇題深度剖析、多元解答”,鄧海棠.
6.《澳門教育》2019 年第 4 期(總第 262 期).
“四校聯考(2019 年)數學正卷選擇題深度剖析、多元解答(上)”,鄧海棠.
7.《澳門教育》2020 年第 1 期(總第 263 期).
“四校聯考(2019 年)數學正卷選擇題深度剖析、多元解答(下)”,鄧海棠.
8.《澳門教育》2021 年第 1 期(總第 266 期).
“四校聯考(2020 年)數學正卷選擇題深度剖析、多元解答”,鄧海棠.
9.《澳門教育》2022 年第 2 期(總第 271 期).
“又近四校聯考時——2021 年澳門四校聯考數學正卷真題解答”,鄧海棠.

作業原來可以如此有趣

——“雙減”背景下的“趣味作業設計”實踐

重慶市渝中區馬家堡小學

萬莉莉

摘要:人生是一次長跑,比知識、成績更重要的是孩子的健全身心、完整人格、學習興趣和探索世界的好奇心,讓孩子在自由的探索與體驗中豐滿羽翼、增強能力,未來才會創造無限可能。教育人的視角要抵達目光所及的作業管理,更要展望孩子的未來和遠方。

“雙減”政策出臺後,我們在學習領會精神的同時,開始從理念到實踐進行從“育分”到“育人”的轉變,把立德樹人、學科育人落到實處。我校在對傳統作業進行研究、分析的情況下,在“雙減”政策的支持下,站在兒童的立場,用心設計出既能鞏固知識、強化能力,又好玩、感興趣的、創新的、有挑戰性的、能獲得成就感的“趣味作業”。近年來,學校用心設計了一系列蘊含教育教育思考、著眼學生終身發展的趣味作業,我們希望通過“有設計感的趣味作業”讓學生喜歡上作業——我們運用學習金字塔理論和費曼高效學習法設計的“大家一起說數學”趣味作業,讓學生充當“小老師”,說出數學知識、方法與思維過程,使學生成為“多向主動的知識建構者”。“古詩吟唱”趣味作業則是讓學生通過吟唱、表演等形式生動的學習古詩詞,傳承中國傳統文化! 學生們在“少兒趣味配音”作業中體驗著語言的多元表達和無窮魅力、“探究身邊的數學世界”趣味作業讓學生像數學家一樣去探究生活中的數學奧秘。“中國人 中國味 中國年”學科融合趣味作業融入了思政教育、培養了學生的家國情懷和愛國主義精神。“時間管理”趣味作業則是為了幫助學生提高學習效率、增強時間管理這一事關學習的關鍵能力,孩子們在完成作業的過程中逐步學會管理、規劃、利用時間,使學習更高效。在完成“讀萬卷書 行萬里路”趣味作業時,學生們愛上了閱讀、開闊了眼界。學生在作業過程中感受到學習的樂趣、意義和成就感,從而持續的努力並產生對學習的熱愛。

雙減落地,作業先行。小作業,大思考。作業方寸間,兒童未來遠。雙減,好似一道 $N - 1 > N$ 的數學題,它減掉的是負擔,增加的是無窮的未來可能! 作為教育者,我們要充分發揮學校主陣地作用,高質量做好作業設計與管理,讓學生的基礎知識更紮實、興趣特長得到更好的發展,真切感受到教育的幸福感、獲得感、成就感。

關鍵詞:雙減 作業設計 趣味作業

人生是一次長跑,比知識、成績更重要的是孩子的健全身心、完整人格、學習興趣和探索世界的好奇心,讓孩子在自由的探索與體驗中豐滿羽翼、增強能力,未來才會創造無限可能。教育人的視角要抵達目光所及的作業管理,更要展望孩子的未來和遠方。

一、傳統作業之思與“雙減”契機下的破局探尋

(一)反思傳統作業,找准改革著力點

傳統作業雖具有較強的針對性、目標性和實效性,但也暴露出諸多亟待改進之處。作業形式呈現單一化、陳舊化態勢,內容不夠豐富多元,數量過多且質量欠佳,缺乏針對學生個體實際情況的精心設計,學生自主選擇作業的權利被忽視,趣味性嚴重不足,導致學生對作業的喜愛程度較低。作業具有獨特且不可替代的育人價值,而讓學生喜愛作業則是充分發揮這一價值的重要前提。因此,學校與教師需站在兒童的立場,精心打造既能鞏固知識、提升能力,又兼具趣味性、創新性、挑戰性,能使學生獲得成就感的高質量作業,以促進學生興趣愛好的發展,拓展其知識與能力邊界,讓學生深刻體會到作業的意義以及對自身成長的價值,進而激發學生對作業的熱愛,使其願意主動投入並持續努力。基於此,我校在深入調研與思考上述問題後,開啟了“趣味作業設計”的探索之旅。

(二)落實“雙減”政策,設計趣味作業

傳統作業雖具有較強的針對性、目標性和實效性,但也暴露出諸多亟待改進之處。作業形式呈現單一化、陳舊化態勢,內容不夠豐富多元,數量過多且質量欠佳,缺乏針對學生個體實際情況的精心設計,學生自主選擇作業的權利被忽視,趣味性嚴重不足,導致學生對作業的喜愛程度較低。作業具有獨特且不可替代的育人價值,而讓學生喜愛作業則是充分發揮這一價值的重要前提。因此,學校與教師需站在兒童的立場,精心打造既能鞏固知識、提升能力,又兼具趣味性、創新性、挑戰性,能使學生獲得成就感的高質量作業,以促進學生興趣愛好的發展,拓展其知識與能力邊界,讓學生深刻體會到作業的意義以及對自身成長的價值,進而激發學生對作業的熱愛,使其願意主動投入並持續努力。基於此,我校在深入調研與思考上述問題後,開啟了“趣味作業設計”的探索之旅。

二、理念革新驅動:“雙減”下趣味作業的匠心雕琢

“雙減”政策落地後,我校在深入學習領會其精神內涵的同時,積極推動從理念到實踐的轉變,將立德樹人、學科育人的理念切實落實到教育教學的每一個環節。

我們力求讓每一項作業都蘊藏教育的思考。學校秉承“抓關鍵、看本質、改方式”的原則,從事關學生學習和終身成長的底層邏輯、意識品格、關鍵能力和學習方法進行研究,從

有利於學生未來和長遠發展的角度出發,精心設計了培養學生家國意識、學科融合運用能力、時間管理能力、探究能力、想象力和創造力、錯題整理能力、費曼高效學習法的多項趣味作業。通過精心的設計讓作業分層次、有趣味、活動化、個性化,我們力圖讓每一項作業背後都蘊藏了教育的思考和著眼學生終身發展的深意,將立德樹人的教育內涵賦予其中,把學科育人落到實處。

近年來,學校用心設計了一系列蘊含教育教育思考、著眼學生終身發展的趣味作業,期望借助這些"富有設計感的趣味作業" 激發學生對作業的喜愛之情,讓學生在作業過程中領略到學習的樂趣、體會到作業的意義與成就感,進而持續保持學習的動力與熱情,培養對學習的深厚熱愛。

趣味作業類型	作業蘊含的意識品格、關鍵能力、學習方法
數學"理財"趣味作業	發展財商能力,懂得合理計劃和使用金錢,培養運用知識解決問題的能力,初步建立對家庭、社會的責任感,擁有創造幸福生活的能力,樹立正確的樹立正確的財富觀、人生觀和價值觀
"小足球・大世界"趣味作業	關注世界、結合時事,讓學生能用數學的眼光發現世界,在生活中探究和運用數學,從而產生強烈的學習興趣
"讀萬卷書・行萬里路"趣味作業	強化閱讀能力、拓展學習視野、養成閱讀習慣,運用多學科知識解決實際問題,強健身心、增長見識、開闊眼界
"中國人・中國味・中國年"趣味作業	融入思政教育,培養關注時政、家國情懷、創意想象、多學科融合應用能力
"時間管理"趣味作業	培養學生計劃、管理、統籌時間的能力
"探究身邊的數學世界"趣味作業	加強知識與生活的聯系,培養嘗試探究、學以致用能力
"少兒趣味配音"趣味作業	提升語言素養、增強表達能力、激發學習興趣
"古詩吟唱"趣味作業	培養愛國主義精神、傳承文化經典、打好思想底色、增強民族自信、文化自信
"大家一起說數學"趣味作業	運用"學習金字塔理論"和"費曼高效學習法",增強學習實效
"錯題整理"趣味作業	提高學習效率、優化學習方法、提高學習能力

(一)數學"理財"趣味作業:財商啟蒙與數學實踐的融合創新

寒假恰逢春節,依據各年級學生的特點,量身定制了與日常生活緊密相連的數學"理財"趣味作業,巧妙地將數學學習與財商教育有機融合。1、2 年級的"壓歲錢計劃",3、4 年級的"理財我能行",5、6 年級的"家庭開支建議"趣味作業。學生在實踐活動中學習理財知識,在理財過程中學以致用,合理運用數學知識解決實際問題,用調查、計劃、撰寫、探究、推理、計算等方式記錄實施。通過這項趣味作業幫助學生樹立正確的樹立正確的財富觀、人生觀和價值觀,提升其綜合素養與實踐能力。

（二）“小足球·大世界”趣味作業：足球賽事中的數學探秘之旅

22 年疫情期間正逢足球世界杯，學校敏銳捕捉到這一教育契機，順勢推出“小足球·大世界”數學趣味作業。學生們在完成作業的過程中，學會運用數學的視角去探尋足球賽中蘊含的豐富數學知識，並以饒有趣味的方式對其進行記錄與分享。這一作業設計有效地將數學知識的探究與運用融入到學生感興趣的足球賽事中，在潛移默化中培養了學生在生活中探究和運用數學的能力，激發了學生對數學學習的興趣與熱情。

（三）“讀萬卷書·行萬里路”：閱讀實踐共促綜合素質提升

2022 年暑假，學校精心策劃了“讀萬卷書·行萬里路”趣味作業。在“讀萬卷書”環節，學生們與書籍結為良伴，認真完成閱讀筆記，用心撰寫讀書心得，閱讀習慣與能力得到顯著強化。而在“行萬里路”階段，學生們深入了解旅行途中的歷史文化、風土人情，通過制作旅行手賬、手抄報、電子相冊，撰寫遊記隨筆、數學日記、研究報告、數學小論文、數學連環畫等豐富多彩且富有意義的作品，極大地拓寬了視野，增長了見識。這一作業設計打破了傳統作業的單一模式，將閱讀與實踐有機結合，全面提升了學生的綜合素質與能力。

（四）“中國人·中國味·中國年”：學科融合中厚植家國情懷

這份作業巧妙融合了語文、數學、科任等多個學科的元素，同時將傳統文化、時政新聞以及想象創意融為一體。一至六年級的作業圍繞相同主題，但在內容與形式上各有千秋，充分考慮了不同年級學生的認知水平與能力特點。學生們在完成作業的過程中，充分發揮想象力，創編新年童謠、制作春節海報等，不僅增強了民族自豪感、家國情懷和愛國精神，還提升了文化自信，使學生的整體素養在作業實踐中得到有效提升。學生們的積極反饋與出色表現，深刻詮釋了“培養什麼人、如何培養人、為誰培養人”這一教育根本問題的內涵與價值。

（五）“時間管理”：助力自主學習的關鍵能力培養

時間管理是提高學習效率、增強學習能力的關鍵能力，設計這項特別的作業是希望能夠培養學生具有較強的時間觀念，培養時間管理的習慣和能力。孩子們在完成作業的過程中閱讀了時間管理書籍、擬寫了寒假計劃、進行了每日學習打卡、創作了時間管理臺曆、學會了時間管理四象限法則，通過這些實踐活動，學生們的時間利用率得到顯著提高，時間管理能力不斷增強，進而有效提升了學習效率與學習能力，為學生的自主學習與終身發展奠定了堅實基礎。

（六）“探究身邊的數學世界”：激發自主探究的數學發現之旅

在“探究身邊的數學世界”趣味作業中，學生們如同數學家一般，積極主動地去探索生活中隱藏的數學奧秘。諸如“人民幣為什麼只有 1、2、5、10 這四個面值”、“玩遊戲常用的骰子有什麼秘密”等貼近生活的數學問題，並非源自教師的理論灌輸與教材規定，而是學生憑借自己敏銳的觀察力在日常生活中自主發現的。學生們通過觀察、猜想、實踐、搜集、驗證等科學探究方法，深入研究這些問題，並最終以“數學小論文”的形式呈現探究成果，以發布會的形式進行展示分享，接受教師點

評與同學互評。在這一過程中,學生的自主探究能力得到顯著增強,學會運用數學家的思維方式,結合數學知識去解讀生活中的數學現象,深刻體會到學習數學的樂趣與實際價值,進一步激發了學生對數學學習的熱愛與追求。

(七)"少兒趣味配音":挖掘語言藝術潛能的展示平臺

在"少兒趣味配音"作業中,學校為學生提供了豐富的配音資源,幫助學生了解配音技巧與方法,鼓勵學生用自己的聲音為藍精靈、葫蘆娃、豬豬俠等經典電影角色配音。此外,學校還積極將198份優秀作業選送至全國少兒電影配音大賽,為學生搭建高層次的展示平臺,極大地增強了學生作業的成就感。其中,20名學生榮獲全國與市級獎項,2.4班的邵思睿同學更是作為全市6個一等獎的第一名成功晉級全國總決賽。這一作業設計充分挖掘了學生的語言天賦與藝術潛能,培養了學生的審美能力與表達能力,為學生提供了一個展現自我、提升自信的廣闊舞臺。

(八)"大家一起說數學":基於高效學習法的思維能力培育

"大家一起說數學"趣味作業的設計靈感源於學習金字塔理論和費曼高效學習法。其核心要義在於讓學生扮演"小老師"的角色,通過清晰、準確地說出數學知識、方法和思維過程,培養學生的邏輯思維、高階思維以及數學核心素養。當學生在進行邏輯性較強的數學表達時,結合公式推導、定理驗證、思維導圖等實踐操作,數學核心素養中的數學運算、數學抽象、邏輯推理、直觀想象、數據分析、數學建模等要素便得以自然滲透。在此過程中,學生的總結、歸納、概括能力以及邏輯思維、高階思維和數學素養均得到大幅提升,同時,學生對於學習的責任心、主動性、求知欲等方面也得到了有效培養,為學生的數學學習乃至終身學習奠定了堅實基礎。

(九)"古詩吟唱":文化傳承中的詩意啟蒙與素養涵養

古詩詞作為中國文學寶庫中的璀璨明珠,蘊含著豐富的文化內涵與精神價值。為了讓學生更加生動形象地學習詩詞、熱愛詩詞,我校精心設計了"古詩吟唱"趣味暑假作業,鼓勵學生采用吟唱、表演等富有創意的方式學習詩詞。這一趣味作業吸引了眾多學生踴躍參與,他們身著古裝吟誦詩詞,或撫琴吟唱,或以詩配舞,甚至在瀑布旁應景而誦,與詩詞進行了一場跨越時空的對話,輕輕叩響了古詩的大門。通過這種生動活潑的形式,學生們在吟唱傳統經典的過程中,傳承了文化美德,深刻感受了民族精神與愛國思想的熏陶,增強了文化自信,切實踐行了學科育人與立德樹人的教育目標,使學生在文化傳承與藝術熏陶中茁壯成長。

(十)"錯題整理"趣味作業

整理錯題是提高學習效率的辦法,是減輕學習負擔的有效途徑之一,學校為全體學生設計了"錯題整理"趣味作業。1-4年級采用錯題本的進行整理,5-6年級則是將錯題制作成"易錯題卷"的方式整理。通過這項作業,很好地培養了學生良好學習態度和習慣,提高了教學質量和學習效果,指導學生學會歸納分析、梳理,抓住問題的關鍵,條理化、系統化地解決問題,減輕學習負擔,有利於學生的可持續發展。

以上各類趣味作業大多安排在寒暑假期間,由學校統一設計並公布,學生可根據自身興趣與實

際情況自願選擇完成。作業評價方式以鼓勵為主,注重分層、彈性與多元化,充分尊重學生的個性差異與發展需求,旨在激發學生的學習積極性與主動性,讓每一位學生都能在作業中獲得成長與進步。

三、“雙減”作業實踐:收獲、省思與未來展望

“雙減”政策的落地實施,作業改革首當其沖。看似微不足道的作業設計,實則蘊含著深刻的教育智慧與思考。在作業這片小小的天地中,孕育著兒童無限廣闊的未來。通過對作業設計的深入探索與實踐,我校積累了寶貴的經驗,獲得了深刻的啟示:

(一)雙減,好似一道 $N-1>N$ 的數學題,減掉負擔,加上未來

雙減,好似一道 $N-1>N$ 的數學題,從表面上看,它減少了學生的作業負擔、培訓壓力、內卷焦慮、機械重複以及沉重的心理負擔,但實際上,它為學生的未來增添了無限可能。精心設計的高質量作業,能夠讓學生擺脫過重的作業束縛,減少不必要的培訓負擔,緩解內卷帶來的焦慮情緒,摒棄機械重複的學習模式,減輕沉重的心理壓力,從而使學生擁有更加健康的身心狀態,有更多的時間與精力去培養興趣愛好,享受家庭的有效陪伴,激發創造的熱情,收獲童年的快樂,為學生的未來發展奠定堅實的基礎,開啟充滿無限可能的人生之旅。

(二)作業原來可以如此有趣

傳統觀念中,作業往往被視為枯燥乏味的任務,但通過我校的實踐探索發現,只要用心設計,作業完全可以變得充滿趣味。趣味性作業能夠吸引學生的注意力,激發學生的學習興趣與參與熱情,讓學生在輕松愉悅的氛圍中主動完成作業,從而實現知識的鞏固與能力的提升,打破了學生對作業的固有認知,為作業賦予了全新的生命力與吸引力。

(三)讓學生愛上作業是促進學生成長學習的重要措施

當學生對作業產生喜愛之情時,他們會更加主動地投入到學習中,積極探索知識的奧秘,努力克服學習過程中遇到的困難,從而實現學習的持續進步與成長。愛上作業不僅能夠提高學生的學習成績,更重要的是能夠培養學生的學習習慣、學習態度以及自主學習能力,為學生的終身學習奠定堅實的基礎,成為促進學生成長學習的關鍵因素與重要動力。

(四)用心設計高質量的作業承載著重要的育人功能

每一項精心設計的作業背後,都蘊含著教育者對學生全面發展的殷切期望與深刻思考。這些作業不僅僅是知識的鞏固與技能的訓練,更是培養學生家國情懷、社會責任感、創新精神、實踐能力、審美情趣等綜合素質的重要載體。通過作業這一橋梁,將學科知識與育人目標有機融合,實現知識傳授與價值引領的統一,充分發揮作業在立德樹人過程中的關鍵作用,促進學生德智體美勞全面發展。

(五)提高作業設計質量是落實“雙減”的有效舉措

高質量的作業設計能夠精準把握教學目標與學生實際需求,避免無效、重複作業的出現,減少學

生的作業量與作業時間,同時確保學生在完成作業的過程中能夠獲得實質性的知識增長與能力提升。通過提高作業設計質量,實現作業的"減負提質增效",是落實"雙減"政策的核心任務與有效途徑,能夠切實減輕學生的學業負擔,提高教育教學質量,推動教育向高質量發展邁進。

(六)實踐加深了對"雙減"重大意義的理解

通過一系列趣味作業的設計與實施,我校深刻體會到"雙減"政策對於學生身心健康、全面發展以及教育生態優化的重大意義。"雙減"政策不僅僅是對作業數量與培訓時間的簡單限制,更是對教育理念、教育方式、教育評價等方面的深刻變革。它促使教育者回歸教育初心,關注學生的個體差異與成長需求,注重培養學生的綜合素質與核心素養,為學生創造一個更加公平、健康、和諧的教育環境,讓教育眞正成為培養人的事業,而非單純的分數競爭。

學校通過精心設計趣味作業,有效培養了學生計劃、管理、統籌時間的能力,幫助學生優化學習方法、提升學習能力、提高學習效率、增強學習效果,顯著縮短了作業時長,切實減輕了學生過重的作業負擔,有力地落實了"雙減"精神。

通過設計內涵豐富的趣味作業和一系列的實踐,以及對學生、家長、老師的調研分析,我們看到了孩子們對趣味作業的眞實反饋,絕大多數學生十分喜歡學校設計的各種趣味作業,並積極參與其中體會到了作業的樂趣、收獲了學習的成就感和價值感。看到了家長對趣味作業的支持和肯定,看到了老師們在作業設計的過程中蘊含的對學生的愛與責任。

一把趣味作業的"火",點燃了學生探究的欲望與學習的熱情。學生在完成趣味作業的過程中,深刻體會到學習的樂趣,獲得成功的體驗,這將為學生帶來源源不斷的學習幸福感與內在動力,這或許正是"作業設計"的核心價值與意義所在。那些懷揣著探究精神與學習熱情的孩子,未來必將創造出超出我們預期的無限可能。或許在若幹年後,曾經參與"古詩吟唱"作業的孩子會成長為熱愛詩詞的文學創作者,參與"中國人中國味中國年"作業的孩子會成為獨具匠心的小畫家、音樂家、設計師,參與"大家一起說數學"作業的孩子會踏上成為數學家的征程,參與"數學理財"作業的孩子會成為專業的精算師…… 雖然未來充滿變數,但卻值得我們滿懷期待!

四、以愛為翼:教育者的堅守與學生的遠方

"父母之愛子,則為之計深遠。"教育者亦是如此,我們深知,教室裏的每一個孩子都是一個家庭的整個世界。為此,我們須臾不敢懈怠,充分發揮學校主陣地作用,高質量做好作業設計與管理,讓學生的基礎知識更紮實、興趣特長得到更好的發展,眞切感受到教育的幸福感、獲得感、成就感。

作為教育人,我們希望給孩子一個遠鏡頭,將孩子引向開闊,引向遠方。讓孩子們在夢想的天空飛得更高、更遠!

用豎式乘法突破整式乘法與因式分解的學習難點

廣州市天河外國語學校

肖　曄

本文為廣東省教育科學規劃 2025 年廣州市教育科學規劃重點規劃課題《基於短視頻輔助教學培養初中數學閱讀與交流能力的實踐研究》(課題編號:2024110756)階段性研究成果.

摘要:乘法公式是代數運算的重要基礎,不少學生靈活運用公式進行多字母式子的代數變形感到困難,特別是在算理不清時進行逆向的因式分解更困難。經過多輪教學實驗,發現用豎式乘法貫穿整式乘除與因式分解章節,可以加深學生對整式乘法的理解並突破因式分解中十字相乘法這個難點。

關鍵詞:整式乘除、豎式乘法、分解因式、十字相乘法

一、問題的提出

人教版教科書八年級上冊只是在第 133 頁閱讀與思考裏介紹了用十字相乘法對二次項系數為 1 的二次三項式進行分解因式(圖 1)[1]。因為教材對這個方法的處理比較簡單,學

> 上述分解因式 x^2+3x+2 的過程，也可以用十字相乘的形式形象地表示：先分解二次項系數，分別寫在十字交叉線的左上角和左下角；再分解常數項，分別寫在十字交叉線的右上角和右下角；然後交叉相乘，求代數和，使其等於一次項系數（圖1）.
>
> $$\begin{array}{ccc} 1 & \searrow\!\!\!\!\nearrow & 1 \\ 1 & \nearrow\!\!\!\!\searrow & 2 \\ \hline \multicolumn{3}{c}{1\times2+1\times1=3} \end{array}$$
>
> 圖1
>
> 這樣，我們也可以得到 $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$.

生接受起來比較困難。而且教材沒有進一步介紹十字相乘法對二次項系數不為1的式子是否適用,及對於 $x^2+3xy+2y^2$ 這樣的含兩個字母的式子是否適用。而該內容在初二階段不作為考查重點,但在初三學習分解因式法解一元二次方程是很重要的方法。在高中階段,十字相乘法及雙十字相乘法分解因式都是很常用的代數變形方法。關於十字相乘法分解因式這部分內容,初高中銜接確實存在問題。

八年級學完《整式乘除與因式分解》章節學生需要掌握什麼技能?需要提升哪方面的思維?數學課程標準對本章節的要求是"能進行簡單的整式乘法(期中多項式相乘僅指一次式之間以及一次式與二次式相乘)。能推導乘法公式(完全平方公式、平方差公式),了解公式的幾何背景,並能利用公式進行簡單的計算。能用提公因式法、公式法(直接利用公式不超過二次進行因式分解(指數是正整數)。"[2] 對十字相乘法不做要求,但要求"理解配方法,能用配方法、公式法、因式分解法解數字系數的一元二次方程。"在高中階段,字母運算明顯比初中繁雜,學生需要有更熟練靈活運用整式的和積形式互換的運算能力及整體代換的思想。在初中階段如果沒有打下紮實的基礎,高中階段解題可能會止步在運算。

章節	義務教育階段運算難度舉例	高中階段運算難度舉例
《整式乘除與因式分解》《一元二次方程》	1. 計算:(1) $(x+1)\cdot(x+2)$ (2) $(x-1)^2$ (3) $(2a+1)(2a-1)$ (4) $(2a+b+1)^2$ 2. 分解因式:(1) x^2+2x+1 (2) $9x^2-4y^2$ (3) $x^3-4x^2y+4xy^2$ (4) x^4-16 3. 解下列方程: (1) $x^2+2x=0$ (2) $4x^2-4x+1=0$ (3) $3x^2+2x-1=0$ (4) $3x^2+12x-1=0$	1. 分解因式: (1) $x^2+4y^2+9+4xy-12y-6x$ (2) $2x^2+4y^2-3+6xy-4y-5x$ (3) $mx^2-(m^2+m+1)x+m+1$ 2. 已知 $\frac{p(k^2+2)^4}{2k^4}+\frac{p(k^2+2)^2}{2k^2}=1$ 求 P 的最大值. 3. 當 $x\in\left(\frac{1}{a},\frac{2}{a}\right)$ 時, 求 $\frac{a}{2-ax}-a+\frac{1}{x}-a$ 的取值範圍. 4. 已知 x、y、z 為正數, $3^x=4^y=6^z$, 求證: $x+y>\left(\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right)z$.

初中階段像"$3x^2+2x-1=0$"這類的方程,用公式法也可以順利解決,導致部分教師和學生不重視十字相乘法的學習。

除了課程標準不要求掌握的十字相乘法外,四項以上或二次以上的多項式進行分解因式對學生而言也是比較困難的。需要學生具有整體觀,靈活使用乘法公式及分組分解法

二、基於二項式乘法本質理解的單元教學難點突破

（一）十字相乘法的二項式乘法本質

十字相乘法是怎麼來的？請看下面兩個運算

(1) $(x+1)\cdot(x+2)$

$=(x+1)\cdot x+(x+1)\cdot 2$

$=x^2+x+2x+2$

$=x^2+3x+2$

(2)

$$
\begin{array}{r}
(x+1) \\
|\times| \\
\cdot\ (x+2) \\
\hline
+2x+2 \\
x^2+x\quad \\
\hline
x^2+3x+2
\end{array}
$$

十字相乘法本質就是把橫式乘法寫成豎式的樣子,類似小學兩位數乘兩位數的豎式草稿。本質是乘法分配律的使用。整式範圍內只有兩個一次二項式相乘才可能得出一個二次三項式,於是可以根據二次三項式的頭尾項猜測兩個一次多項式的各項,再用乘法去驗證猜測結果是否正確。學生在小學時兩位數乘兩位數的豎式草稿使用得很好,對含字母的豎式乘法接受也比較快。

（二）大單元教學難點突破策略

在《整式乘除與因式分解》的單元教學中,如何突破前述的教學難點？可按照如下六個步驟展開。

第一步:學習二項式乘二項式的第 1 課時引入豎式乘法作為橫式乘法的檢驗手段。

小學學習 32×21 時是使用豎式乘法輔助計算(圖 2)。32×21 也可寫成 $(30+2)(20+1)$,可用乘法分配律進行計算:$(30+2)(20+1)=(30+2)\times20+(30+2)\times1=600+40+30+2=672$。這個式子頁可用豎式乘法來檢驗(圖 3)。分別用字母 a、b、c、d 表示 $+30$、$+2$、$+20$、$+1$ 可得式子 $(a+b)(c+d)$,這個二項式乘二項式用乘法分配律計算如下:$(a+b)(c+d)=(a+b)c+(a+b)d=ac+bc+ad+bd$。 這個式子同樣可用豎式乘法來計算(見圖 4)。

$$
\begin{array}{r}
3\,2 \\
\times\ 2\,1 \\
\hline
3\,2 \\
+6\,4\ \ \\
\hline
6\,7\,2
\end{array}
$$

圖2

$$
\begin{array}{r}
30+2 \\
\times\ \ 20+1 \\
\hline
30+2 \\
+600+40\quad \\
\hline
+600+70+2
\end{array}
$$

圖3

$$
\begin{array}{r}
(a+b) \\
|\times| \\
\times\ (c+d) \\
\hline
+ad+bd \\
+ac+bc\qquad \\
\hline
+ac+bc+ad+bd
\end{array}
$$

圖4

$$
\begin{array}{r}
(a-b) \\
|\times| \\
\times\ (c-d) \\
\hline
-ad+bd \\
+ac-bc\qquad \\
\hline
+ac-bc-ad+bd
\end{array}
$$

圖5

絕大部分學生對這個豎式乘法是很好接受的。在含減法的式子中要強調減號看成負號。如 $(a-b)(c-d)=(a-b)c-(a-b)d=ac-bc-ad+bd$。這個用豎式乘法,會減少去括號變號的錯誤率(圖 5)。在做相應多項式乘多項式時,要求在旁邊列豎式乘法檢驗。三項式也可類比三位數的乘法列豎式。

掃碼觀看相關微課
《多項式乘多項式》

第二步:分析二項式乘二項式的可能結果。

在熟練掌握乘法分配律橫式乘法和豎式乘法的基礎上觀察二項式乘二項式化簡後的情況(本文提到的多項式的項數均為化簡後的項數)。學生會發現二項式乘二項式化簡後的情況有 3 種,分別為四項式、三項式、二項式。

例:$(x+1)(y+2)=(x+1)y+(x+1)2=xy+y+2x+2$ 結果為四項;

$(2x-1)(x-2)=(2x-1)x+(2x-1)(-2)=2x^2-x-4x+2=2x^2-5x+2$

結果為三項;

$(x-2y)(x-2y)=(x-2y)x-(x-2y)2y=x^2-2xy-2xy+4y^2=x^2-4xy+4y^2$

結果為三項;

$(x+y)(x-y)=x(x-y)+y(x-y)=x^2-xy+xy-y^2=x^2-y^2$結果為二項。

第三步:討論相乘結果為三項和二項的兩個二項式的特點,並總結規律。

相乘的兩個二項式所含項有一組不是同類項,結果是四項;相乘的兩個二項式含的兩個項都是同類項,結果是三項或二項。為什麼會產生二項式這樣的結果?可用符號運算分析。如圖 6 相乘的兩個二項式所含項均不相同結果為四項。如圖 7 相乘的兩個二項式各含一個相同的項 □,若另外兩項 ○ 項 △ 項是純數字或同類項,積的中間兩項可合並,結果為三項。如圖 8,相乘的兩個二項式包含兩個完全相同的項,積的中間兩項完全相同,結果為三項,而且頭尾都是平方項。如圖 9,相乘的兩個二項式包含一個相同的項,一個相反的項,積的中間兩項正好相反,合並為 0,結果為二項,而且頭尾也是一個正平方項,一個負平方項。

掃碼觀看相關微課
《乘法公式》

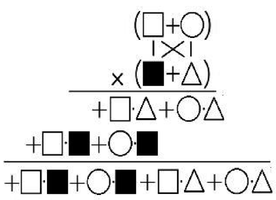


圖6

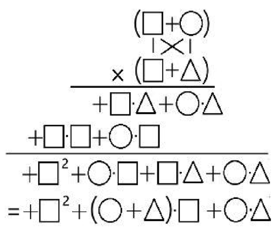


圖7

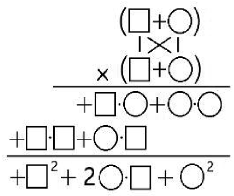


圖8

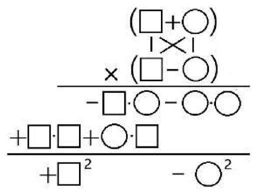


圖9

第四步:學習利用圖 8 和圖 9 的結果對符合條件的式子進行快速的計算。

$(□+○)^2=□^2+2□○+○^2$ 叫做完全平方公式,$(□+○)(□-○)=□^2-○^2$ 叫做平方差公式。$□^2+2□○+○^2$ 這樣的二次三項式可寫成一個和的平方,這樣的式子也叫做完全平方式。用字母 a、b 表示 □、○ 完全平方公式為$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$;用字母 a、$-b$ 表示 □、○ 完全平方公式為$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$;用字母 a、b 表示 □、○ 平方差公式為$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$. **用 □、○ 介紹公式可以訓練學生的整體思想,幫助學生理解套用公式的方法。** 如$(2a+3b)(2a-3b)$ 可以理解為 □ 內是$2a$,○ 內是$3b$;$(a+b+c)^2$ 可以看成 □ 內是 $a+b$,○ 內是c;$(a^2+bc)^2$ 可以理解為 □ 內是 a^2,○ 內是 bc.

第五步：利用公式和豎式乘法進行分解因式。

在學完提公因式法分解因式後，繼續學習用公式法分解因式。首先需要學生判斷一個和式是否符合某個公式。二項平方差公式比較容易判斷，三項的完全平方式會比較容易誤判。例如 $x^2+4xy+4y^2$ 和 $x^2+5xy+4y^2$，$9m^2-6m+1$ 和 $9m^2-10m+1$ 初學的時候容易看頭尾忘記檢驗中間，把這兩類式子放在一起進行對比，可以幫助學生深入理解完全平方公式。像 $x^2+5xy+4y^2$ 和 $9m^2-10m+1$ 這樣的式子如何分解因式呢？根據整式乘法的經驗，這兩個式子的三項都無公因式，不可能是三項式乘單項式的結果，只能是兩個含同類項的二項式的積. 可以利用豎式乘法猜想這兩個二項式的項. 根據 $x^2+5xy+4y^2$ 的平方項，猜測它符合完全平方公式，當把 x、$2y$ 分別填入□、○ 內(圖 10)，發現中間項的結果不是 $+5xy$，根據做乘法積累的經驗，只需要變換含 y 項的系數就可以得到需要的中間項(圖 11)。這就是十字相乘法，利用和式平方項或常數項猜積式的兩組同類項，再交叉相乘檢驗中間項是否相符，變換系數調整到合適。在前四個步驟的鋪墊下，大部分學生可以輕松掌握十字相乘法。

$$\begin{array}{r} (\boxed{x}+2y) \\ \cdot(\boxed{x}+2y) \\ \hline \boxed{x}^2+2\boxed{x}\,2y+2y^2 \end{array}$$

圖10

$$\begin{array}{r} (x+4y) \\ \cdot\,(x+y) \\ \hline +x^2+4xy+xy+4y^2 \end{array}$$

圖11

掃碼觀看相關微課

《用十字相乘法分解因式》

三、利用十字相乘法快速解決高中階段的分解因式題

先看(1)$x^2+4y^2+9+4xy-12y-6x$，多於 3 項的二次多項式因式分解可使用分組分解法，觀察後發現 $x^2+4xy+4y^2$ 這三項符合完全平方式的特點，進行分組 $(x^2+4xy+4y^2)-(6x+12y)+9$，再變形為 $(x+2y)^2-6(x+2y)+9$ 然後得 $(x+2y-3)^2$. 也可以根據經驗，根據題目的各項種類，可猜測積式的兩個因式都含三組同類項，含 x 的項，含 y 的項和常數項，用豎式分解(圖 12)。

$$\begin{array}{l} (x+2y-3) \\ \cdot\,(x+2y-3) \\ \hline +x^2+4y^2+9 \\ \quad +4xy-12y \end{array}$$

(雙十字相乘分解)

$$\begin{array}{l} (x+2y-3) \\ \cdot\,(x+2y-3) \\ \hline +x^2+4y^2+9 \\ \quad +4xy-12y \\ \qquad -6x \end{array}$$

(外十字相乘檢驗)

圖12

$$\begin{array}{l} (2x+4y-3) \\ \cdot\,(x+y+1) \\ \hline +2x^2+4y^2-3 \\ \quad +6xy+y \\ \quad -5x \end{array}$$

①

$$\begin{array}{l} (2x+2y-3) \\ \cdot\,(x+2y+1) \\ \hline +2x^2+4y^2-3 \\ \quad +6xy-4y \\ \quad -x \end{array}$$

②

$$\begin{array}{l} (2x+2y+1) \\ \cdot\,(x+2y-3) \\ \hline +2x^2+4y^2-3 \\ \quad +6xy-4y \\ \quad -5x \end{array}$$

③

圖13

$$\begin{array}{r} (mx-1) \\ \cdot\,(x-(m+1)) \\ \hline -(m^2+m)x+(m+1) \\ mx^2-x \quad\quad\quad\quad\quad \\ \hline mx^2-(m^2+m+1)x+(m+1) \end{array}$$

圖14

再看(2)$2x^2+4y^2-3+6xy-4y-5x$ 分組比較困難，用豎式分解就會順利些。如圖13① 雙十字分解中的右十字不成功,如圖 13② 調整含 y 項系數雙十字分解成功但外十字相乘不成功,如圖 13③ 調整常數項分解成功。

再看(3)$mx^2-(m^2+m+1)x+m+1$ 用豎式分解可以一步到位(見圖 14)。

四、教學效果數據及分析

十字相乘法在初中階段屬於選修內容,通常期末考試不考察這個知識點。2023 年上學期期末考試後一周,筆者在支教學校的兩個不同年級班級但同層次班級進行十字相乘法小測(見圖 15)。初二(1) 班,在學習《整式乘除及因式分解》時,采用豎式貫穿整個章節的教學策略,沒有單獨講授十字相乘法,只是在學習完全平方公式對比學習十字相乘法,課堂做過 4 個需使用十字相乘法的練習,小測做過 2 個需使用十字相乘法的練習。初三(1) 班,初二學習《整式乘除及因式分解》學習過圖 1 中的閱讀與思考,初三學習《二元一次方程組》時也重新複習過十字相乘法。

1 月 17 日　姓名________

用十字相乘法把下列各式分解因式

(1) $x^2+4xy-5y^2$

(2) $x^2y^2-11xy+24$

(3) $a^2b^2+2ab-8$

(4) $4x^2-5xy-9y^2$

(5) $3a^2-4ab+b^2$

(6) $2x^2-9xy+4y^2$

(7) $2a^2-9ab+9b^2$

(8) $16x^2+10x-9$

(9) $6a^2-3a-84$

(10) $15-134m-9m^2$

圖15

從表 1 的統計數據可以看出,豎式貫穿式教學策略比較高效。初二(1) 班十字相乘法理解得比較好,錯因主要是計算錯誤,後兩題系數較大錯的較多。

測試完後與初三(1) 班部分期末考試 90 分左右(滿分 120)的學生進行了訪談,總結了以下三種錯誤原因。第一種只會做一個平方項系數為 1 的題。第二種用交叉分解後,交叉寫結果,沒有真正理解十字相乘法的原理。第三種不會使用豎式交叉分解,直接橫式分解。

表 1　測試數據對比分析

班級	初二(1) 班		初三(1) 班	
對 10 題人數及佔比	8	21.05%	4	12.50%
對 8 或 9 題人數及佔比	8	21.05%	5	15.63%
對 6 或 7 題人數及佔比	14	36.84%	4	12.50%
對 5 人數及佔比	3	7.89%	2	6.25%
對 4 人數及佔比	2	5.26%	4	12.50%
對 3 人數及佔比	1	2.63%	6	18.75%
對 2 人數及佔比	0	0.00%	2	6.25%
對 1 人數及佔比	0	0.00%	4	12.50%
對 0 人數及佔比	2	5.26%	1	3.13%
合計	38		32	

十字相乘法分解因式的本質就是豎式乘法的逆用,如果學生不理解豎式乘法的順用,就很難眞正理解它的逆用。

五 、結語

豎式乘法比橫式乘法更加直觀,可以幫助學生理解完全平方公式、平方差公式的原理。十字相乘法只分解系數的模式,對於初學者會有一定困難。從豎式乘法引入,大部分學生都能接受。學習是一種認識的改變,在學生原有的知識基礎上慢慢加入改變,可以幫助學生度過高低學段的銜接困難期。義務教育階段數學學科課程標準對這部分內容的要求較低,與高中階段的需求有點不匹配。引入豎式乘法可以在不增加義務教育階段學習困難的同時彌補不足。

“符號化數學教學,可以訓練學生嚴謹的形式邏輯思維能力,根據腦科學研究,包括數字加工、計算、符號加工推理等可以顯著激活大腦頂葉區域,這表明長期以來的符號化數學教學有它的科學依據。”[3] 如圖 6 至 9,用豎式圖形符號描述運算的形式規律,也可以更好地幫助學生建立符號運算的形式邏輯思維。

參考文獻

[1] 人民教育出版社. 義務教育教科書數學八年級上册[M]. 北京:人民教育出版社,2023.

[2] 教育部. 義務教育課程標准[M]. 北京:北京師範大學出版社,2022.

[3] 潘希武. 基礎教育課程與教學改革研究[M]. 廣州:中山大學出版社,2021.

錨定教學起點,踐行以學定教:小學數學有效教學策略的案例研究

珠海市香洲區夏灣小學

葉明珠

摘要:學生的已有認知是其建構新知識的基礎,深刻影響新知學習效果。本文基於《義務教育數學課程標準》理念及相關學習理論,結合五個典型教學案例,探析了在小學數學教學中如何有效利用學生已有認知提升教學實效性的具體策略。這些策略旨在幫助教師找準教學起點,尊重學生主體性,促進深度理解與思維發展。

關鍵詞:已有認知;小學數學;教學策略;教學起點;以學定教

學生已有認知是學生在學習新知識之前,通過感知覺和各種思維活動對外在信息進行加工獲得已有的知識經驗儲備,即通常所說的"學生已經知道了什麼"。《義務教育數學課程標準》在教學建議中強調,要參考學生個人經驗和已有知識積累,從解決問題需要出發,明確所學數學知識與技能,提出相應學習任務,確定學習活動形式。[1] 正如《人是如何學習的》一書中所強調的:新知識的建構必須來源於已有知識,如果忽視學生的初始概念、觀點,他們獲得的理解可能與教師預設的想法大相徑庭。[2] 由此可見,學生的已有認知是確定有效"教學起點"的根本依據,是踐行"以學定教"理念的基石。然而在我們平時的教學中,教師往往對學生的已有認知了解不足,按照預設的教學方案進行教學,遇到學生呈現的資源與預設不符時,往往缺乏有效的應對策略,強行將學生的思路拉回預設軌道,而忽視了學生的眞實生成。學生是教學活動的核心主體,也是教育服務的最終對象。教師的備課應始終以學生的發展為中心,充分了解學生的已有認知,進行充分預設,深入思考學生在面對新知時可能產生的想法,並設計相應的應對策略,準確把握教學的起點,順應學生的認知邏輯設計教學流程,從而促進豐富的課堂生成,達成更優的教學效果。

基於上述認識,教師應秉持"以學定教"的理念,將精準把握學生的已有認知作為教學設計的邏輯起點。唯有如此,方能靈活運用教學策略,實現有效教學。下文將結合五個典型教學案例,闡述如何基於對學生已有認知的深度理解,動態調整"教學起點",落實"以學定教"原則的具體策略。

一、善待"暴露"的正確答案

在新課教學之前,教學中難免有個別學生已通過自學等途徑初步了解了新知識,甚至能直接給出正確答案,面對這種狀態,有的老師為避免"節外生枝",采取忽視或回避的態度,挫傷了學生的自學積極性。

如:在教學《平行四邊形》面積一課時,教師通過課前調查,發現一些孩子因為長方形的面積=長×寬,進而錯誤地類比認為平行四邊形面積=底邊×斜邊,於是準備在課上用活動的平行四邊形框架做演示。課上,當孩子們猜測平行四邊形面積=底×斜時,老師正準備演示,卻有個提前自學的孩子站起來說"平行四邊形面積=底×高",教師一時顯得有些無措,未予置評便讓學生坐下,按照自己的計劃繼續演示。面對提前"暴露"正確答案的孩子,該生的自主學習行為未獲肯定,反而使其體驗受挫。

如果老師能夠尊重孩子已有認知,請孩子繼續說下去,並將活動的平行四邊形框架交給孩子去演示,提前知曉結論的學生與持不同猜想的學生雙方闡述各自觀點的依據成為課堂新的生長契機,學生們相互補充,不僅能讓"錯誤"猜測的孩子實現知識的重新建構,也可以讓提前自學的孩子獲得積極反饋,激發更多學生自主學習的意願。

二、反轉預設的教學流程

在設計探究類教學活動時,若學生群體已普遍知曉結論,仍機械地按照教材預設流程展開所謂的探究,則探究活動極易流於形式,難以達成預期目標。

如:在教學《圓的周長》一課時,學生的學習活動在教師的引導下按預設步驟進行,學生先自己想辦法通過"繞一繞""滾一滾"測量圓片的周長,體驗了方法的多樣性,初步感知了'化曲為直'的數學思想,在此基礎上,如何引導學生優化方法、提升思維層次,進而發現更具普適性的計算方法?於是教師依據教材設計,組織學生進行小組活動,旨在"探究圓的周長與直徑的關系"。老師布置了探究任務,提供了一些圓形學具,請學生在小組中先測量周長和直徑並填表,計算它們的商,看看有什麼發現。按照教材的流程和老師的設計,學生應該邊測量邊填表,但實際情況是,由於大部分孩子已經做了課前預習,或是通過其他途徑學過該知識,所以觀課中發現,大部分小組的孩子並沒有真的測量周長,只是測量了直徑,然後填出比值 3.14,最後計算出周長填入表中,教材預設的探究活動形同虛設。

物品名稱	周長	直徑	$\frac{\text{周長}}{\text{直徑}}$ 的比值（保留兩位小數）

如何基於學生的實際認知狀況實施有效教學? 我們應該在課前對學生有所研究,當預評估或課堂觀察表明大部分學生已了解圓周率 π 的概念及其意義時,我們需要對這個環節進行調整,將教學重點從“探究未知關系”轉向“驗證已知關系”。引導學生實際測量若幹組圓的周長和直徑,計算周長與直徑的比值(商),驗證其是否接近或等於 π(3.14)? 並將測量結果不等於 3.14(引發對測量誤差的探討)與恰好等於 3.14(引發對數學精確性與數據眞實性的思考)的情況均視為寶貴的教學資源,組織學生深入討論。

這樣的調整正是“以學定教”的體現,它將教學的起點從教材預設的“零認知探究”動態調整為符合學生實際認知水平的“驗證性探究”,有效提升了教學的針對性與效率。

三、善用“錯誤”的教學價值

在集體備課時,教師常基於經驗預判學生可能在哪些題目上出錯率高,因此,部分教師采取的策略是:要麼在練習前進行大量提示以“排除障礙”,要麼在學生練習後僅對這些題目進行重點講解。課堂觀察發現,部分教師傾向於回避在課堂上公開呈現學生的典型錯誤並深入剖析其成因,其理由通常是擔心會“強化”錯誤。這種擔憂是否合理?

如:在《直線、射線、線段》課後練習有一題“過一點可以畫多少條直線?”教師預判可能有學生將“過一點畫直線”誤解為“從一點出發畫射線”,於是采取了“提前幹預”的策略,在學生動手操作前,即詳細說明“過一點畫直線,要穿過這個點,不要畫成射線。”倘若教師能放手讓學生根據題意先行嘗試,引導他們在遭遇認知障礙時自主尋找解決方案,在辨析錯誤中探究根源,在同伴互助中獲得成長,其教學效果是否會更為理想?

《比的意義》集體備課時,教師們預測“做一做”第 2 題“3:(　　)= 24”會有大量學生錯誤地填寫 8,因擔憂課堂出現“意外”狀況,竟然提出去掉該題,經研討後采納建議“展示學生的錯誤才能促進學生在辨錯的過程中深化理解。”該題目最終得以保留,然而在試教過程中,教師未能給予學生充分闡述錯誤思路的機會,也缺乏組織學生進行錯誤辨析的環節,而是直接講解正確做法。

因此,教師不應回避錯誤,而應視其為診斷眞實“教學起點”、精準實施“以學定教”的關鍵契機。學生的認知“錯誤”如同病症的表現,醫生需通過症狀診斷病因方能對症施治,教師唯有鼓勵學生先行嘗試,充分暴露其眞實想法(包括錯誤),傾聽學生解釋其思路,方能精準定位問題症結,實施適時、適切的引導,讓學生在思維辨析中增進理解,加深認識。

四、運用“講道理”促進理解

國際 TIMSS 測試主要針對四年級的孩子,最近通過對 TIMSS 測試題進行研究發現,題目多為常規類型,難度並不大,不同的是,更加強調對概念、意義、法則的眞理解而已,僅靠機械重複的訓練難以顯著提升此類成績,關鍵在於日常教學中注重引導學生‘講道理’,以

此促進眞正的理解。

$35-7+10$	$35-7+10$	$35-7+10$	$35-7+10$
$=35-17$	$=28+10$	$=45-7$	$=35+3$
$=18$	$=38$	$=38$	$=38$
圖1	圖2	圖3	圖4

如:在教學《加減法混合運算》時,教師告知學生法則:“在只有加減法的算式裏,要按照從左往右按順序計算”,但在實際練習“35－7＋10”時,學生卻出現了多種不同的計算過程(如圖 1、3、4 所示),一位同學板書(如圖 1),教師指出圖 1 為錯誤解法,並再次強調法則(如圖 2 所示):“需按從左到右順序計算。”此時有學生(圖 3 解法者)質疑:“老師,我也是先算右邊的加法,結果也是 38。”另一學生(圖 4 解法者)也附和:“我也是先算右邊加法,也得 38。”

教師一時語塞,轉而強調:“雖結果相同,但跳步計算易出錯,應嚴格按從左往右的順序計算。”這反映出,當學生的認知起點已超越對規則的簡單記憶、開始質疑其合理性並尋求理解(新的教學起點出現)時,教師若未能及時調整教學策略(未能“以學定教”),僅靠重申規則不僅無法解答學生的困惑,反而強化了學生對數學學習“不講道理”的誤解,阻礙了眞理解的達成。

教師可以根據算式“講道理”:分析圖 1 錯誤原因在於,是因為本來想減 7,卻減了 17,多減了 10 應該補回來,可是題目中不但沒有補回來,還把題目中原本的+10 也給丟了,所以少算了 20;圖 3 解法實質是運用了加法的交換律,把減 7 和加 10 前後換了位置,不影響得數;圖 4 解法則巧妙地利用了加的 10 比減的 7 多 3,說明只加上多出來的 3 就可以了。這直接回應了學生對“為什麼不能那樣算”以及“為什麼那樣算也對”的深層疑問,將教學建立在學生對算理理解的訴求之上。

亦可設置情境“講道理”:車上原來 35 人,下車 7 人,又上車 10 人,現在有多少人? 既可模擬“先下 7 人再上 10 人”(對應順序計算),也可模擬“先上 10 人再下 7 人”(對應圖 3 解法),甚至可簡化為考慮“淨增加 3 人”(對應圖 4 解法)。通過具象化情境,為抽象規則賦予意義,契合了學生需要直觀支撐的理解起點。

這種“講道理”的方式,正是基於學生認知沖突和求知需求(教學起點)而選擇的針對性教學路徑(以學定教),它超越了機械灌輸,有效促進了學生對運算本質的理解。

五、分享與推廣學生“創見”

學生往往具備出色的思考能力與創造力,其解題方法時常能超越教師的預設。如:練習題“某工廠加工一批服裝,原來每天加工 48 件,需要 4 天完工,現在要想提前 1 天完工,平均每天要比原來多加工多少件?”大部分學生采用常規解法:$48\times4\div(4-1)-48=16$(件)

一個學生舉手說:“老師,我有更簡便的方法:48÷3=16(件)。”

教師審視後回應:“雖然結果也是16,但這樣列式似乎缺乏依據。”隨即轉入下一題的講解。倘若教師能邀請該生闡述思路,便會發現,提前1天完工,意味著需將原計劃第4天完成的48件服裝,分攤到前3天完成,因此平均每天需額外加工 48 ÷ 3 = 16 件,這是一種極具洞察力的簡便解法。

給予學生分享創見的機會,這不僅是“以學定教”中對學生主體性和創造性的高度尊重,更是將學生生成性資源作為新的“教學起點”,推動課堂向更高層次發展的生動體現。

綜上所述,上述五個策略雖切入點不同,但其核心均在於深刻理解並尊重學生的已有認知,以此作為不可替代的“教學起點”,並依據學情動態調整教學進程,真正落實“以學定教”。教師需要摒棄“教教材”的慣性思維,轉向“基於學情教學生”的實踐智慧。

當代學生獲取知識的渠道極為多元,知識儲備也更為豐富,教科書早已不再是他們獲取知識的唯一途徑,教材中許多預設的探究環節在實際課堂中可能因學生已知曉結論而失去探究意義。華東師範大學劉良華教授曾說:“教師的作用不在於傳遞知識,而在於回應學生。”

因此,“以學定教”應成為小學數學教學的核心理念。教師需充分尊重並深入理解學生的已有認知,將其作為關鍵的教學起點,精準把握教學方向。在此基礎上,設身處地思考學生的認知路徑,運用教育智慧與耐心,給予積極有效地回應。唯有如此,課堂才能在深度互動的師生對話、生生交流中迸發出更多智慧火花,實現從“預設起點”向“生成性起點”的躍遷,切實提升教學的有效性。

參考文獻

[1]《義務教育數學課程標准(2022年版)》[M].北京:北京師範大學出版社,2022.

[2][美]約翰·D·布蘭思福特.《人是如何學習的:大腦、心理、經驗及學校(擴展版)》[M].上海:華東師範大學出版社,2013:10-12.

基於構造策略的相鄰三項線性遞推關係數列通項公式的求法

——初探求斐波那契數列的通項公式的源頭

廣東省清遠市清新區第一中學

譚麗君

摘要:高考中的遞推數列求通項公式的問題,情境新穎別致、有廣度、創新度和深度,是高考的熱點之一,例如2024年新高考I卷的第8題,就是有關斐波那契數列的. 是一類考查思維能力的好題. 它要求考生具有嚴密的邏輯推理能力,找到數列的通項公式,為此介紹相鄰三項線性遞推關係的數列的通項公式的求法.

關鍵字:遞推數列　通項公式　待定係數法　瑪律科夫鏈　斐波那契數列

我們知道,由相鄰兩項的線性遞推關係所確定的數列,是可以求通項公式的. 一般通過待定係數,構造一個等比數列,借助等比數列的通項公式,實現通項的求解. 而著名的斐波那契數列,揭示了數列相鄰三項的線性遞推關係,能不能求通項公式? 答案是肯定的. 如何求由三項線性遞推關係所確定的數列的通項公式呢? 以一個典例開始探究.

一、典例分析

【典例】已知數列$\{P_n\}$滿足$P_1=\dfrac{1}{3},P_2=\dfrac{7}{9},3P_n=P_{n-1}+2P_{n-2}(n\geq 3)$,求數列$\{P_n\}$的通項公式.

【解析】(方法一:分拆中間項 + 待定係數法 + 構造等比數列)

設$3P_n=\lambda P_{n-1}+(1-\lambda)P_{n-1}+2P_{n-2}$,

$$\therefore 3P_n-\lambda P_{n-1}=(1-\lambda)P_{n-1}+2P_{n-2}(n\geq 3),$$

令$\dfrac{3}{1-\lambda}=\dfrac{-\lambda}{2}$,

$$\therefore \lambda^2-\lambda-6=0,$$

$$\therefore \lambda=-2 \text{ 或 } \lambda=3.$$

（1）當 $\lambda=-2$ 時，$\therefore 3P_n+2P_{n-1}=3P_{n-1}+2P_{n-2}(n\geq 3)$，

$\therefore \{3P_{n+1}+2P_n\}$ 是一個常數列，

$$\therefore 3P_{n+1}+2P_n=3P_2+2P_1=3 \quad ①$$

（2）當 $\lambda=3$ 時，$\therefore 3P_n-3P_{n-1}=-2P_{n-1}+2P_{n-2}$，

$$\therefore P_n-P_{n-1}=-\frac{2}{3}(P_{n-1}-P_{n-2})(n\geq 3),$$

$\therefore \{P_{n+1}-P_n\}$ 是一個首項為$\frac{4}{9}$，公比為 $-\frac{2}{3}$ 的等比數列，

$$\therefore P_{n+1}-P_n=\frac{4}{9}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1} \quad ②$$

① − ② × 3 得：$5P_n=3-3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}$，

$$\therefore P_n=\frac{3}{5}-\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}(n\in N^*).$$

（方法二：下標最大項係數變為 1 + 待定係數法 + 構造等比數列）

由 $3P_n=P_{n-1}+2P_{n-2}(n\geq 3)$ 得 $P_n=\frac{1}{3}P_{n-1}+\frac{2}{3}P_{n-2}$，

令 $P_n-x_1P_{n-1}=x_2(P_{n-1}-x_1P_{n-2})$，

得 $P_n=(x_1+x_2)P_{n-1}-x_1x_2P_{n-2}$，

特徵方程是：$3x^2=x+2$.

即$\begin{cases}x_1+x_2=\frac{1}{3}\\ x_1x_2=-\frac{2}{3}\end{cases}$，　解得$\begin{cases}x_1=1\\ x_2=-\frac{2}{3}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_1=-\frac{2}{3}\\ x_2=1\end{cases}$，

由$\begin{cases}x_1=1\\ x_2=-\frac{2}{3}\end{cases}$ 得：$P_n-P_{n-1}=-\frac{2}{3}(P_{n-1}-P_{n-2})(n\geq 3)$，

$\therefore \{P_{n+1}-P_n\}$ 是一個首項為$\frac{4}{9}$，公比為 $-\frac{2}{3}$ 的等比數列，

$$\therefore P_2-P_1=\frac{4}{9}\times\left(-\frac{2}{3}\right),$$

$$P_3-P_2=\frac{4}{9}\times\left(-\frac{2}{3}\right)^2,$$

$$\cdots\cdots,$$

$$P_n-P_{n-1}=\frac{4}{9}\times\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1},$$

以上各式相加得:$P_n - P_1 = \frac{4}{9}\times\left(-\frac{2}{3}\right)+\frac{4}{9}\times\left(-\frac{2}{3}\right)^2+\cdots+\frac{4}{9}\times\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$,

$\therefore P_n = \frac{3}{5}-\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}$,經檢驗,$p_1$ 也滿足上式,

$$\therefore P_n = \frac{3}{5}-\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}(n\in N^*).$$

【點評】上述兩種解題方法的解題思路是完全一致的,只是表達方式不同. 在解題過程中,待定的係數都得到了兩組解,方法一是把這兩組解的結果充分利用起來,結合解方程組的思想去求數列的通項公式;方法二則是只利用其中的一組解,將問題做進一步的研究,將連續三項遞推關係轉化為連續兩項遞推關係,進一步利用累加法將問題徹底解決. 同學們可以從兩種方法的"異同" 當中去領悟解題思路的精髓.

如果僅僅從數列的項來觀察數列的通項規律,是非常困難的. 而通過觀察,數列遞推關係有兩種組合方式,求通項思路是一致的. 因此,選擇其一求出數列通項公式即算完成任務. 問題是為什麼遞推關係有兩種組合方式? 還有沒有其他的組合方式? 這種係數配比是如何來的? 搞清楚配比係數產生的依據,才是問題的根本所在. 下面以斐波那契數列(以下簡稱為 F - 數列) 為載體來探究問題的根源.

二、F - 數列的深度研究

人教 A 版選擇性必修二的第四章《數列》的複習參考題四的拓廣探索的最後一題原題如下:

若數列$\{F_n\}$ 滿足 $F_1=1, F_2=1, F_n=F_{n-1}+F_{n-2}(n\geq 3, n\in N^*)$,則$\{F_n\}$ 稱為斐波那契數列. 試用數學歸納法證明其通項公式為 $F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$.

F - 數列是典型的二階常係數線性齊次遞推數列,所以遞推方法是研究 F - 數列的基本方法.

下面我們討論 F - 數列的通項表示.

已知 F - 數列的定義:$\begin{cases} f_{n+2}=f_{n+1}+f_n, n\geq 1 \\ f_1=f_2=1 \end{cases}$ (1)

首先注意方程式(1) 由兩部分組成:一部分是$\{f_n : n\geq 1\}$ 所滿足的遞推方程

$$x_{n+2}=x_{n+1}+x_n \quad (2)$$

另一部分是其前面兩項的數值$f_1=f_2=1$,稱為初始條件,根據數學歸納法原理,兩部分合在一起,唯一地確定了 F - 數列.

如果只有遞推式(2),則不足以唯一地確定一個數列,即滿足式(2) 的數列不止一個:給定不同的始值,根據式(2),可以產生不同的數列. 在滿足式(2) 的數列中,我們自然希望

找出比較簡單又為我們所熟悉的數列,例如等比數列.

設公比為 x 的等比數列 $\{x^n:n\geq 0\}$ 滿足遞推方程式(2),則 x 適合方程 $x^{n+2}-x^{n+1}-x^n=0$ (3)

由此解出式(3)的兩根為

$$\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad (4)$$

於是我們一次找出了兩個滿足遞推式(3)的等比數列 $\{\alpha^n,n\geq 0\}$, $\{\beta^n,n\geq 0\}$.

注意到式(2)是"線性"的(即式(2)的每一項均為一次),若數列 x'_n,x''_n 均滿足式(2),即 $x'_{n+2}=x'_{n+1}+x'_n,x''_{n+2}=x''_{n+1}+x''_n$

則其線性組合 $x_n=ax'_n+bx''_n,n\geq 0,a,b$ 為常數

也滿足式(2),即 $x_{n+2}=ax'_{n+2}+bx''_{n+2}=a(x'_{n+1}+x'_n)+b(x''_{n+1}+x''_n)$

$$=(ax'_{n+1}+bx''_{n+1})+(ax'_n+bx''_n)=x_{n+1}+x_n$$

所以,我們可以構成無窮多個滿足式(2)的數列 $\{x_n=a\alpha^n+b\beta^n,n\geq 0\}$ (a,b 為任意常數). 如果我們從中挑出滿足初始條件

$$x_0=x_1=1 \quad (5)$$

的數列,則它就是 $F-$ 數列:$x_n=f_{n+1}(n\geq 0)$. 為此,只需適當地選擇常數 a,b,使式(5)成立,即 a,b 滿足

$$\begin{cases} x_0=a+b=1 \\ x_1=a\cdot\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}+b\cdot\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}=1 \end{cases} \quad (6)$$

由式(6)解出

$$a=\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}},\ b=-\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \quad (7)$$

於是 $f_n=x_{n-1}=a\alpha^{n-1}+b\beta^{n-1}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-1}-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2})^{n-1}$

即 $f_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2})^n-(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2})^n\right]=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n-\beta^n),n\in N^*$

這就是 $F-$ 數列的通項公式,它的意義還在於它揭示了 $F-$ 數列與等比數列之間深刻的聯繫,刻畫了 $F-$ 數列的結構:$F-$ 數列本質上是具有不同公比的兩個等比數列的和.

基於以上探索結論,我們可以總結出有關相鄰三項線性遞推關係數列通項公式的求法步驟:

步驟一:寫出特徵方程的兩根 α,β,

例如本文典例 $3P_n=P_{n-1}+2P_{n-2}(n\geq 3)$ 的特徵方程是:$3x^2=x+2$.

步驟二:設通項公式為 $a_n=c_1\times\alpha^{n-1}+c_2\times\beta^{n-1},n\geq 1$

步驟三:利用初始條件代入步驟二的公式,聯立兩個初始條件組成的方程組,得出 c_1,c_2.

步驟四:將 c_1,c_2 代入步驟二,即得到數列 $\{a_n\}$ 的通項公式.

三、結論的應用

例如以下題目均可用此法解答：

【變式 1】（多選題）已知 S_n 是數列 $\{a_n\}$ 的前 n 項和，且 $a_1=1, a_2=2, 3a_{n+1}=a_n+2a_{n+2}$ （$n\in N^*$）則下列結論正確的是（　　）

A. $\{a_{n+1}+a_n\}$ 為等比數列　　B. $\{a_{n+1}-a_n\}$ 為等比數列

C. $a_n=3-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$　　D. $S_5=\frac{89}{8}$

答案：BCD

【詳解】

對 A：因為 $a_1=1, a_2=2, a_{n+2}=\frac{3}{2}a_{n+1}-\frac{1}{2}a_n$，

所以 $a_3=\frac{3}{2}a_2-\frac{1}{2}a_1=3-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}, a_4=\frac{3}{2}a_3-\frac{1}{2}a_2=\frac{3}{2}\times\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\times 2=\frac{11}{4}$，

因此 $a_2+a_1=3, a_3+a_2=\frac{5}{2}+2=\frac{9}{2}, a_4+a_3=\frac{11}{4}+\frac{5}{2}=\frac{21}{4}$，

而 $\frac{a_3+a_2}{a_2+a_1}=\frac{3}{2}, \frac{a_4+a_3}{a_3+a_2}=\frac{7}{6}$，

所以數列 $\{a_{n+1}+a_n\}$ 不是等比數列，故 A 錯誤；

對 B：因為 $3a_{n+1}=a_n+2a_{n+2}$，所以 $2(a_{n+2}-a_{n+1})-(a_{n+1}-a_n)=0$，

而 $a_1=1, a_2=2$，

因此數列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 是首項為 1，公比為 $\frac{1}{2}$ 的等比數列，故 B 正確；

對 C：由選項 B 知：數列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 是首項為 1，公比為 $\frac{1}{2}$ 的等比數列，

因此 $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2^{n-1}}$，而 $a_1=1, a_2=2$，

所以 $a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+(a_{n-2}-a_{n-3})+\cdots+(a_3-a_2)+(a_2-a_1)+a_1=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-4}+\cdots+\frac{1}{2}+1+1=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}}+1=3-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$，故 C 正確；

對 D：由選項 C 知：$a_n=3-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$，因此

$S_5 = 5 \times 3 - \left[\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right] = 15 - \left(3 + \frac{7}{8}\right) = \frac{89}{8}$,故 D 正確. 故選:BCD.

【變式 2】(多選題)小華玩一種跳棋遊戲,一個箱子中裝有大小質地均相同的且標有 1 ~ 10 的 10 個小球,每次隨機抽取一個小球並放回,規定:若每次取到號碼小於或等於 5 的小球,則前進 1 步,若每次取到號碼大於 5 的小球,則前進 2 步. 每次抽取小球互不影響,記小華一共前進 n 步的概率為 p_n,則下列說法正確的是(　　　)

$A.\ p_1 = \frac{1}{2}$　　　　　$B.\ p_2 = \frac{1}{4}$

$C.\ p_n = \frac{1}{2}p_{n-1} + \frac{1}{2}p_{n-2}(n \geq 3)$　　$D.$ 小華一共前進 2 步的概率最大

答案:ACD

【詳解】

對於 A,前進 1 步的概率和前進 2 步的概率都是 $\frac{1}{2}$,所以 $p_1 = \frac{1}{2}$,故 A 正確;

對於 B,$p_2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$,故 B 錯誤;

對於 C,當 $n \geq 3$ 時,其前進 n 步是由兩部分組成:

第一部分先前進 $n-1$ 步,再前進 1 步,其概率為 $\frac{1}{2}p_{n-1}$;

第二部分先前進 $n-2$ 步,再前進 2 步,其概率為 $\frac{1}{2}p_{n-2}$,得 $p_n = \frac{1}{2}p_{n-1} + \frac{1}{2}p_{n-2}$,$C$ 正確;

對於 D,因為 $p_n = \frac{1}{2}p_{n-1} + \frac{1}{2}p_{n-2}(n \geq 3)$,可得 $2p_n = p_{n-1} + p_{n-2}$,

即 $2p_n + p_{n-1} = 2p_{n-1} + p_{n-2}$,因為 $2p_2 + p_1 = 2 \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = 2$,所以 $2p_n + p_{n-1} = 2(n \geq 2)$,即 $p_n = 1 - \frac{1}{2}p_{n-1}(n \geq 2)$,可得 $p_n - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2}\left(p_{n-1} - \frac{2}{3}\right)$,又 $p_1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6}$,所以數列 $\left\{p_n - \frac{2}{3}\right\}$ 是首項為 $-\frac{1}{6}$,公比為 $-\frac{1}{2}$ 的等比數列,可得 $p_n - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

當 n 為奇數時,$n-1$ 為偶數,則 $p_n - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,即 $p_n = -\frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{2}{3}$,此時數列 $\{p_n\}$ 單調遞增,所以 $p_n < \frac{2}{3}$;

當 n 為偶數時,$n-1$ 為奇數,則$p_n=\frac{1}{6}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{2}{3}$,此時數列$\{p_n\}$單調遞減,

所以 $p_n\leq p_2=\frac{3}{4}$,

綜上,當 $n=2$ 時,概率最大,即小華一共前進 2 步的概率最大,故 D 正確. 故選:ACD.

結束語

總之,有關相鄰三項線性遞推關係數列通項公式的求法,源頭在於構造,而構造的方式可以從遞推公式中發現,還要聯立初始條件才可以唯一確定通項公式. 科學發展在人工智慧方面的利用,也就是瑪律科夫鏈的應用,瑪律科夫鏈與相鄰三項線性遞推關係密切,弄透了本文有助於解決一些相關問題.

參考文獻

[1]《數林外傳》典藏版系列/18,跟大學名師學中學數學 Fibonacci 數列,肖果能.

[2]《步步高高三數學大二輪複習》.

[3] 劉海濤. 探析隱藏在高考概率題中的數列模型[J]. 數學教學研究,2021,40(05):63-67.

[4]《高考數學題出題背景——數列的子列問題》,劉蔣巍.

[5] 董曉立. 數學精微何處尋,紛壇題海有模型——類基於瑪律科夫鏈的概率試題研究[J]. 數學之友,2022,36(18):80-81+84.

[6] 王穎俐,嚴俊秀. 賭徒輸光問題的解法[J]. 太原師範學院學報(自然科學版),2016,15(01):6-8+12.

教育的使命與時代的召喚

——一名中學數學教師的思考

澳門菜農子弟學校

陳建泰

摘要：本文基於作者參與2025澳門教育界國慶訪問團的經驗，從教育使命、數學教學、科技融入、國際視野與教師專業成長等五個面向，探討在「一國兩制」框架下澳門教育的責任與機遇。文章主張教育不僅是知識傳授，更是價值引領與靈魂塑造；數學教育應成為理解國家發展的語言，資訊科技的融入應推動生成型課堂與數據驅動決策。作者最後指示，教育是時代最柔軟的力量，教師應以教育為筆，以學生為本，書寫屬於民族未來的篇章。

關鍵語：教育使命、數學教學、資訊科技、教師專業、教育治理，澳門教育

九月的晨風帶著節慶的氣息，五星紅旗在校園上空獵獵飄揚。就在這個充滿莊嚴與喜悅的國慶季節裡，我有幸隨澳門教育界國慶訪問團前往北京與南京交流，親身感受祖國教育與科研事業的蓬勃發展。那幾天的經歷，如同一次心靈的洗禮——既是對教育初心的叩問，也是對未來使命的召喚。

訪問團在人民大會堂受到全國人大常委會副委員長彭清華的親切會見。副委員長在與港澳教育界的交流中，提出了許多深具啟發性的觀點：要堅守「一國兩制」，要培養愛國愛港愛澳的青年，要提升教育治理能力，對接國家發展戰略，並深化雙向交流，推動港澳成為全球教育樞紐。這些話語語重心長，讓我在會場上久久無法平靜。

教育從來不是孤立的行業，而是國家發展的基石與社會進步的引擎。蘇霍姆林斯基曾說：「教育的本質，是喚醒靈魂的過程。」作為一名教師，我始終相信，教育的價值不僅在於知識的傳遞，更在於價值的引領與靈魂的塑造。當祖國的發展日新月異，當青年一代在多元文化與全球浪潮中尋找自我，教師的責任便愈發重大——要讓他們在認識世界的同時，也能認識自己的根與魂，從歷史中汲取力量，從時代中找到方向。

一、教育的價值：塑造的不只是知識，更是靈魂

「學之大者，為國為民。」古人的話語穿越千年，依然是教育者的座右銘。教育的終極目

標，並非只是讓學生掌握知識與技能，而是要培養能理解國家命運、參與社會建設、懷抱家國情懷與全球視野的新一代公民。

面對變化的時代，知識的邊界在不斷重塑，但教育的核心從未改變——那就是塑造靈魂。杜威(1916)指出：「教育即生活本身。」教育不是為未來準備的工具，而是讓人學會在生活中思考與成長。這句話提醒我：一堂課的價值，不在於學生記住多少公式，而在於他是否學會觀察世界、關心社會、理解自己與國家的聯繫。

我常在課堂上對學生說：「數學是一面鏡子，能照見我們思考的方式，也能折射我們對世界的理解。」當學生在面對難題時不輕言放棄，在錯誤中反覆推敲，在合作中學會傾聽，我看到的，不只是他們的學業進步，而是人格與信念的生長。

二、讓數學成為理解國家的語言

古語云：「立國之本，惟在育才。」而數學，正是育才的底色。作為一名數學教師，我愈發感受到，數學不只是演算的技藝，更是一種理解國家發展的語言。當我們討論函數時，我引導學生以「港珠澳大橋」為例，分析橋樑跨度與拱度的設計比例；當我們學習統計時，我帶學生探究澳門旅遊業人流的變化曲線，理解背後的經濟規律；在講解概率時，我讓學生以氣候數據為素材，思考新能源與環境政策的可持續性。

這些案例讓學生明白，數學不是孤立的，而是活在現實世界中——它描述交通的秩序、科技的速度、經濟的節奏，甚至承載著國家建設的邏輯。當學生眼神中閃現理解與驕傲的光芒時，我知道，他們不僅學會了解題，更學會了以數學的眼光看世界，以理性的方式愛國。

教育的價值，正是在這些瞬間被點亮的。從「公式」到「國家」，從「演算」到「信念」，這是一場看不見卻深刻的心靈轉化。

三、資訊科技融入教學：讓數學重新「活起來」

在數學教學實踐中，我深刻體會到資訊科技已不再是教學的輔助工具，而是重塑數學學習方式的核心力量。當科技進入課堂，數學不再只是板書與演算，而是動態的探索與建構。透過 GeoGebra、Desmos、ClassPoint 及學習歷程平臺等數位工具，學生能在互動中觀察函數變化、在模擬中驗證猜想、在資料分析中發現規律。

有一堂課，我讓學生利用平板操作 GeoGebra，模擬「拋物線的開口與係數變化」。當曲線在螢幕上即時變化時，學生驚訝地發現原本抽象的代數公式竟能如此「鮮活」。這一刻，他們不再只是解題者，而是知識的創造者。科技讓學生的思維變得立體，也讓學習回到「探索」的本質。

更重要的是，資訊科技不僅改變了學習形式，也培養了學生面向未來的能力。數據素養、邏輯思維、創造性解難，這些都是人工智慧時代的核心素養。當學生能運用科技理解數

學、用數學解釋現象，他們便在學習中建立了自信，感受到「我能理解世界」的力量。

科技融入教育的背後，其實是一場教與學關係的重構。教師不再是唯一的知識源頭，而是學習的設計者與啟發者。學生不再只是知識的接受者，而是探索的主體。這樣的課堂，充滿了「未知」與「可能」——教師與學生共同思考，共同生成知識。這種共學氛圍，讓數學教學變得有溫度、有深度，也更貼近時代的脈動。

面向未來的數學課，還需要把「會用」落到「敢用」「善用」。在教學過程中，我嘗試運用數位工具強化學生的學習反思。例如在幾何單元，我引導學生使用平板與 GeoGebra 記錄解題過程中的思考步驟與圖形變化，讓他們在動態操作中理解圖形關係與邏輯推理。課後，我請學生將這些操作截圖與口頭說明整理成簡短的學習報告，並以同儕互評的方式分享不同的解題策略。這樣的歷程讓學生不僅重現了自己的思考軌跡，也學會用數學語言表達推理過程。當他們在課堂上能清楚說出「我為什麼這樣想」時，我深切感受到學習的主體性已經被點亮——他們不再只是解題者，而是理解與建構知識的參與者。

資訊科技也改變了課堂互動的密度與溫度。以即時投票與同屏批註工具為例，教師能快速捕捉全班錯解的共性，再以「同題異解」方式組織討論；學生可以匿名拋出半成品思路，班級文化由「怕錯」轉向「敢試」。我更願意把這種課堂稱為「生成型課堂」：知識不是單向輸入，而是在教師精準提問下，由學生的碰撞與證立中逐步生長。科技不是舞臺的主角，但讓每一次思考被看見、被聽見。

隨著 AI 輔助學習平臺的普及，教師能更快地掌握學習數據與行為模式。這些資料不只是成績紀錄，更是「學習診斷」的依據。透過學習分析（learning analytics），教師可即時了解學生的誤解來源與學習節奏，進而調整教學設計，實現真正的「以學定教」。這種數據驅動的決策文化，使教育從經驗導向走向證據導向，也讓教師的專業判斷更具科學依據。

然而，科技並不能取代教育的溫度。人工智慧再精準，也無法代替教師對學生情緒與潛能的洞察。正如 OECD（2023）在《Education at a Glance》中指出：「數位學習的成效，最終取決於教師如何在人與技術之間建立有意義的連結。」對我而言，科技只是讓教育更「準」的工具，而非讓教師更「少」的理由。真正的挑戰，是如何讓技術與人文共舞，讓數據分析成為育人的輔助，而非評價的終點。

因此，資訊科技的融入，應該是一場「深度學習革命」。它要求教師重新審視課堂角色，要求學生學會自我監控與反思，也要求學校建立支持性的制度與文化。當數位工具能引發思考、促進合作、啟發創造時，數學課不再只是邏輯的操場，而是思想的實驗室。

四、教育的視野：從校園走向世界

在此次訪問中，我深刻感受到內地教育的迅速躍升與國際視野的拓展。無論是南京紫金山實驗室的科技創新，還是北京高校的青年科研氛圍，都讓我看見教育如何與國家發展同頻共振。

澳門教育的獨特之處,在於能同時承載「中國的深度」與「世界的廣度」。我們要「引進來」——與國際頂尖大學合作,讓學生在本地就能接觸最前沿的學術思潮;也要「走出去」——讓澳門青年參與「一帶一路」沿線國家的教育與科研計劃,成為講述中國故事的橋樑。

在這一過程中,我特別關注新加坡與芬蘭兩個教育體系的啟示。新加坡教育強調「國家導向」,課程設計緊貼產業發展,數學教育特別注重邏輯與應用的結合;芬蘭則以「現象導向學習」為核心,鼓勵學生跨學科探究,從真實情境中建構知識。這兩種模式雖路徑不同,但都將教育視為國家未來的戰略工程。相比之下,澳門的教育可在兩者之間找到平衡——既保持知識的嚴謹,也培養思維的靈活;既關注學科的深度,也強調學生的主動參與。

教育學者 Sahlberg(2021)指出:「優秀的教育體系,不是讓學生學得最快,而是讓他們學得最有意義。」這句話值得深思。教育的國際化,不應僅是制度的引進與交流,更應是一種理念的互鑑與融合。澳門教育要從「模仿者」走向「創造者」,在全球教育格局中形成屬於自己的聲音。

五、教師的專業成長與教育信念

每當我在課堂上看到學生眼神閃爍的光亮,就更明白教育的力量在於「點燃」。而要點燃他人的熱情,教師首先要有不滅的信念。作為教師,我始終相信學習沒有終點。博士研修的過程對我而言,不只是求知,更是一場心靈的淬鍊。教育理論不應停留於書本,而應在教室裡被驗證、被修正、被重生。每一次研究閱讀,都讓我更明白課堂的複雜;每一次教學實踐,都讓我更理解理論的溫度。這樣的往返,讓我在「學者」與「教師」之間找到平衡,也在反思與行動中重新定義了教育的意義。

教育從來不是一場孤行。教師之間的合作、學校之間的聯動、學術界與實務界的對話,都是推動教育變革的力量。唯有不斷學習、不斷反思,教師才能在教與學的循環中找到專業的定位,也才能在時代的浪潮中不迷失方向。

六、結語:以教育為筆,書寫時代的答案

教育是一場漫長而深遠的事業。陶行知說:「捧著一顆心來,不帶半根草去。」這是教師的初心,也是我們的使命。作為一名數學教師,我願以教育為筆、以數學為橋,把理性與情感結合,把知識與信念融通。我要讓學生在方程式裡看到邏輯,在數據中理解世界,在學習中發現自我。

教育的力量,也許不在一朝一夕,但它能潤物無聲,能照亮心靈。正如人大副委員長所言,教育是「一國兩制」下的根本工程,是港澳在國家現代化進程中最具優勢的力量。當一代又一代青年在「愛國、愛港澳、愛世界」的價值坐標中找到方向,那便是教育對時代最深沉

的回應。

教育,是國家最柔軟的力量;教師,是時代最溫暖的星光。

我願繼續在這條路上前行——以筆為燈,以生為伴,與時代同行,與學生共長。

参考文獻

1. Dewey, J. (1916). *Democracy and Education: An Introduction to the Philosophy of Education.* New York, NY: Macmillan.
2. OECD. (2023). *Education at a Glance 2023: OECD Indicators* . Paris: OECD Publishing. https://doi.org/10.1787/69096873-en
3. Sahlberg, P. (2021). *Finnish Lessons 3.0: What Can the World Learn from Educational Change in Finland?* New York, NY: Teachers College Press.
4. Marginson, S. (2011). *Higher Education and Public Good.* Higher Education Quarterly, 65 (4), 411 – 433.
5. 蘇霍姆林斯基(Sukhomlinsky, V. A.)著,李樹譯.(1984).《給教師的建議》.北京:教育科學出版社.
6. 陶行知.(1981).《陶行知教育文集》.北京:人民教育出版社.
7. 中華人民共和國教育部.(2022).《教育數位化戰略行動》.北京:教育部.
8. 澳門特別行政區教育及青年發展局.(2023).《非高等教育課程框架》.澳門:教青局.

澳門數學教育研究學會

聯絡地址:澳門殷皇子大馬路 11 號群發花園第一座 14 樓 A
電話:853-28965253,853-66878553 傳真:853-28788259
E-mail: macaumath@ yahoo. com. hk , inwmacau@ yahoo. com. hk
Website:http://www. mathsmo. com/

會務活動紀錄

2002 年

6 月 17 日	在氹仔海島公證署辦理本會註冊手續。

2003 年

6 月 7 日	舉辦“中國數學教學的雙基原理—2002 年數學教育高級研討班”——會議精神傳達報告會。
12 月 13、14 日	舉行中小學“數學開放題教學”專題研討會及示範課。
12 月	《澳門數學教育》創刊號出版。

2004 年

4 月 17 日	舉辦“DM_Lab 和動態數學教學”講座。
9 月 30 日	赴杭州拜訪教育研究中心,訪問海寧市崇文實驗學校及杭州市南宛小學。
10 月 9、10 日	舉行“數學情景與提出問題教學”專題研討會及示範課。

2005 年

3 月 24 -28 日	赴貴陽、興義市參觀和交流,訪問興義八中和延安路小學。
4 月 16 日	與教育出版社合辦“突破兒童數學思維空間”研討會及《新思維數學》教材展覽會。
11 月 26、27 日	舉行“全國小學特級數學男教師教學風采展示”專題研討會及示範課。
12 月 20-28 日	前往武漢訪問華中師範大學第一附屬中學、東方紅小學以及育才第二小學。

2006 年

3 月 4 日	舉辦“因材施教、拔尖保底——如何幫助數學差生學習”專題研討會。

4 月 14、15 日　赴廣東省河原市第二小學和河源市中學觀課。
6 月 25-29 日　前往山東濟南參觀濟南第十二中學和解放路第一小學。
12 月 9-10 日　舉行“國家數學教育高級研修班‘數學教師教育’澳門會議”。

2007 年

4 月 28、29 日　與全國嘗試教學理論研究會合辦“兩岸四地小學數學課堂教學觀摩及說課比賽”。
7 月 4、5 日　與澳門大學教育學院合辦“有效的數學教學:一個國際視角”及“有效數學教學實務:美國的經驗”講座。
7 月 30 日至
8 月 3 日　訪問陝西省西安市吉祥路小學、西安市第一中學、西北工業大學附小。
9 月 1 日　舉辦“創造性數學的想法及方法運用”講座。

2008 年

11 月 1 日　舉辦“小學數學專家講座”。
11 月 22 日　舉辦“中學數學教育改革成功經驗介紹暨課堂教學展示”專題會議。

2009 年

5 月 29 日、30 日　前往美國參加第 34 屆美國高中數學競賽(ARML),榮獲國際組第一名。
8 月 15 日~20 日　訪問內蒙古包頭市鐵路二中。
11 月 14 日　舉辦“數學教學的有效性與開放性” 研討大會及示範課。
12 月 5 日、6 日　舉辦“第一屆澳門小學數學優質課堂教學” 評比大會。
(慶祝祖國成立 60 週年,澳門回歸 10 週年,本會成立 5 週年活動)

2010 年

6 月　成立“澳門數學奧林匹克學會”,政府憲報刊登該會章程。
11 月 26 日、27 日　組織 18 名數學優秀學生前往北京參加首屆世界數學團體錦標賽。
1 月 18 日　華東師範大學聘請汪會長擔任華東師範大學國際數學奧林匹克研究中心澳門實驗培訓基地主任。

2011 年

1 月 28 日　「美國高中數學競賽」澳門區代表隊榮獲澳門特區政府頒授功績獎狀。
9 月 27 日、28 日　與澳門大學教育學院合辦“國際著名教育家蘇霍姆林斯基教育理念介紹會”。

2012 年

6 月 9 日　　　舉辦“如何激發學生數學創造力講座暨中學數學課堂教學展示”公開課。

8 月 1-6 日　　赴吉林、延邊中、小學進行學術交流。

11 月 3-4 日　　舉辦“全國小學數學四大教學流派課堂教學展示課”。

11 月 3 日晚上　舉行慶祝本會成立十週年晚宴,十週年成果展。

2013 年

4 月 6 日　　　舉辦亞太區小學奧數(澳門區)選拔賽。

4 月 14 日　　　進行中學第二十四屆、小學第十一屆“希望杯”澳門地區第二試決賽。

4 月 16 日　　　名譽會長陳明金先生宴請本會,表示對本澳數學教育的支持和鼓勵。

5 月 11 日　　　舉辦“幼兒教育理論講座與幼兒教學實踐示範課”。

6 月 1 日　　　赴新加坡參加 2013 亞太小學數學奧林匹克總決賽。

5 月 31、6 月 1 日前往美國參加第 38 屆美國高中數學競賽(ARML),澳門隊第二。

6 月 15-19 日　舉辦數學實驗——統計與概率工作坊。

7 月 10 日　　　澳門基金會為 ARML 澳門隊凱旋而歸的健兒舉行慶功宴。

7 月 18 日　　　舉行希望杯、亞太區小學奧數(新加坡)、數學大王賽頒獎禮暨(ARML)美國高中數學競賽成果滙報會。

8 月 1-7 日　　赴哈爾濱、鷄西中、小學進行學術交流。

11 月 16-17 日　與澳門大學教育學院合辦「嘗試教學理論研究華人論壇」和幼兒教育報告會。

12 月 7-9 日　　舉辦「中學、小學數學奧林匹克教練員考級証書培訓班」。

12 月　　　　　《澳門數學教育》第十一期出版。

2014 年

1 月 11 日　　　舉行「幾何王」初中平面幾何學習軟件介紹會。

4 月 3 日　　　拜訪澳門基金會。

4 月 13 日　　　進行中學第二十五屆、小學第十二屆“希望杯”澳門地區第二試決賽。

4 月 15 日　　　拜訪澳門教育暨青年局。

4 月 17 日至 21 日赴臺灣澎湖、高雄參訪活動。

4 月 26 日　　　舉辦 “史豐收速算法”介紹會。

5 月 30-31 日　前往美國參加第 39 屆美國高中數學競賽(ARML),澳門隊第二。

6 月 14 日　　　舉行「領導數學科組工作經驗介紹會暨瀋陽七中教學展示課」活動。

7 月 11 日　　　舉行「幾何王」初中平面幾何學習軟件培訓班。

7 月 12 日	舉行希望杯、亞太區小學奧數（新加坡）、數學大王賽、環亞太杯國際數學賽、中小學數學奧林匹克教練員考級証書頒獎禮暨（ARML）美國高中數學競賽成果滙報會。
8 月 10-16 日	派學生前往四川西昌參加澳門基金會教科文中心航天團。
10 月 18 日	舉辦“熟能生巧數學觀點講座暨高中數學教學展示課”。
11 月 22-23、29-30 日	舉辦“史豐收速算法”導師培訓班。
12 月 6 日、7 日	舉辦“第五屆澳門小學數學優質課堂教學”評比大會暨全國協作區孔子杯小學數學課堂教學大賽（澳門賽區）。
12 月	《澳門數學教育》第十二期出版。

2015 年

1 月 16 日	拜訪澳門基金會。
1 月 31 日	舉行成立 “史豐收速算法” 培訓基地新聞發佈會。
4 月 12 日	進行中學第二十六屆、小學第十三屆“希望杯”澳門地區第二試決賽。
4 月 19 日	拜訪澳門教育暨青年局。
5 月 10 日	汪會長參加上海“小學數學教師教育高級研修班” 。
5 月 23 日	舉行「任勇的數學教學主張」講座。
5 月 28-31 日	前往新加坡參加第 26 屆亞太區小學數學奧林匹克賽決賽。
5 月 29-30 日	前往美國參加第 40 屆美國高中數學競賽（ARML），澳門隊重獲冠軍。
6 月 13 日	舉行希望杯、亞太區小學奧數（新加坡）、數學大王賽、環亞太杯國際數學賽暨（ARML）美國高中數學競賽成果滙報會。
6 月 3-7 日	澳門大學教育學院與本會合辦“數學整數教育”專題研討會。
6 月 6 日	邀請意大利幾何學專家和捷克數學家教育專家舉行講座。
6 月 27 日	往港參加史豐收速算兩岸三地比賽。
7 月 11 日	與澳門大學教育學院、香港資優教育學會合辦「環亞太杯國際數學邀請賽總決賽」。
8 月	《兩岸三地升大數學教程》出版。
8 月 8-12 日	澳門隊赴桂林參加 WMI 世界數學邀請賽。
8 月 15-20 日	赴陝西省進行學術交流。
10 月 17 日	舉辦“幼兒教育報告會及幼兒史豐收速算法演示課”。
12 月 5 日、6 日	舉辦“第一屆小學新思維數學‘澳門杯’課堂教學大賽評比大會”。
12 月 7 日	獲澳門特別行政區授予團隊功績獎狀。
12 月	《澳門數學教育》第十三期出版。

2016 年

1 月 17 日	舉辦“兒童資優培育” 介紹會。
3 月 5 日	舉辦“希望杯數學競賽試題分析”講座。
3 月 19 日	合辦 “中、小學數學實驗和智力發展”專題講座。
5 月 26–29 日	前往新加坡參加第 27 屆亞太區小學數學奧林匹克賽決賽。
6 月 3–4 日	前往美國參加第 41 屆美國高中數學競賽（ARML） ，澳門隊獲亞軍。
6 月 18 日	舉行希望杯、亞太區小學奧數（新加坡）、數學大王賽、環亞太杯國際數學賽暨（ARML）美國高中數學競賽成果滙報會。
10 月 22 日	舉辦“雲南麗江市教育局講座暨中學示範課” 。
11 月 19 日	舉辦“四川省成都市成華小學示範課” 。
11 月 25–29 日	前往馬來西亞參加 MIMO 馬來西亞國際奧數競賽。
12 月 10–11 日	舉辦第二屆小學“新思維數學”澳門杯課堂教學比賽。
12 月	《澳門數學教育》第十四期出版。

2017 年

3 月 11 日	慶祝十五周年會慶暨春茗聚餐。
5 月 25–28 日	前往新加坡參加第 28 屆亞太區小學數學奧林匹克賽決賽。
6 月 2–3 日	前往美國參加第 42 屆美國高中數學競賽（ARML）。
6 月 17 日	希望杯、亞太區小學奧數（新加坡）、數學大王賽、環亞太杯國際數學賽暨（ARML）美國高中數學競賽成果滙報會。
7 月 8–9 日	舉行首辦「首屆奧林匹克數學三維杯環亞太國際邀請賽賽（2017）」。
9 月 12 日	拜訪譚俊榮司長。
11 月 4 日	舉辦“海峽兩岸小學數學課堂教學交流展示” 。
12 月 9 日、10 日	舉辦第三屆小學“新思維數學”澳門杯課堂教學比賽。
12 月	《澳門數學教育》第十五期出版。

2018 年

1 月 28 日	前往中山拜訪華星幼稚園。
4 月 28 日	舉辦「世界七大數學死題破解演講會」。
5 月 24–29 日	前往新加坡參加第 29 屆亞太區小學數學奧林匹克賽決賽。
6 月 1–2 日	前往美國參加第 43 屆美國高中數學競賽（ARML）。
6 月 30 日– 7 月 2 日	合辦 2018 三維杯環亞太國際數學邀請賽（香港舉行）。
7 月 7 日	希望杯、數學大王國際邀請賽、環亞太杯國際數學賽暨（ARML）美國高中數學競賽成果滙報會。

5 月 25-28 日　前往新加坡參加第 28 屆亞太區小學數學奧林匹克賽決賽。
6 月　為香港名創教育（文達出版社）編輯的澳門基力數學探知 1A 和 1B 出版。
6 月 16-17 日　前往深圳出席 2018 全國史豐收數學速算法大獎賽。
10 月 13 日　舉辦「使用漫畫進行數學教學 — 來自新加坡的經驗」講座。
11 月 10 日　舉辦「世界數學難題一尺解第二次講座」。
11 月 23-27 日　前往馬來西亞力行華小學參加第 5 屆 馬來西亞國際數學奧林匹克競賽。
12 月 8-9 日　第二十八屆「滙業盃中學生常識問答比賽」數學命題，為協辦單位。
12 月 15 日、16 日　舉辦常港澳小學「新思維數學」課堂教學邀請賽。
12 月　《澳門數學教育》第十六期出版。

2019 年

6 月 1 日　前往新加坡參加第 30 屆亞太區小學數學奧林匹克賽決賽。
5 月 30 日-
6 月 8 日　前往美國參加第 44 屆美國高中數學競賽（ARML）。
7 月 5-8 日　主辦 2019 金蓮花杯國際數學邀請賽。
7 月 7 日　舉行金蓮花杯國際數學邀請賽、數學大王國際邀請賽、環亞太杯國際數學賽暨（ARML）美國高中數學競賽成果滙報會。
6 月　為香港名創教育（文達出版社）編輯的澳門基力數學探知 2A 和 2B 出版。
11 月 22-25 日　前往馬來西亞參加第 6 屆 馬來西亞國際數學奧林匹克競賽。
12 月 6-7 日　為第二十八屆「滙業盃中學生常識問答比賽」數學命題，本會為協辦單位。
11 月 30 日、
12 月 1 日　舉辦「慶回歸--海峽兩岸小學新思維數學課堂教學大賽」。
12 月　《澳門數學教育》第十七期出版。

2020 年

因疫情關係，使本會上半年活動都未能如期舉行。
10 月 17 日　舉辦「簡約教育的理論與實踐思考」講座。
11 月 28-29 日　舉辦「海峽兩岸小學新思維數學課堂教學大賽」。
12 月　《澳門數學教育》第十八期出版。

2021 年

因疫情關係，使本會活動都未能如期舉行。

3 月 4 日　於浸信中學舉辦「華數之星」選拔賽。

6 月　參加第四屆分角尺作圖國際決賽。

12 月　《澳門數學教育》第十九期出版。

2022 年

因疫情關係，使本會活動都未能如期舉行。

2 月 20 日　舉行慶祝本會成立二十周年晚宴。

12 月　《澳門數學教育》第二十期出版。

2023 年

7 月 20 日　拜訪中聯辦。

12 月 10 日　由澳門數學奧林匹克學會主辦，本會協辦 2023“金蓮花”杯國際數學邀請賽（澳門區）決賽。

12 月 17 日　舉行“金蓮花”杯國際數學邀請賽（澳門區）決賽頒獎禮。

12 月 21-25 日　探索海上絲綢之路・閩南文化・參訪交流團，到訪廈門及泉州兩地。

12 月　《澳門數學教育》第二十一期出版。

2024 年

7 月 26-30 日　在中聯辦教青部和貴州省教育廳的支持下，澳門數學教師考察團訪問貴州，就“立足數學教育，培育科技人才”的主題，與貴陽市第三中學教師進行了深入交流。

10 月 26 日　在鏡平學校小學部禮堂舉辦「數學補習有用嗎?」講座。邀請北京師範大學基礎教育質量監測協同創新中心數學監測部主任王立東教授主講，約 200 名教師及家長參加。

12 月　《澳門數學教育》第二十二期出版。

2025 年

4 月 25 日　本會國際數學測試講解會---《大型國際教育比較研究結果的解讀：應用與誤用》講座，邀請北京師範大學教授、國家教育部長江學者講座教授、世界杰出華人獎、國際教育成就評價協會 IEA 名譽會員、數學教育界最高榮譽費萊登特爾獎、香港特別行政區頒授銅紫荊星章獲得者，國際數學教育知名教授梁貫成先生主講，梁教授結合澳門中學生參加的 PISA 測試、澳門小學生參加的 TIMSS 測試，討論他們的設計

框架與數據應用案例,剖析國際測試結果在教學實踐中的正向影響與潛在誤區。澳門教青局資源廳廳長鄧偉強博士出席並致辭。

6 月　與啓文合作出版「四校聯考」數學科模擬試卷。

6 月 27 日　本會主辦、城市大學教育學院協辦、在城市大學金龍校區舉辦「虛擬實境在教育中的理論創新與教育實踐」工作坊,邀請香港中文大學課程與教學學系莊紹勇教授主講,從 Edu Venture-VR 的理論基礎、設計架構、中小學應用實際案例,深入淺出介紹 VR 應用於教育的理論與實踐。

10 月 17 日　在聖保祿學校禮堂舉辦「核心素養導向下中學統計與概率內容的教與學」講座,邀請華東師範大學數學科學學院數學教育系系主任吳穎康教授主講,約 50 名教師參加。

11 月 22-23 日　在濠江中學附屬小學舉辦「慶回歸-2025 年度全澳小學數學課堂教學大賽」約 250 名教師參加。

參賽老師:

培正中學李凱勤老師,課題:小三年級<翻轉三角形>

廣大中學李慧娟老師,課題:小六年級<可能性>

化地瑪聖母女子學校洪麗老師,課題:小五年級<長方體的認識>

嘉諾撒聖心中學王曉雯老師,課題:小五年級<平行四邊形的面積>

濠江中學附屬小學林煥嫦老師,課題:小五年級<雞兔同籠問題>

一等獎:李慧娟老師、王曉雯老師、林煥嫦老師。

二等獎:李凱勤老師、洪麗老師。

嘉賓:

範良火教授:澳門大學教育學院院長,講座教授,STEM 和 AI 教育中心主任

汪甄南:澳門數學教育研究學會永遠榮譽會長,澳門數學奧林匹克學會會長

彭寧靜:澳門中聯辦教育與青年工作部的工作人員

李勇先,澳門中聯辦教青部副部長

評委:

1、邱學華(中國教育學會數學教育研究發展中心嘗試教學理論研究會理事長、華東師範大學教育科學學院兼職研究員、南京師範大學兼職教授)

2、宋薇(貴陽市教育科學研究所副所長,中學正高級教師、特級教師)

3、史豐寶(國際著名速算發明家史豐收教授胞弟,史豐收國際教育總部主任、中國教育學會青少年創新思維教育研究中心理事。曾擔任

中央電視臺《史豐收速算法》教學講座主講老師,深耕速算教育與創新思維培養領域三十多年。

4、代毅(澳門城市大學教育學院課程主任/助理教授/博士生導師)

5、鄧海棠(澳門數學教育研究學會、澳門數學奧林匹克學會兩會秘書長,《澳門數學教育》雜志常務編委、中學奧數教練)

12 月 20-25 日	前往長春-延吉,參訪「東北師範大學」和「東北師範大學附屬中學」,參觀長春「電影製片廠」、「偽滿皇宮博物院」、「東北淪陷史陳列館」、「長白山北坡」和「老里克湖徒步穿越」。
12 月	《澳門數學教育》第二十三期出版。